Lezione 1 (Martedì 1 ottobre, 16:30–18:15)

1.1 Informazioni generali

Presentazione del corso, aspetti organizzativi e contenuti.

1.2 Richiami sui numeri complessi – parte I

Il corso di Segnali e Sistemi presuppone la perfetta padronanza dei numeri complessi. Queste note non sostituiscono un testo di Analisi Matematica, al quale il lettore è rinviato per una presentazione sistematica.

Un numero complesso a è determinato da due numeri reali α e β, la parte reale e la parte immaginaria rispettivamente. Solitamente si scrive

$$a = \alpha + j\beta$$

dove j è l'unità immaginaria per cui vale

$$j^2 = -1$$

In Matematica la notazione usuale è $z = x + iy$, ma in Elettrotecnica i si è compromessa con la *corrente elettrica* e in Segnali e Sistemi anche x, y e z sono già impegnate.
La parte reale e quella immaginaria si denotano

$$\alpha = \mathrm{Re}\, a, \qquad \beta = \mathrm{Im}\, a$$

L'insieme dei complessi si denota $\mathbb{C}$. Il sottoinsieme dei complessi a parte immaginaria nulla si identifica con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. I complessi a parte reale nulla si dicono numeri immaginari o numeri immaginari puri.

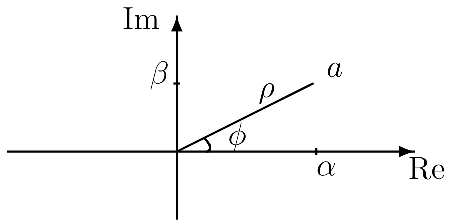
Attenzione!

(a.) La parte immaginaria di $a = \alpha + j\beta$ è β (un numero reale), non $j\beta$.

(b.) L'insieme $\mathbb{C}$ *non è* ordinato: non hanno alcun senso le scritture $a < b$ o $a > b$ tra numeri complessi. Hanno invece senso scritture del tipo $\mathrm{Re}\, a > \mathrm{Im}\, b$ o $\mathrm{Im}\, a > \mathrm{Im}\, b$ ecc. essendo, queste, relazioni tra numeri reali.

1.3 Rappresentazioni cartesiana e polare

Poichè un numero complesso è specificato da due numeri reali è naturale identificare $a = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ con la sua rappresentazione cartesiana $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.



Il piano diventa allora una rappresentazione di $\mathbb{C}$, l'asse delle ascisse si dice asse reale e quello delle ordinate asse immaginario. Nel piano i punti si possono specificare assegnando le coordinate polari (ρ, ϕ), dove $\rho > 0$ è il modulo e $\phi \in \mathbb{R}$ la fase o argomento. La fase è inerentemente non unica: punti con lo stesso modulo e fasi che differiscono per multipli di 2π coincidono. Quando è necessario avere una determinazione univoca della fase si prende usualmente $\phi \in (-\pi, \pi]$, o in alcuni casi $\phi \in [0, 2\pi)$.

Dato il numero complesso
$$a = \alpha + j\beta,$$
la trigonometria fornisce
$$\alpha = \rho \cos \phi, \qquad \beta = \rho \sin \phi,$$
quindi, nota la rappresentazione polare (ρ, ϕ) di un punto sul piano $\mathbb{C}$ il passaggio alla rappresentazione cartesiana (α, β) è univoco ed immediato.

Il passaggio dalla rappresentazione cartesiana a quella polare richiede maggiore attenzione. Si ricorda che mentre il modulo è univocamente determinato, l'argomento è determinato a meno di multipli di 2π (tranne che nell'origine dove è indeterminato). Noti (α, β) la trigonometria fornisce

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$
$$\phi = \begin{cases} \arctan \frac{\beta}{\alpha} & \alpha > 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \alpha = 0,\ \beta > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \alpha = 0, \beta < 0 \\ \arctan \frac{\beta}{\alpha} + \pi & \alpha < 0,\ \beta > 0 \\ \arctan \frac{\beta}{\alpha} - \pi & \alpha < 0,\ \beta < 0 \\ \pi & \alpha < 0,\ \beta = 0 \end{cases}$$

Non serve memorizzare queste formule: in pratica basta calcolare $\arctan \frac{\beta}{\alpha}$ e aggiustare l'angolo in base al quadrante in cui si trova a. Fare gli esercizi!

Notazioni. Si denota $|a| = \rho$ il modulo di a e con una delle notazioni $\arg a = \angle a = \phi$ l'argomento.

1.4 Aritmetica in $\mathbb{C}$

Richiamiamo le operazioni aritmetiche in $\mathbb{C}$. Siano $a = \alpha + j\beta$ e $b = \gamma + j\delta$.

Somma

$$a + b := (\alpha + \gamma) + j(\beta + \delta)$$

La somma è associativa, commutativa, ha elemento neutro $0 = 0 + j0$ La rappresentazione cartesiana consente di dare un'interpretazione geometrica alla somma di numeri complessi (disegnare una figura!).

Prodotto

$$ab := (\alpha\gamma - \beta\delta) + j(\alpha\delta + \beta\gamma)$$

Il prodotto è associativo, commutativo, distributivo rispetto alla somma, con elemento neutro $1 = 1 + j0$.
Si osservi che per il calcolo del prodotto non è necessario memorizzare la precedente formula: è sufficiente applicare le usuali regole dell'algebra reale e la regola $j^2 = -1$ per ottenere

$$ab = (\alpha + j\beta)(\gamma + j\delta) = (\alpha\gamma + \alpha\, j\delta + j\beta\gamma + j^2\beta\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + j(\alpha\delta + \beta\gamma)$$

Complesso coniugato

$$\overline{a} := \alpha - j\beta$$

una notazione alternativa per il coniugato è a^*. Si osservi che (dimostrarlo!)

$$\begin{aligned} \overline{a+b} &= \overline{a} + \overline{b} \\ \overline{ab} &= \overline{a}\,\overline{b} \end{aligned}$$

Alcune utili espressioni con il coniugato sono le seguenti (dimostrarle!)

$$\begin{aligned} \frac{a+\overline{a}}{2} &= \operatorname{Re} a \\ \frac{a-\overline{a}}{2i} &= \operatorname{Im} a \\ a\,\overline{a} &= (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 = \rho^2 \end{aligned}$$

L'ultima di queste formule è utilissima per esprimere l'inverso di un numero complesso ed il quoziente di due numeri complessi.

Attenzione! Se $a \in \mathbb{R}$ allora $a^2 = |a|^2$ mentre se $a \in \mathbb{C}$

$$a^2 = (\alpha + j\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + j\,2\alpha\beta, \qquad |a|^2 = a\overline{a} = \alpha^2 + \beta^2,$$

quindi $a^2 \neq |a|^2$ se $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Inverso moltiplicativo

$$\text{Se } a \neq 0 \qquad \frac{1}{a} = \frac{\overline{a}}{a\,\overline{a}} = \frac{\alpha - j\beta}{(\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - j\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Basta moltiplicare numeratore e denominatore per $\overline{a}$ e svolgere i calcoli. In particolare vale

$$\frac{1}{j} = -j$$

Quoziente

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta} = \frac{(\alpha + j\beta)(\gamma - j\delta)}{(\gamma + j\delta)(\gamma - j\delta)} &= \\ &= \frac{(\alpha + j\beta)(\gamma - j\delta)}{\gamma^2 + \delta^2} \\ &= \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + j\,\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} \end{aligned}$$

Anche in questo caso non è necessario memorizzare la formula per il quoziente: è sufficiente moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore ed eseguire i calcoli.

1.5 Esponenziale complesso

Per ogni $a \in \mathbf{C}$ si definisce

$$e^a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$$

Questa definizione è formalmente identica a quella che si dà nel caso di a reale. Anche nel caso complesso la serie è assolutamente convergente e dunque vale

$$e^{a+b} = e^a\, e^b$$

e quindi per $a = \alpha + j\beta$

$$e^a = e^{\alpha+j\beta} = e^{\alpha} e^{j\beta}$$

Particolare attenzione merita l'esponenziale immaginario puro. Dalla definizione

$$e^{j\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\beta)^k}{k!}$$

e si osservi che le potenze j^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ assumono i valori 1, j, -1, $-j$, 1, $j, \ldots$ ripetendosi periodicamente con periodo 4. Una felice manipolazione fornisce allora

$$e^{j\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\beta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k}}{(2k)!} + j \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Nelle due sommatorie si riconoscono le serie di Taylor della funzione $\cos\beta$ e $\sin\beta$ rispettivamente [1]. Si ricava così la fondamentale *formula di Eulero*

$$e^{j\beta} = \cos\beta + j \sin\beta$$

Da qui è facile ricavare che $|e^{j\beta}| = 1$ ed estendere il risultato a $|e^a| = e^{\mathrm{Re}\, a}$ (dimostrare queste affermazioni!) Dalla periodicità di $\cos\beta$ e $\sin\beta$ si ricava $e^{j\beta} = e^{j(\beta+2k\pi)}$. L'esponenziale immaginario è periodico di periodo 2π !

In particolare per $\beta = \pi$ si ottiene la portentosa

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

Questa formula non è utile per sé, ma contiene la summa della matematica settecentesca, legando tra loro le principali costanti delle varie branche $0, 1, j$ dall'algebra, π dalla geometria, e dall'analisi. Non fermarsi un attimo ad ammirarla sarebbe imperdonabile.

L'esponenziale immaginario è strettamente legato alla rappresentazione polare dei numeri complessi. Basta osservare che per $a \in \mathbb{C}$

$$a = \alpha + j\beta = \rho(\cos\phi + j\sin\phi) = \rho e^{j\phi} = |a| e^{j \arg a}$$

[1] Una funzione che ammette infinite derivate, uniformemente limitate, nell'origine, è sviluppabile in serie di Taylor-MacLaurin $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$. In questo modo si ricava $\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{4!} \ldots$ ed analogamente $\sin\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} \ldots$. In queste due formule si riconoscono i primi termini delle due serie nel testo.

e, per il coniugato,

$$\overline{a} = \alpha - j\beta = \rho(\cos\phi - j\sin\phi) = \rho e^{-j\phi} = |a|e^{-j\arg a}$$

Per dimostrare questa formula si ricorre alle note simmetrie di seno e coseno ($\sin(-\phi) = -\sin\phi,\ \cos(-\phi) = \cos\phi$).
Il prodotto ed il quoziente tra numeri complessi si calcolano molto agevolmente usando la rappresentazione polare.

$$ab = |a||b|e^{j(\arg a + \arg b)}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}e^{j(\arg a - \arg b)}$$

Ovvero $|ab| = |a|\,|b|$ e $\arg a\,b = \arg a + \arg b$.

Abbiamo rivisto la forma cartesiana della somma e le forme cartesiana e polare del prodotto. La forma polare della somma si trova eseguendo brutalmente i calcoli.

1.6 Formule di Eulero

$$\begin{aligned} e^{j\beta} &= \cos\beta + j\sin\beta \\ e^{-j\beta} &= \cos\beta - j\sin\beta \end{aligned}$$

Sommando si ottiene

$$\boxed{\cos\beta = \frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2}}$$

mentre sottraendo

$$\boxed{\sin\beta = \frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j}}$$

Applicazioni

Dimostrazione delle formule di addizione.

$$\begin{aligned} \cos(\phi + \theta) &= \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \\ \sin(\phi + \theta) &= \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta \end{aligned}$$

La dimostrazione è semplicissima scrivendo

$$e^{j(\phi+\theta)} = \cos(\phi + \theta) + j\sin(\phi + \theta)$$

ed osservando che

$$\begin{aligned} e^{j(\phi+\theta)} &= e^{j\phi}e^{j\theta} \\ &= (\cos\phi + j\sin\phi)(\cos\theta + j\sin\theta) \\ &= (\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta) + j(\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta) \end{aligned}$$

Uguagliando parti reali ed immaginarie si ottengono le formule di addizione

Dimostrazione delle formule di prostaferesi.

$$\sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$$

$$\cos\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\cos(\theta-\phi) + \frac{1}{2}\cos(\theta+\phi)$$
$$\cos\theta\sin\phi = \frac{1}{2}\sin(\theta+\phi) - \frac{1}{2}\sin(\theta-\phi)$$

Per la dimostrazione basta riscrivere il membro di sinistra impiegando l'espressione esponenziale per le funzioni sin e cos.

Formule per le potenze di $\sin\theta$ *e di* $\cos\theta$. Ad esempio

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= \left(\frac{e^{j\,\theta} - e^{-j\,\theta}}{2j}\right)^2 \\ &= \frac{e^{j\,2\theta} + e^{-j\,2\theta} - 2}{-4} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\end{aligned}$$

Questa formula si poteva ricavare per via elementare. Provare ora con $\sin^3\theta$!

1.7 Radici n-esime di numeri complessi

Storicamente la motivazione all'introduzione dei numeri complessi è venuta dall'algebra. L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ estende $\mathbb{R}$ in modo tale che l'equazione algebrica di grado n

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_{n-1}x + a_n = 0$$

ha esattamente n soluzioni in $\mathbb{C}$ (contando le molteplicità). Questo risultato notevolissimo è il cosidetto teorema fondamentale dell'algebra, la cui dimostrazione però esula dall'algebra e richiede risultati di analisi complessa. Il caso particolare dell'equazione

$$x^n - a = 0, \qquad a \in \mathbb{C}$$

è di particolare interesse in Segnali e Sistemi. Le n soluzioni di quest'equazione sono (naturalmente) dette radici n-esime del numero complesso a.

Sia $a = \rho e^{j\phi}$. L'equazione $x^n = a$ si può riscrivere come

$$x^n = |x|^n e^{j\,n\arg x} = a = \rho\, e^{j\phi} = \rho\, e^{j(\phi+2\pi k)}, \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

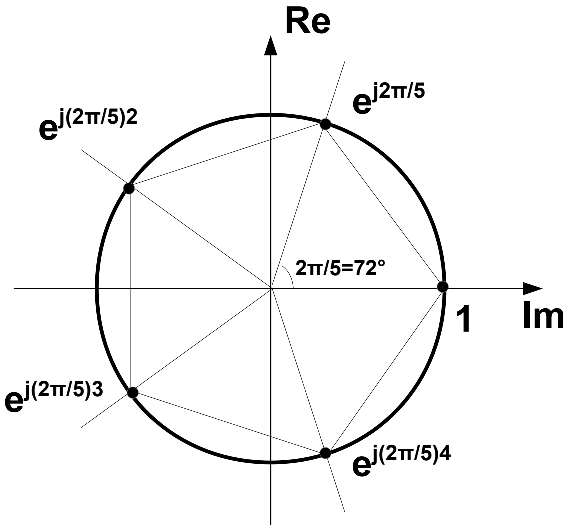
Ricordando la regola per il calcolo del prodotto in forma polare è immediato che, per ogni soluzione x dell'equazione $x^n = a$, vale

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[n]{a} = \left(\rho e^{j(\phi+2\pi k)}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \sqrt[n]{\rho}\, e^{j\,\frac{\phi+2\pi k}{n}} \\ &= \sqrt[n]{\rho}\, e^{j\frac{\phi}{n}}\, e^{j\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\end{aligned}$$

In particolare per $a = 1 = 1e^{j0}$ si ha $\rho = 1$ e $\phi = 0$, quindi le n radici dell'unità sono

$$\sqrt[n]{1} = e^{j\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Il grafico qui sotto illustra la posizione delle radici quinte dell'unità. In generale le radici n-esime si trovano sui vertici del poligono regolare di n lati iscritto nel cerchio unitario con un vertice nel punto 1.



aggiungere esercizi

aggiungere esercizi

aggiungere esercizi

aggiungere esercizi

aggiungere esercizi

aggiungere esercizi

aggiungere esercizi