SISTEMI DISSIPATIVI E FUNZIONI POSITIVE REALI

La teoria dei sistemi dissipativi ha giocato e gioca tuttora un ruolo fondamentale nel campo dei controlli moderni. Questa disciplina infatti ha che fare con molti problemi centrali quali:

- Teoria della stabilità (Criterio di Routh-Hurwitz)
- Teoria delle reti elettriche
- Controllo ottimo
- Controllo di sistemi non lineari

Dato un sistema con ingresso u e uscita y, si può definire una funzione $w(u,y)$ che indica la potenza di alimentazione nel sistema dall'esterno. Si usa la convenzione

$w(u,y) \geq 0$ potenza entrante

$w(u,y) \leq 0$ potenza uscente

In questi appunti utilizzeremo la funzione potenza

$$w(u,y) = uy \quad \text{(prodotto)}$$

Tale scelta è giustificata da esempi elettrici e meccanici.

Definizione

Consideriamo un sistema Σ in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = h(x,u) \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R}$$

con ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$ e stato $x(t)$. Allora Σ è detto dissipativo se esiste una funzione (detta funzione energia del sistema)

$$S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

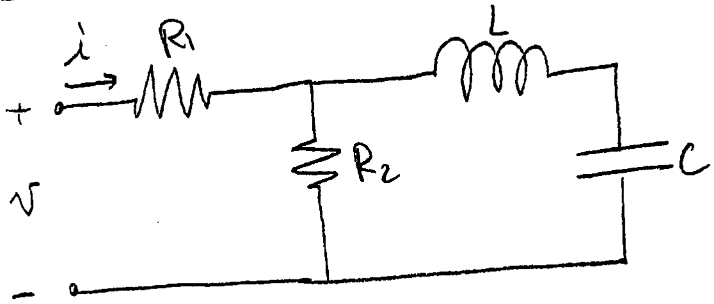
tale che per ogni ingresso $u(t)$ $t \in [0,T]$ che partendo uno stato iniziale $x(0)$ genera una traiettoria $x(t)$ e $y(t)$ si ha che

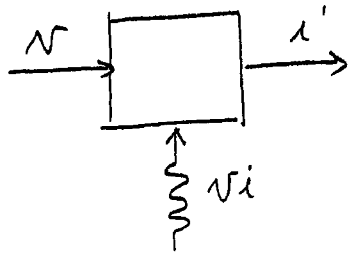
$$\int_0^T y(t)\,u(t)\,dt \geq S(x(T)) - S(x(0)) \qquad (*)$$

Osservazione

La disuguaglianza $(*)$ è detta disuguaglianza di dissipatività e indica che l'energia fornita al sistema nell'intervallo $[0,T]$ data da $\int_0^T y(t)u(t)\,dt$ non può superare l'incremento dell'energia interna al sistema.

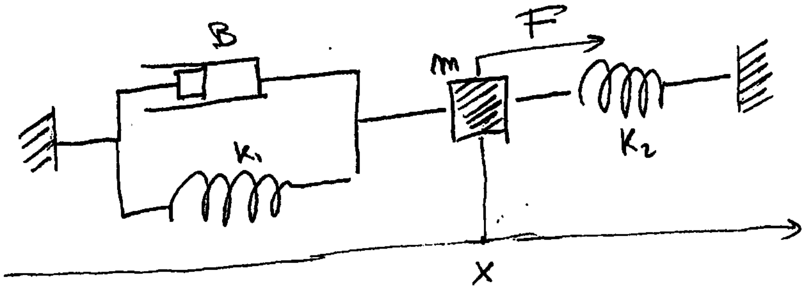
1. Sistema elettrico: dipolo passivo

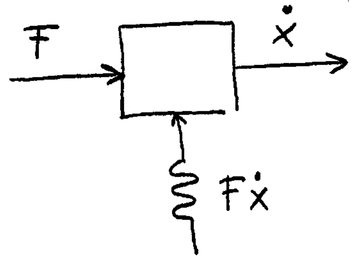




In un dipolo elettrico la potenza di alimentazione è data dal prodotto della tensione v ai capi del dipolo e la corrente i entrante.

2. Sistema meccanico





In un sistema meccanico dato dalla connessione di molle masse e ammortizzatori a cui si applica una forza F a un punto X la quale provoca una velocità $\dot{X}$, la potenza di alimentazione è $F\dot{X}$.

Secondo questa interpretazione il termine $y(t)\,u(t)$ indica la potenza (fornita se positiva, prelevata se negativa dal sistema) istantanea scambiata dal sistema con l'ambiente.

Teorema

Un sistema lineare con funzione di trasferimento $W(s)$ è dissipativo se e solo se $W(s)$ è Positiva Reale (PR)

Definizione

Una funzione razionale $F(s)$ è PR se

i) $F(s)$ ha poli in $\mathrm{Re}\, s \leq 0$

ii) $\mathrm{Re}\, F(j\omega) \geq 0$ $\forall \omega$ tali che $j\omega$ non è polo di $F(s)$

iii) I poli sull'asse immaginario (compreso l'eventuale polo all'infinito se $F(s)$ non è propria) sono semplici e con residuo reale e positivo

---

Osservazione: Nel caso in cui $F(s)$ non è propria la condizione iii) impone che

$$\lim_{s \to \infty} \frac{F(s)}{s} \geq 0$$

e quindi il numeratore di $F(s)$ ha grado al massimo di una unità maggiore del grado del denominatore di $F(s)$

Teorema

Sia $F(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ razionale con $a(s), b(s)$ coprimi

$F(s)$ è PR $\iff$ i) $\mathrm{Re}\, F(j\omega) \geq 0$ $\forall \omega$ reali tali che $j\omega$ non è polo di $F(s)$

ii) $a(s)+b(s)$ ha radici in $\mathrm{Re}\, s<0$

Conseguenze

1) $F(s) \equiv 0$ è PR

2) $F_1(s), F_2(s)$ PR $\Rightarrow$ $\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$ è PR per ogni $\alpha, \beta \geq 0$

3) $W(s)$ PR $\Rightarrow$ $W(1/s)$ e $1/W(s)$ sono PR

4) $W(s), H(s)$ PR $\Rightarrow$ $\dfrac{W(s)}{1+H(s)W(s)}$ PR

DIM

$W(s), H(s)$ PR $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{W(s)} + H(s)$ PR $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{1/W(s) + H(s)} = \dfrac{W(s)}{1+H(s)W(s)}$ PR

5) $F(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ PR $\Rightarrow$ grado$(a(s))$ $-$ grado$(b(s))$ $= \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

6) s, $1/s$ sono PR

$s+\alpha$, $\dfrac{1}{s+\alpha}$ sono PR se $\alpha \geq 0$

$1/s^2$ e $-1/s$ non sono PR

7) $F(s)$ PR $\Rightarrow T = \dfrac{F(s)}{1+KF(s)}$ è BIBO stabile se $K>0$

Dim

$T(s)$ è PR dato che $K>0$ e PR.

Ora $T(s)$ ha poli in $\mathrm{Re}\, s \leq 0$. Se per assurdo esistesse $j\omega_0$ polo di $T(s)$, allora

$$1+K\,F(j\omega_0)=0 \Rightarrow F(j\omega_0) = -1/K$$

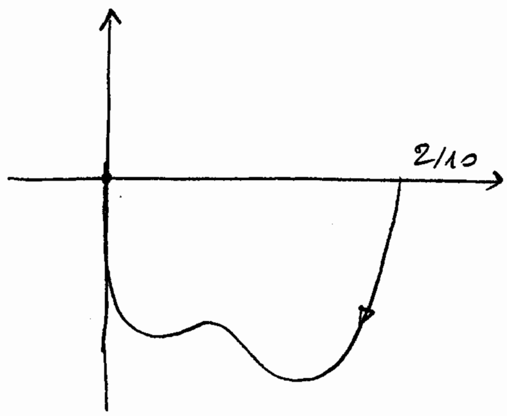
$$\Rightarrow \mathrm{Re}\,F(j\omega_0) < 0 \quad \text{assurdo} \quad \square$$

Diagramma di Nyquist

Il risultato precedente suggerisce un metodo di verifica della positività reale basato sul diagramma di Nyquist.
Supponiamo di avere una $F(s)$ con poli in $Re\, s<0$.
Allora in questo caso la verifica che $F(s)$ è PR consiste nel verificare che vale la ii).
Il fatto che $Re\, F(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega$ corrisponde ad avere il diagramma di Nyquist contenuto nel semipiano $Re\, s \geq 0$.

Esempio

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+10)}$$



Se $F(s)$ ha dei poli sull'asse immaginario, allora l'ulteriore condizione iii) che richiede che tali poli siano semplici e con residuo reale positivo possono essere tradotti nella condizione che anche la chiusura dei rami che tendono all'infinito deve essere contenuta nel semipiano $Re\, s > 0$.

Infatti sia $j\omega_0$ un polo di $F(s)$. Allora nell'intorno di $j\omega_0$ la $F(s)$ può essere così approssimata

$$F(s) = \frac{A}{(s - j\omega_0)^{\nu}}$$

ν molteplicità

A residuo

Se $s = j\omega_0 + \varepsilon e^{j\varphi}$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, allora

$$F(s) \simeq \frac{A}{\varepsilon^{\nu}} e^{-j\nu\varphi_0}$$

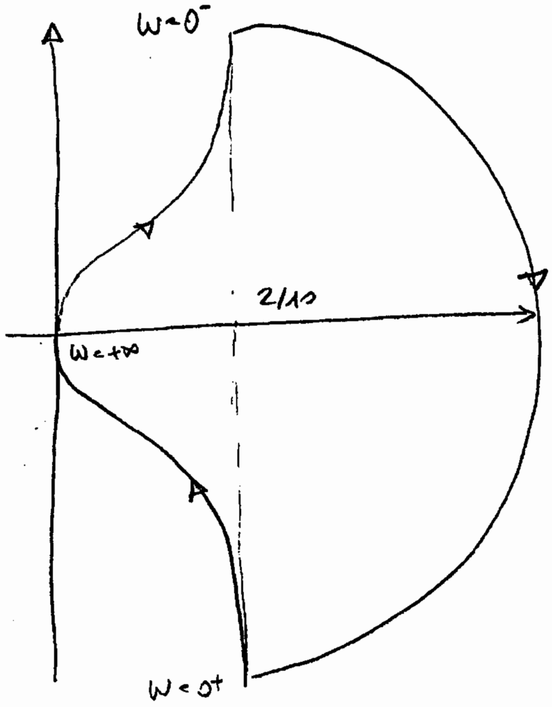
Si tratta di un cerchio di raggio $\frac{|A|}{\varepsilon^{\nu}}$ percorso con un angolo di $\nu\pi$. Si osservi che

A reale > 0, $\nu = 1$ $\iff$ $\mathrm{Re}\, F(s) \ge 0$ $\iff$ Chiusura del diagr. Nyquist appartiene al semipiano $\mathrm{Re}\, s \ge 0$

Esempio

$$F(s) = \underbrace{\frac{1}{s}}_{PR} + \underbrace{\frac{s+2}{(s+1)(s+10)}}_{PR} \quad \text{è PR}$$

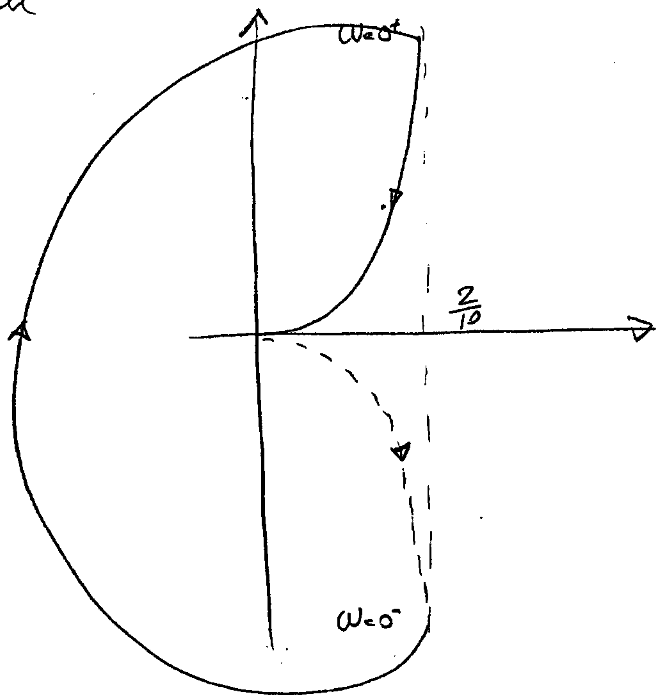
$$= \frac{2s^2 + 13s + 10}{s(s+1)(s+10)}$$



Esempio

$$F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{s+2}{(s+1)(s+10)} = \frac{-9s-10}{s(s+1)(s+10)}$$

non è positivo reale perché il polo nell'origine ha residuo -1.



Esempi

$$F(s) = \frac{2s^2+13s+10}{s(s+1)(s+10)}$$ dobbiamo però verificare che è PR

Utilizziamo ora il teorema precedente

1) $\mathrm{Re}\, F(j\omega) \geq 0$ corrisponde ad avere il diagr. Nyquist a destra dell'asse immaginario, cosa già verificata

11) $a(s)+b(s) = s^3+11s^2+10s+2s^2+13s+10 = s^3+13s^2+23s+10$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{cc} 1 & 23 \\ 13 & 10 \\ \frac{289}{13} & \\ 10 & \end{array}$$

$a(s)+b(s)$ è di Hurwitz $\Rightarrow F(s)$ è PR

$$F(s) = \frac{-9s-10}{s(s+1)(s+10)}$$

1) è verificata attraverso il diagr. di Nyquist

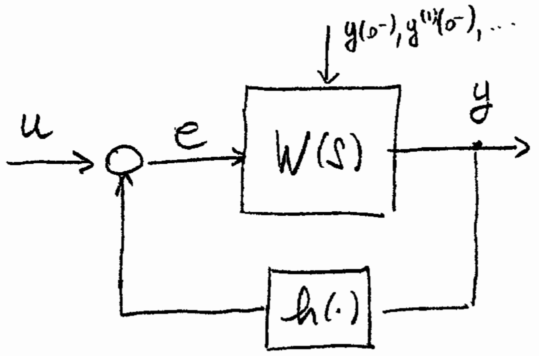
11) $a(s)+b(s) = s^3+11s^2+10s-9s-10 = s^3+11s^2+s-10$

non è di Hurwitz.

Quindi $F(s)$ non è PR

CRITERIO DEL CERCHIO

Si consideri il sistema



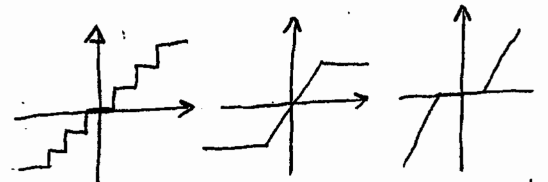
(*)

$h(\cdot)$ funzione statica non lineare $h(0)=0$

Vogliamo studiare la stabilità di tale sistema rispetto alle condizioni iniziali presenti nel sistema con funzione di trasferimento $W(s)$. Si tratta quindi di trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} \sum a_k y^{(k)} = \sum b_k e^{(k)} \\ e = u - h(y) \end{cases}$$

Esempi



Quantizzatore Saturazione Zona morta

$$\sum a_k y^{(k)} = \sum b_k u^{(k)} - \sum b_k \left(h(y)\right)^{(k)}$$

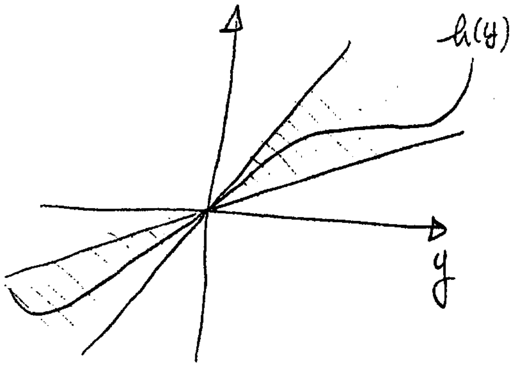
con $u=0$ e condizioni iniziali $y(0^-), y^{(1)}(0^-), \dots$

$$\sum a_k y^{(k)} + \sum b_k \left(h(y)\right)^{(k)} = 0 \qquad (**)$$

Si vuole determinare sotto quali condizioni su $W(s)$ e $h(\cdot)$ abbiamo che per ogni condizione iniziale $y(0^-), y^{(1)}(0^-), \dots$ la soluzione $y(t)$ converge a zero per $t \to \infty$.

Congettura di Aizerman (1949)

Supponiamo che



Il sistema (*) è asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali se

$$h(y)=Ky \quad \forall K \text{ tali che } K_1 \leq K \leq K_2$$

$$\Downarrow ?$$

(*) è asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali per ogni $h(\cdot)$ tale che

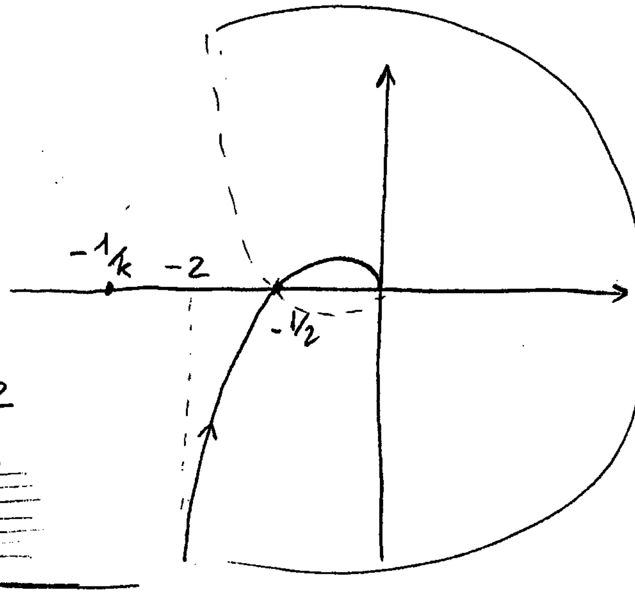
$$K_1 < \frac{h(y)}{y} < K_2 \quad \text{e} \quad h(0)=0$$

Questa congettura fu dimostrata essere falsa.

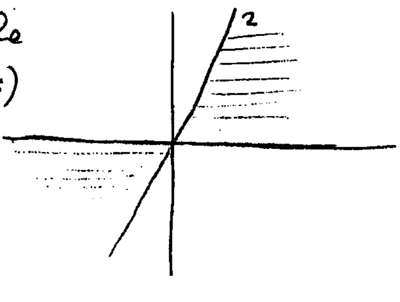
Esempio

$$W(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}$$

Per il criterio di Nyquist il sistema (*) è as. stabile per $\forall K$ tali che $0<k<2$



Se valesse valesse la cong. di Aizerman (*) sarebbe as. stabile per ogni $h(\cdot)$ compreso nel settore in figura



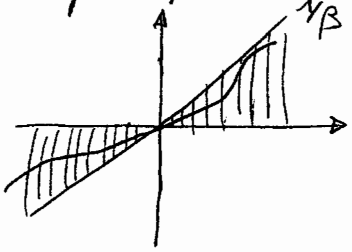
Teorema

Se $W(s)$ è tale che

$$W(s)+\beta \text{ è PR}$$

per un certo $\beta>0$, allora il sistema (*) è asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali per ogni $h(\cdot)$ tale che

$$\begin{cases} h(0)=0 \\ 0<\dfrac{h(y)}{y}<\dfrac{1}{\beta},\ y\neq 0 \end{cases}$$

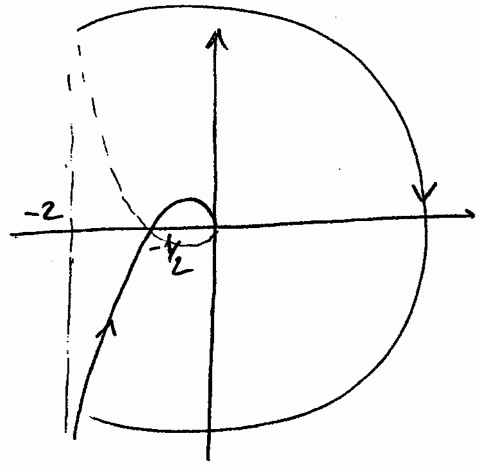


Osservazione

Verificare che $W(s)+\beta$ è PR consiste a verificare che $W(s)$ ha poli in $\mathrm{Re}\, s\leq 0$ e inoltre che il suo diagramma di Nyquist sta a sinistra della retta $\mathrm{Re}\, s=-\beta$.

Esempio

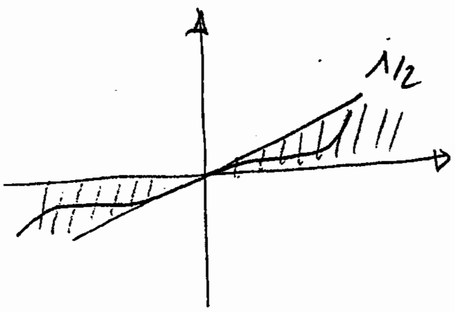
$$W(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}$$



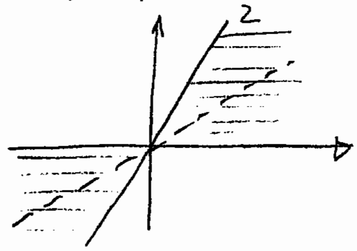
In questo caso si può prendere

$$\beta=2$$

Quindi $h(y)$ può essere compreso in



Si noti che se ci limitiamo a $h(y)$ lineari, allora per il criterio di Nyquist $h(y)$ può essere compreso in



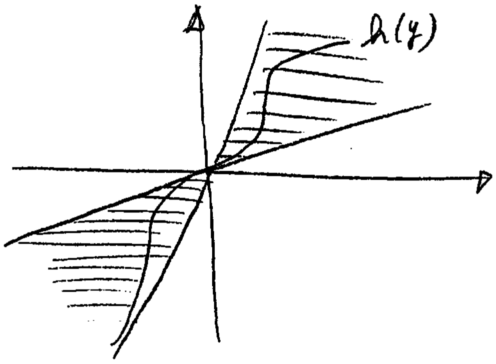
Teorema

Se $W(s)$ è tale che

$$F(s) \triangleq \frac{1+k_2 W(s)}{1+k_1 W(s)} \quad \text{è PR}$$

per $0 \leq K_1 < K_2$, allora il sistema (*) è asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali per ogni $h(\cdot)$ tali che

$$\begin{cases} h(0)=0 \\ K_1 < \dfrac{h(y)}{y} < K_2 \quad y \neq 0 \end{cases}$$

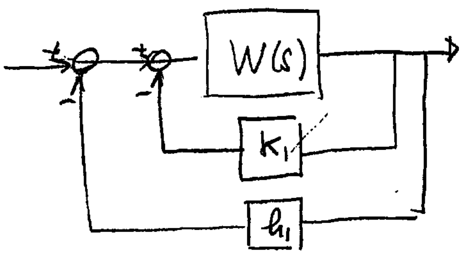


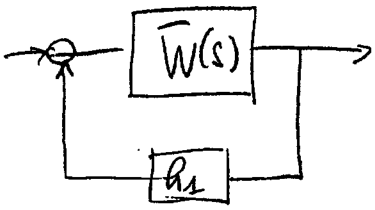
Dim

Definiamo $h_1(y) \triangleq h(y) - K_1 y$

Allora $h_1(0)=0$, $0 \leq \dfrac{h_1(y)}{y} \leq K_2 - K_1 \quad \forall y \neq 0$ e $h(y) = K_1 y + h_1(y)$

Quindi il sistema (*) può essere riscritto come





$$\bar{W}(s) = \frac{W(s)}{1+K_1 W(s)}$$

Il sistema è as. stabile

$$\Updownarrow$$

$$\bar{W}(s) + \frac{1}{K_2 - K_1} \quad \text{è PR}$$

$$\frac{W(s)}{1+K_1 W(s)} + \frac{1}{K_2-K_1} = \frac{K_2 W(s) - \cancel{K_1 W(s)} + 1 + \cancel{K_1 W(s)}}{(K_2-K_1)(1+K_1 W(s))} = \frac{1}{K_2-K_1} \, \frac{1+K_2 W(s)}{1+K_1 W(s)}$$

che è PR

Verifica del Criterio del Cerchio attraverso il diagramma di Nyquist

Poniamo
$$x_1 = \mathrm{Re}\, W(j\omega)$$
$$x_2 = \mathrm{Im}\, W(j\omega)$$

$$\mathrm{Re}\, F(j\omega) = \frac{1+k_2 W(j\omega)}{1+k_1 W(j\omega)} = \mathrm{Re}\, \frac{1+k_2(x_1+jx_2)}{1+k_1(x_1+jx_2)} =$$

$$= \mathrm{Re}\, \frac{[(1+k_2x_1)+jk_2x_2][(1+k_1x_1)-jk_1x_2]}{(1+k_1x_1)^2+k_1^2x_2^2}$$

$$= \frac{(1+k_2x_1)(1+k_1x_1)+k_1k_2x_2^2}{(1+k_1x_1)^2+k_1x_2^2} \geq 0$$

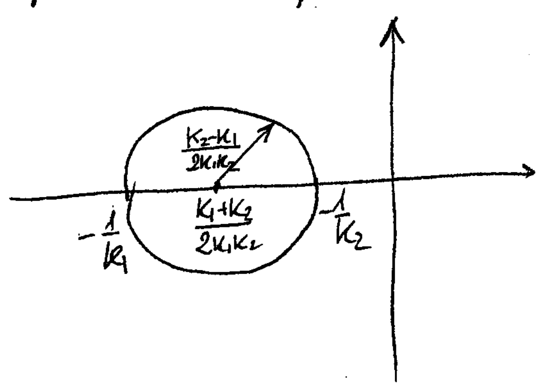
$$(1+k_2x_1)(1+k_1x_1)+k_1k_2x_2^2 \geq 0$$

$$x_1^2+x_2^2+\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}x_1+\frac{1}{k_1k_2} \geq 0$$

$$\left(x_1+\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\right)^2+x_2^2 \geq \left(\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2}\right)^2-\frac{1}{k_1k_2} = \left(\frac{k_1-k_2}{2k_1k_2}\right)^2$$

Questa condizione equivale a richiedere che il punto $(x_1,x_2) = (\mathrm{Re}\, W(j\omega), \mathrm{Im}\, W(j\omega))$ stia fuori dal cerchio di centro $\left(-\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}, 0\right)$ e raggio $\frac{k_1-k_2}{2k_1k_2}$ e ciò corrisponde ad avere il diagramma di Nyquist di $W(s)$ che sta fuori da tale cerchio.

Si noti che tale cerchio passa per i punti $-\frac{1}{k_1}$ e $-\frac{1}{k_2}$ dell'asse reale.



Abbiamo verificato che

$\mathrm{Re}\, F(j\omega) \geq 0 \quad \forall j\omega$ che non sono poli di $F(s)$ $\iff$ il diagramma di Nyquist di $W(s)$ non passa attraverso il cerchio che passa per i punti $-\frac{1}{K_2}, -\frac{1}{K_1}$.

Per dimostrare che $F(s)$ è PR è sufficiente mostrare che $\boxed{P(s) \triangleq \left[\text{numeratore di } F(s)\right] + \left[\text{denominatore } F(s)\right] \text{ è Hurwitz}}$

Sia $W(s) = \dfrac{b(s)}{a(s)}$ con $b(s), a(s)$ coprimi. Allora

$$F(s) = \frac{a(s)+K_2\, b(s)}{a(s)+K_1\, b(s)}$$

Si osservi che numeratore e denominatore di $F(s)$ sono coprimi. Infatti se fosse s_0 zero comune, allora avrei

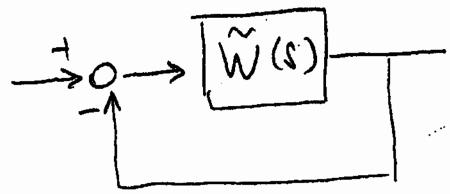
$$\begin{cases} a(s_0)+K_2\, b(s_0)=0 \\ a(s_0)+K_1\, b(s_0)=0 \end{cases} \Rightarrow (K_2-K_1)\, b(s_0)=0 \Rightarrow b(s_0)=0 \Rightarrow a(s_0)=0$$

e $a(s), b(s)$ non sarebbero coprimi

Si osservi che

$$P(z) = 2a(s)+(K_1+K_2)\, b(s)$$

e si osservi inoltre che tale polinomio è denominatore del sistema in retroazione unitaria

(*) 

dove $\tilde{W}(s) = \dfrac{K_1+K_2}{2}\, W(s)$

Infatti

$$\tilde{T}(s) = \frac{\tilde{W}(s)}{1+\tilde{W}(s)} = \frac{(K_1+K_2)\, W(s)}{2+(K+K_2)\, W(s)}$$

$$= \frac{(K_1+K_2)\, W(s)}{2a(s)+(K_1+K_2)\, b(s)}$$

Possiamo concludere che

$P(s) = 2a(s) + (K_1+K_2)\,b(s)$ è Hurwitz

$$\Updownarrow$$

il sistema (*) è BIBO stabile

$$\Updownarrow \qquad\qquad Z = P - N$$

Per il criterio di Nyquist, il diagramma di Nyquist di $W(s)$ fa $N = P$ giri antiorari attorno al punto critico $-\dfrac{2}{K_1+K_2}$, dove P è il n° di poli instabili di $W(s)$

Si noti che il punto critico $-\dfrac{2}{K_1+K_2}$ è contenuto nel cerchio critico passante per $-\dfrac{1}{K_2}$ e $-\dfrac{1}{K_1}$.

Possiamo quindi concludere che

$F(s)$ PR $\iff$ il diagramma di Nyquist di $W(s)$ non attraversa il cerchio passante per i punti $-\dfrac{1}{K_2}$ e $-\dfrac{1}{K_1}$ e inoltre tale diagramma fa $N = P$ giri antiorari attorno a tale cerchio, dove P è il n° di poli instabili di $W(s)$.

Osservazioni

1) Se $K_1 = 0$, allora il cerchio critico diventa in un semipiano (cerchio di raggio ∞) passante per il punto $-\frac{1}{K_2}$. Questo caso corrisponde al primo teorema coinvolto in questa parte dedicata al criterio del cerchio

2) Se $K_1 = K_2 = K$ allora il cerchio diventa in un punto e l'unica $h(y)$ che soddisfa le ipotesi del teorema è $h(y) = Ky$ lineare e la verifica proposta coincide esattamente col criterio di Nyquist. È quindi possibile interpretare il criterio del cerchio come una generalizzazione del criterio di Nyquist nel quale il punto critico $-\frac{1}{K}$ si espande a un cerchio.
Questo fatto dà una interpretazione precisa dell'idea secondo la quale la distanza del punto critico $-\frac{1}{K}$ dal diagramma di Nyquist dà una misura di robustezza rispetto a perturbazioni non lineari.