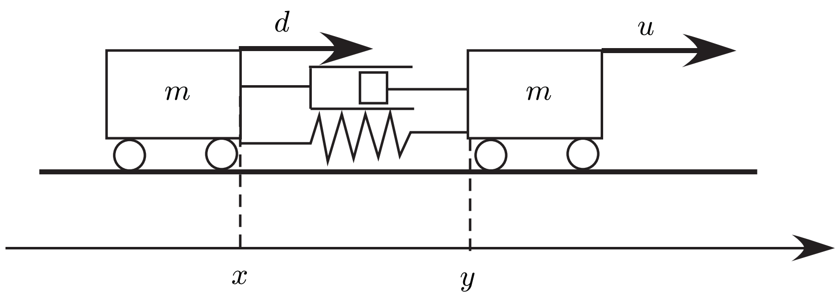
Corso di laurea in Ingegneria Biomedica e Elettronica - Appello di Fondamenti di Automatica del 27/9/2012

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

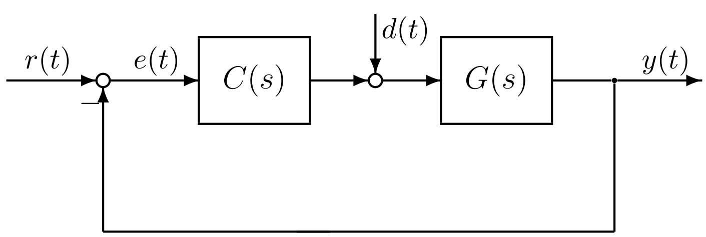
Esercizio 1. (8 punti) Si consideri il seguente sistema meccanico



Si tratta di due carrelli di massa m collegati tra loro da una molla ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo ℓ e da uno smorzatore ideale con costante di attrito viscoso b. Sui due carrelli agiscono le due forze u (ingresso di controllo) e d (ingresso di disturbo).

1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Supponiamo che $u(t), d(t)$ siano nulle. Determinare le corrispondenti evoluzioni di equilibrio $y(t) = \bar{y}, x(t) = \bar{x}$.
3. Siano $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$ e $\tilde{x}(t) := x(t) - \bar{x}$. Determinare le funzioni di trasferimento del sistema dagli ingressi $u(t), d(t)$ all'uscita $y(t)$.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri lo schema della figura seguente



$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{1}{(s-a)(s^2+2s+2)}$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che 0 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario e angoli di uscita dai poli).

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il punto doppio in 0. Determinare i rimanenti punti del luogo in corrispondenza a tale K. Determinare i modi del sistema in corrispondenza di tale K.

Esercizio 3. (6 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2(s + 10)} \,.$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta alla rampa $\simeq 0.1$;
2. margine di fase $m_\phi \geq 40^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 1$.

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{K}{s} \quad G(s) = \frac{1}{s + a}$$

1. Si determini la funzione di trasferimento $T(s)$ dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$.
2. Si determini la funzione sensibilita' di $T(s)$ rispetto al parametro a.
3. Supponiamo che $r(t) = \cos(t)$ e $d(t) = 0$. Si determini valori di $K, a > 0$ sono compatibili con si un'uscita a regime del tipo $y(t) = A\cos(t - \pi/4)$ dove A e' una opportuna costante positiva.

$\boxed{\text{Es. 1}}$

$$\begin{cases} -m\ddot{y} - b(\dot{y}-\dot{x}) - k(y-x-l) + u = 0 \\ -m\ddot{x} - b(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y+l) + d = 0 \end{cases}$$

Equilibrio $\quad y(t) = \bar{y} \quad \dot{y} = \ddot{y} = 0 \quad u(t) = 0 \quad \begin{cases} -k(\bar{y}-\bar{x}-l) = 0 \\ -k(\bar{x}-\bar{y}+l) = 0 \end{cases}$

$\qquad\qquad\quad x(t) = \bar{x} \quad \dot{x} = \ddot{x} = 0 \quad d(t) = 0$

$\Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + l$

Se $\begin{array}{l} \tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x} \\ \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \dot{\tilde{x}} = \dot{x} & \ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} \\ \dot{\tilde{y}} = \dot{y} & \ddot{\tilde{y}} = \ddot{y} \end{array}$

Le equazioni diventano

$$\begin{cases} -m\ddot{\tilde{y}} - b(\dot{\tilde{y}}-\dot{\tilde{x}}) - k(\tilde{y}-\tilde{x}+\cancel{\bar{y}-\bar{x}-l}) + u = 0 \\ -m\ddot{\tilde{x}} - b(\dot{\tilde{x}}-\dot{\tilde{y}}) - k(\tilde{x}-\tilde{y}+\cancel{\bar{x}-\bar{y}+l}) + d = 0 \end{cases}$$

Passando alle Laplace trasformate

$$\begin{cases} (ms^2+bs+k)Y(s) = (bs+k)X(s) + U(s) \\ (ms^2+bs+k)X(s) = (bs+k)Y(s) + D(s) \end{cases} \qquad \boxed{\begin{array}{l} Y(s) = \mathcal{L}(\tilde{y}) \\ X(s) = \mathcal{L}(\tilde{x}) \\ U(s) = \mathcal{L}(u) \\ D(s) = \mathcal{L}(d) \end{array}}$$

$$X = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k} Y + \frac{1}{ms^2+bs+k} D \qquad \text{sostituisco}$$

$$(ms^2+bs+k)Y = \frac{(bs+k)^2}{ms^2+bs+k} Y + \frac{bs+k}{ms^2+bs+k} D + U$$

$$(ms^2+bs+k)^2 Y - (bs+k)^2 Y = (bs+k)D + (ms^2+bs+k)U$$

$$Y = \frac{bs+k}{\underbrace{(ms^2+bs+k)^2-(bs+k)^2}_{\hookrightarrow (ms^2+2bs+2k)ms^2}} D + \frac{ms^2+bs+k}{(ms^2+bs+k)^2-(bs+k)^2} U(s)$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

poli $= a, -1 \pm j$

Luogo di $(s-a)(s^2+2s+2)+k=0$

1) Punti doppi

$$\begin{cases}(s-a)(s^2+2s+2)+k=0\\(s-a)(2s+2)+s^2+2s+2=0\end{cases}$$

$3s^2+s(-2a+4)+2-2a=0$

Sapendo che $s=0$ deve essere soluzione $\Rightarrow 2-2a=0 \Rightarrow a=1$

$3s^2+2s=0$ Quindi l'altro punto doppio è $s=-\frac{2}{3}$

2) <u>Asintoti</u> centro $\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{3} = \frac{-1+\cancel{j}-\cancel{1}-\cancel{j}+\cancel{1}}{3} = -\frac{1}{3}$

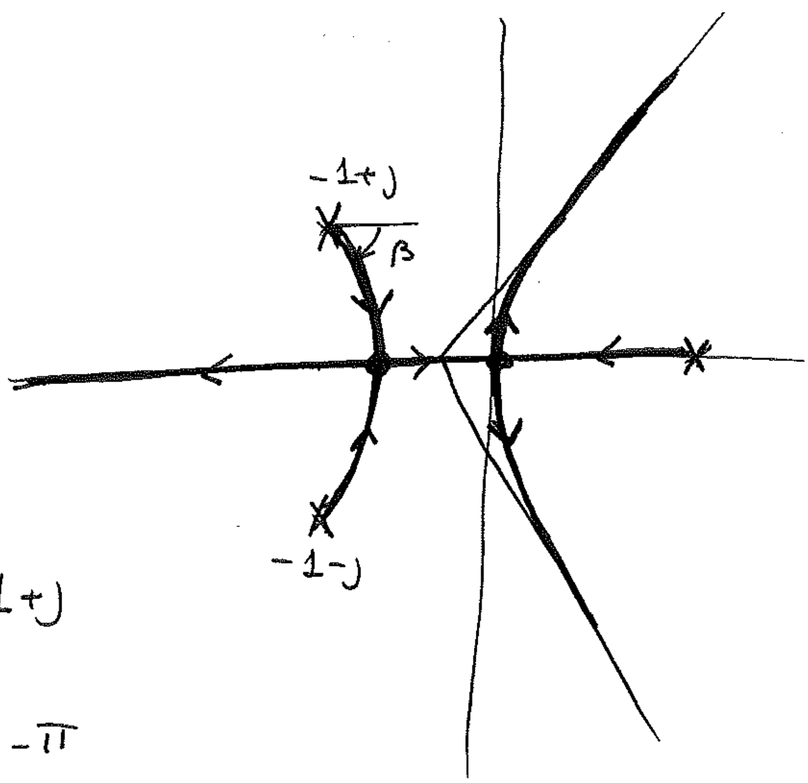
Tabella di Routh

$(s-1)(s^2+2s+2)+k = s^3+s^2+k-2$

3	1	0
2	1	$k-2$
1	$2-k$	
0	$k-2$	

$k>2$ 2 var

$k<2$ 1 var



$k=2$ corrisponde al punto doppio in $s=0$

angolo di uscita a $s=-1+j$

$$-\beta - \angle\left(-1+j-(-1-j)\right) - \angle\left(-1+j-1\right) = -\pi$$

$$-\beta-\frac{\pi}{2}-\text{artg}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \text{artg}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\text{artg}\, 2$$

3) $k=2$ Per tale k si ha che

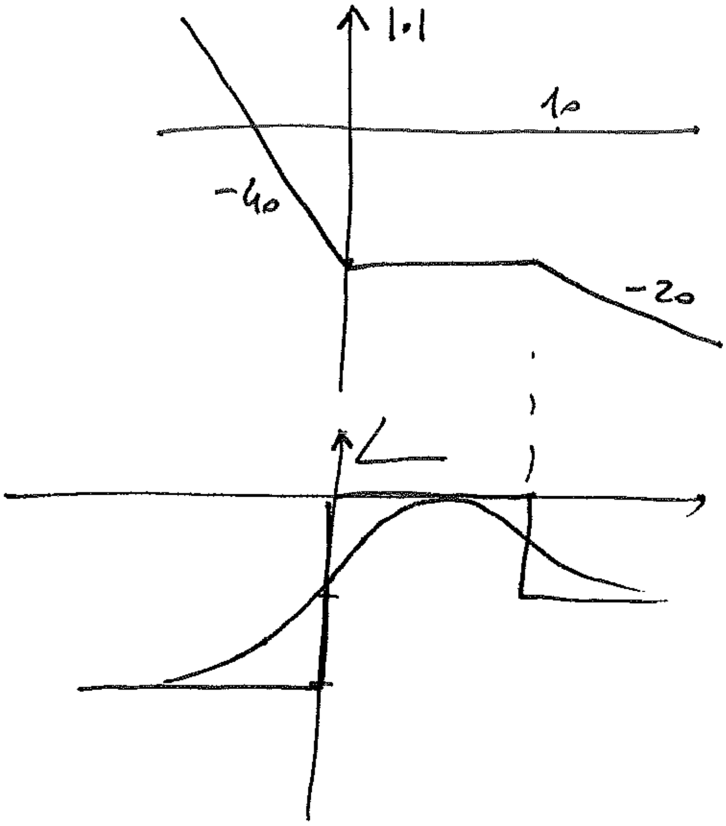
$(s-1)(s^2+2s+2)+2 = s^3+2s^2+2\cancel{s}-s^2-\cancel{2s}-\cancel{2}+\cancel{2} = s^3+s^2$

radici sono $0, 0, -1 \Rightarrow$ modi $1, t, e^{-t}$

Es. 3

1) Bode

$$G(S) = \frac{1}{10} \frac{1+S+S^2}{(1+S/10)S^2}$$



2) Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{1-\omega^2+j\omega}{-\omega^2(10+j\omega)} = \frac{(1-\omega^2+j\omega)(10-j\omega)}{-\omega^2(100+\omega^2)}$$

$$Re = \frac{10-10\omega^2+\omega^2}{-\omega^2(100+\omega^2)} = \frac{10-9\omega^2}{-\omega^2(100+\omega^2)}$$

$Re=0 \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{9}}$

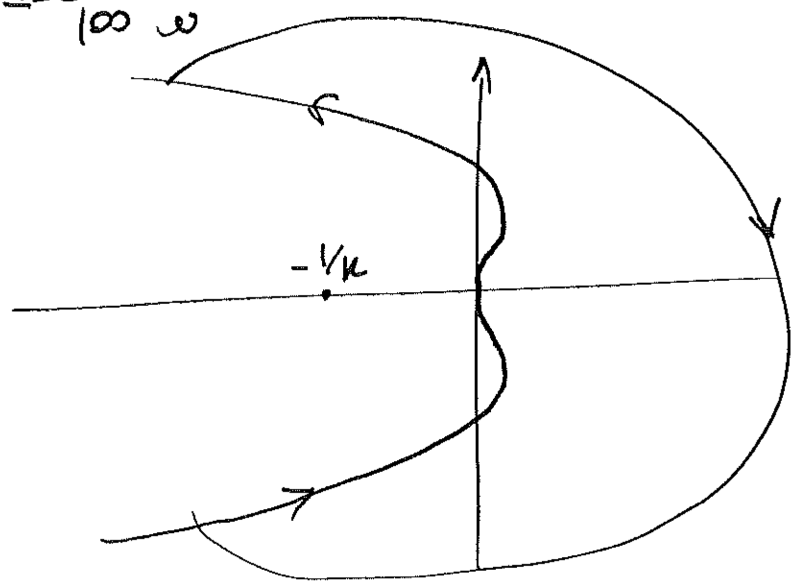
$\Downarrow$

$$Im = \frac{10\omega-\omega+\omega^3}{-\omega^2(100+\omega^2)} = \frac{\omega^2+9}{-\omega(100+\omega^2)}$$

$$Im = \frac{\frac{10}{9}+9}{-\sqrt{\frac{10}{9}}\left(100+\frac{10}{9}\right)} = -\frac{9}{10\sqrt{10}}$$

$\omega \approx 0^+ \quad Re \approx \frac{10}{-100\omega^2} = -\frac{1}{10}\frac{1}{\omega^2}$

$Im \simeq -\frac{9}{100}\frac{1}{\omega}$ andamento parabolico



3) Criterio di Nyquist

$P = 0 \qquad Z = P - N = -N$

per $k > 0 \iff -\frac{1}{k} < 0 \iff N = 0 \iff Z = 0$ stabile

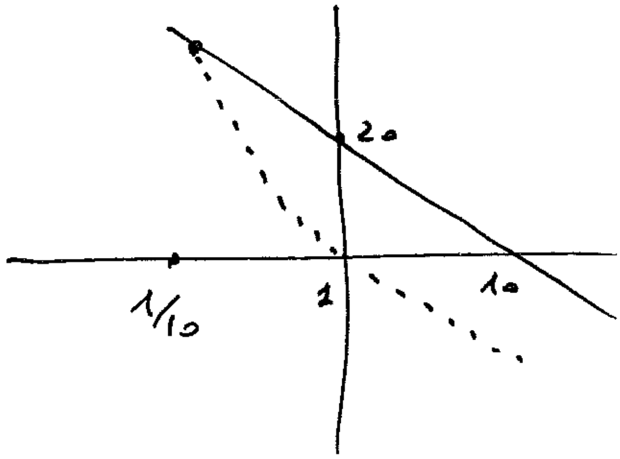
per $k < 0 \iff -\frac{1}{k} > 0 \iff N = -1 \iff Z = 1$ ciclo instabile

$\boxed{\text{ES. 4}}$

errore regime $\simeq \frac{1}{10}$ $\Rightarrow$ guadagno di Bode $\simeq 10$

$C(s) = K_c \bar{C}(s)$ $\qquad K_c = 10$

$\hat{W}(s) = K_c G(s) = \frac{10}{s}$



$\bar{C}(s)$ deve essere una rete ritardatrice

$\bar{C}(s) = \frac{1+s}{1+10s}$ $\Rightarrow$ $C(s) = 10 \, \frac{1+s}{1+10s}$

ES. 5

1)
$$T(s) = \frac{\frac{k}{s}\frac{1}{s+a}}{1+\frac{k}{s}\frac{1}{s+a}} = \frac{k}{s(s+a)+k} = \frac{k}{s^2+as+k}$$

Abbiamo stabilità se e solo se $a>0$ e $k>0$

2)
$$S_a^T(s) = \frac{a}{T(s)}\frac{\partial T}{\partial a} = a\,\frac{\cancel{s^2+as+k}}{\cancel{k}}\,\frac{-\cancel{k}s}{(s^2+as+k)^2} = \frac{-as}{s^2+as+k}$$

3) Se $r(t) = \cos(t)$ allora

$$y(t) = |T(j)|\cos(t+\angle T(j))$$

Da ciò si deduce che $|T(j)| = A$ $\quad \angle T(j) = -\pi/4$

$$\angle T(j) = \underbrace{\angle k}_{=0} - \angle j^2+aj+k = -\angle k-1+aj = -\frac{\pi}{4}$$

$$\angle k-1+ja = \frac{\pi}{4} \Rightarrow k-1 = a$$