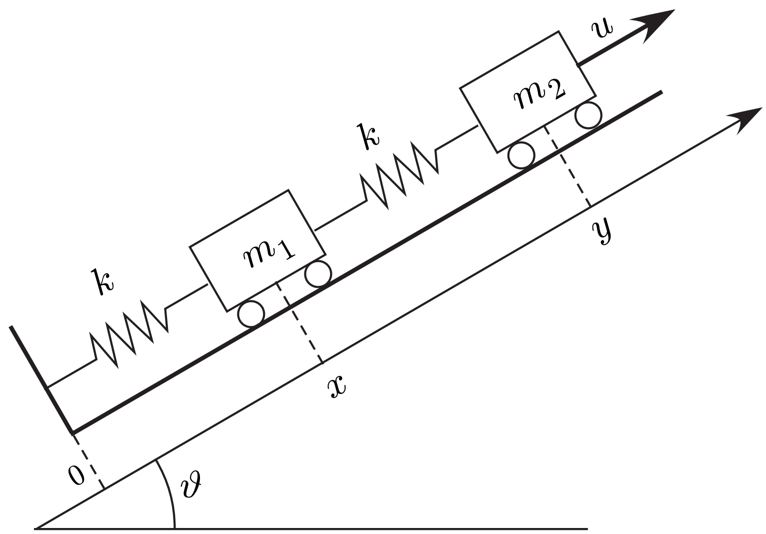
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 30/6/2014

Cognome e nome: ________________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

**Esercizio 1.** Si consideri il seguente sistema meccanico.

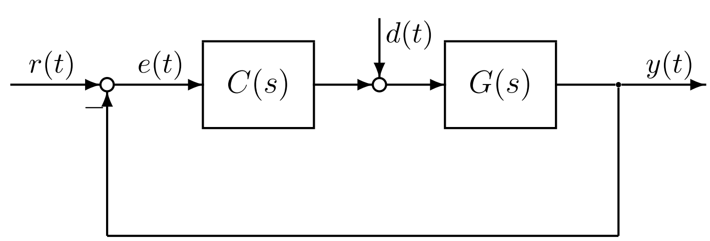



Si tratta di due carrelli che si muovono su di un piano inclinato collegati tra loro da una molla e uno dei due e' collegato a una parete con una molla. Le due molle sono identiche e ideali con costante di elesticita' $k$ e lunghezza a riposo $L$. Su uno dei carrelli agisce una forza $u$.

1. Determinare le equazioni del moto. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$, $x(t) = \bar{x}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$.

2. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

**Esercizio 2.** Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.




dove

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + a}$$

con $a, b > 0$.

1. Determinare le funzioni di trasferimento $T(s)$ dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$. Studiare la stabilita' di $T(s)$ al variare di $K$.

2. Determinare le funzioni sensibilita' di $T(s)$ rispetto alle variazioni dei parametri $a$.

3. Suponiamo che $a = 9$. Calcolare l'andamento a regime di $y(t)$ in funzione di $K$ sapendo che $d(t) = \sin(3t)$ e $r(t) = 10$.

**Esercizio 3** Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente. Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+b}{(s+3)(s+6)}$$

dove $b > 0$. Si consideri il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$.

1. Determinare $b$ sapendo che $-2$ è punto doppio del luogo.
2. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$ sapendo che il luogo contiene un unico punto doppio.
3. Determinare i modi del sistema in catena chiusa per il valore di $K$ che corrisponde al punto doppio del luogo.

**Esercizio 4.** Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{(1-s)^2}{s(s+1)}$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale $K$ (negativo e positivo);

**Esercizio 5.** (5 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{2}{s}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta alla rampa parabolica = 0.1;
2. margine di fase $m_\phi$ circa $45^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A$ circa 1.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

Equazioni del moto

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x} + k(x-0-L) + k(y-x-L) - m_1 g \sin\theta = 0 \\ -m_2\ddot{y} \qquad\qquad\qquad -k(y-x-L) - m_2 g \sin\theta + u = 0 \end{cases}$$

$y(t) = \bar{y}$ , $x(t) = \bar{x}$ $\Rightarrow$ $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ $\quad \dot{y} = \ddot{y} = 0$ Sostituendo

$$\begin{cases} -\cancel{k}(\bar{x}-L) + k(\bar{y}-\bar{x}-L) - m_1 g \sin\theta = 0 \\ \qquad\qquad -k(\bar{y}-\bar{x}-L) - m_2 g \sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k(\bar{x}-L) - (m_1+m_2) g \sin\theta = 0 \\ -k(\bar{y}-\bar{x}-L) - m_2 g \sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = L - \frac{(m_1+m_2) g \sin\theta}{k}$$

$$\bar{y} = 2L - \frac{(m_1+2m_2) g \sin\theta}{k}$$

Sia $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \bar{x}$ $\quad \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}$

Allora $\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$ $\quad \ddot{\tilde{y}} = \ddot{y}$ . Sostituendo si ottiene

$$\begin{cases} -m_1\ddot{\tilde{x}} - k\tilde{x} + k(\tilde{y}-\tilde{x}) = 0 \\ -m_2\ddot{\tilde{y}} - k(\tilde{y}-\tilde{x}) + u = 0 \end{cases}$$

Passiamo alle trasformate di Laplace

$Y(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}]$ $\quad X(s) = \mathcal{L}[\tilde{x}]$ $\quad U(s) = \mathcal{L}[u]$

$$\begin{cases} -m_1 s^2 X(s) - kX(s) + k(Y(s) - X(s)) = 0 \\ -m_2 s^2 Y(s) - k(Y(s) - X(s)) + U(s) = 0 \end{cases}$$

Eliminando la variabile $X(s)$ $\Rightarrow$ $kY(s) = (m_1 s^2 + 2k)X(s)$

$$X(s) = \frac{k}{m_1 s^2 + 2k} Y(s)$$

Si ottiene

$$(m_2 s^2 + k)Y(s) = U(s) + kX(s) = U(s) + \frac{k^2}{m_1 s^2 + 2k} Y(s)$$

$\left[m_2 s^2 + k - \frac{k^2}{m_1 s^2 + 2k}\right] Y(s) = U(s)$ Quindi la funzione di trasferimento

$$Y(s)/U(s) = \frac{1}{m_2 s^2 + k - \frac{k^2}{m_1 s^2 + 2k}} = \frac{m_1 s^2 + 2k}{(m_2 s^2 + k)(m_1 s^2 + 2k) - k^2}$$

$$\boxed{ES.2}$$

1) $T(s) = \dfrac{C(s)\,G(s)}{1+C(s)G(s)} = \dfrac{k}{s(s^2+2s+a)+k} = \dfrac{k}{s^3+2s^2+as+k}$

Stabilità → Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & k \\ 1 & \frac{2a-k}{2} & \\ 0 & k & \end{array} \qquad \boxed{0<k<2a}$$

2) $S_a^T = \dfrac{a}{T}\dfrac{\partial T}{\partial a}$

$= a \dfrac{\cancel{s(s^2+2s+a)+k}}{\cancel{k}} \dfrac{-\cancel{k}s}{[s(s^2+2s+a)+k]^{\cancel{2}}} = \dfrac{-as}{s(s^2+2s+a)+k}$

3) $T_{dy}(s) = \dfrac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \dfrac{s}{s(s^2+2s+9)+k}$ $\qquad a=9 \quad \boxed{0<k<18}$

Sovrapposizione degli effetti:

- $r(t)=10 \quad d(t)=0 \qquad R(s)=\dfrac{10}{s}$

$Y(s) = T(s)\,R(s) = \dfrac{k}{s(s^2+2s+9)+k}\dfrac{10}{s}$

$y(t) \simeq T(0)\,10 = \dfrac{k}{k}\,10 = 10$

- $r(t)=0 \quad d(t)=\sin(3t)$

$y(t) \simeq |T_{dy}(3j)| \sin(3t + \angle T_{dy}(3j))$

$T_{dy}(3j) = \dfrac{3j}{3j(\cancel{-9}+6j\cancel{+9})+k} = \dfrac{3j}{k-18} = -\dfrac{3j}{18-k}$

Nota che $18-k>0$ per $k$ stabilizzanti

$|T_{dy}(3j)| = \dfrac{3}{18-k} \qquad \angle T_{dy}(3j) = -\dfrac{\pi}{2}$

Sommando i due contributi

$y(t) \simeq 10 + \dfrac{3}{18-k}\sin\left(3t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{ES.\ 3}$

$$s(s+3)(s+6)+k(s+b)=0$$

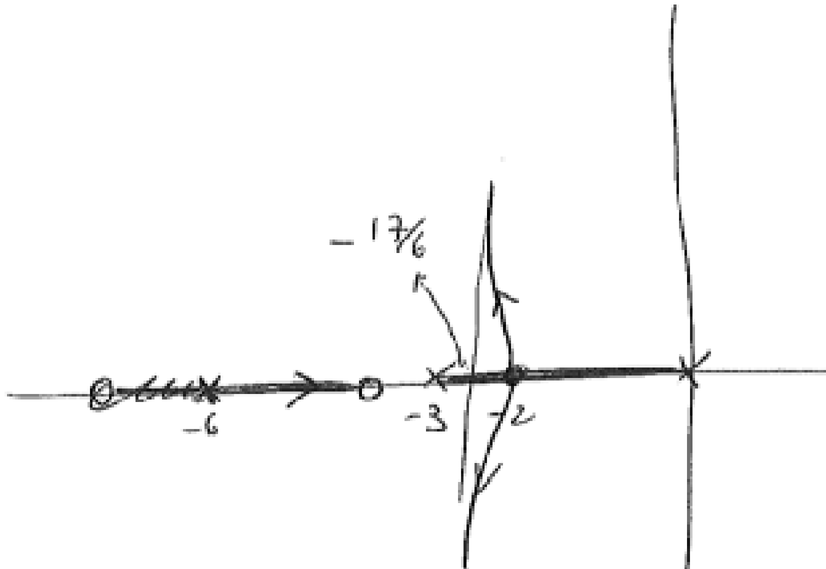
1) Punti doppi $\begin{cases} s(s+3)(s+6)+k(s+b)=0 \\ 3s^2+18s+18+k=0 \end{cases}$ $s=-2$ $\begin{cases} -2(1)(4)+k(b- \\ 12-36+18+k= \end{cases}$

$\begin{cases} -8+6(b-2)=0 \\ k=6 \end{cases}$ $b=\frac{20}{6}=10/3$

2) Asintoti

$\sigma_0=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{-3-6+10/3}{2}$

$=\frac{-17}{6}$




3) Per $k=6$ $s(s+3)(s+6)+k(s+\frac{10}{3})=0$

ha punto doppio in $-2$ e quindi $(s+2)^2$ è fattore del polinomio. Il rimanente fattore si ottiene facendo la divisione

$s(s+3)(s+6)+6(s+\frac{10}{3})=s^3+9s^2+24s+20$

$$\begin{array}{l|l} s^3+9s^2+24s+20 & s^2+4s \\ \hline s^3+4s^2+4s & s+5 \\ \hline 5s^2+20s+20 & \end{array}$$

I modi sono

$e^{-2t},\ te^{-2t},\ e^{-5t}$

Altri punti doppi

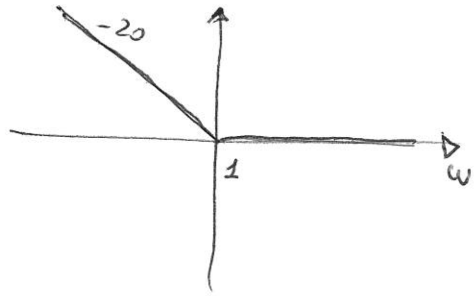
$\begin{cases} s(s+3)(s+6)+k(s+\frac{10}{3})=0 \\ 3s^2+18s+18+k=0 \end{cases}$ $s^3+9s^2+\cancel{18s}-3s^3-18s^2-\cancel{18s}-10s^2-60s-$

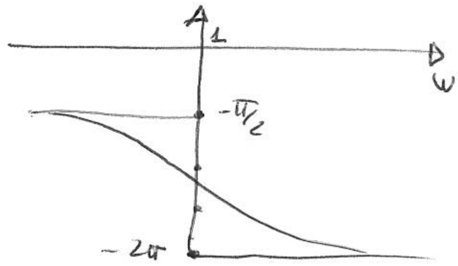
$2s^3+19s^2+60s+60=0$

Se faccio divisione del precedente polinomio $s+2$ si

$\boxed{\text{ES. 4}}$

1) BODE




2) NYQUIST

$$G(j\omega) = \frac{1-2j\omega-\omega^2}{j\omega(1+j\omega)} \quad 1-j\omega$$

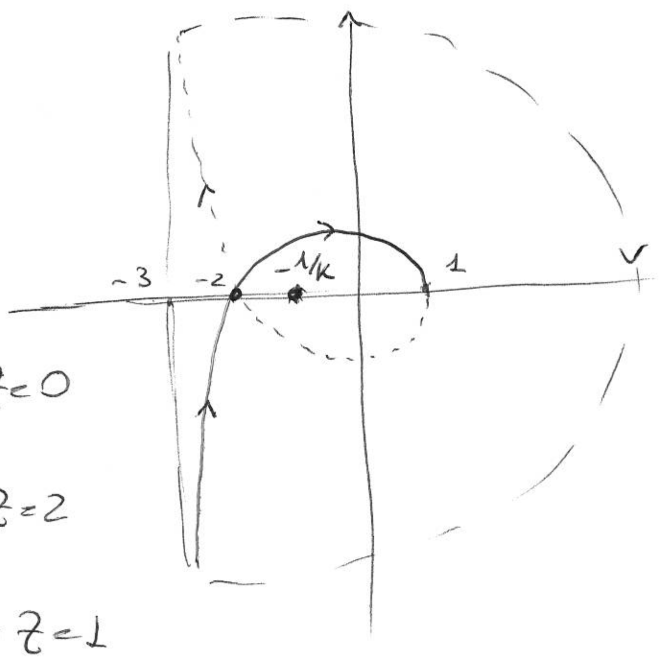
$$= \frac{(1-2j\omega-\omega^2)(1-j\omega)}{j\omega(1+\omega^2)} = \frac{1-\omega^2-j\omega(1-\omega^2)-2j\omega-2\omega^2}{j\omega(1+\omega^2)}$$

$$= \frac{1-3\omega^2-j\omega(3-\omega^2)}{j\omega(1+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Re}\, G = \frac{\omega^2-3}{\omega^2+1}$$

$$\mathrm{Im}\, G = \frac{3\omega^2-1}{\omega(1+\omega^2)}$$

| | | |
|---|---|---|
| $\omega = 0^+$ | $\mathrm{Re} = -3$ | $\mathrm{Im} = -\infty$ |
| $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\mathrm{Re} = -2$ | $\mathrm{Im} = 0$ |
| $\omega = \sqrt{3}$ | $\mathrm{Re} = 0$ | $\mathrm{Im} = 2/\sqrt{3}$ |
| $\omega = +\infty$ | $\mathrm{Re} = 1$ | $\mathrm{Im} = 0$ |




3) $P = 0$

$-\frac{1}{k} < -2 \quad (0 < k < \frac{1}{2}) \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$

$-2 < -\frac{1}{k} < 1 \quad (k < -1 \text{ o } k > \frac{1}{2}) \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2$

$-\frac{1}{k} > 1 \quad (-1 < k < 0) \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 1$

# ES. 5

Per avere errore alla rampa parabolica finito devo avere due poli origine. Per avere errore 0,1 dobbiamo avere guadagno di Bode 10. Quindi

$$C(s) = \frac{k_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s)$$

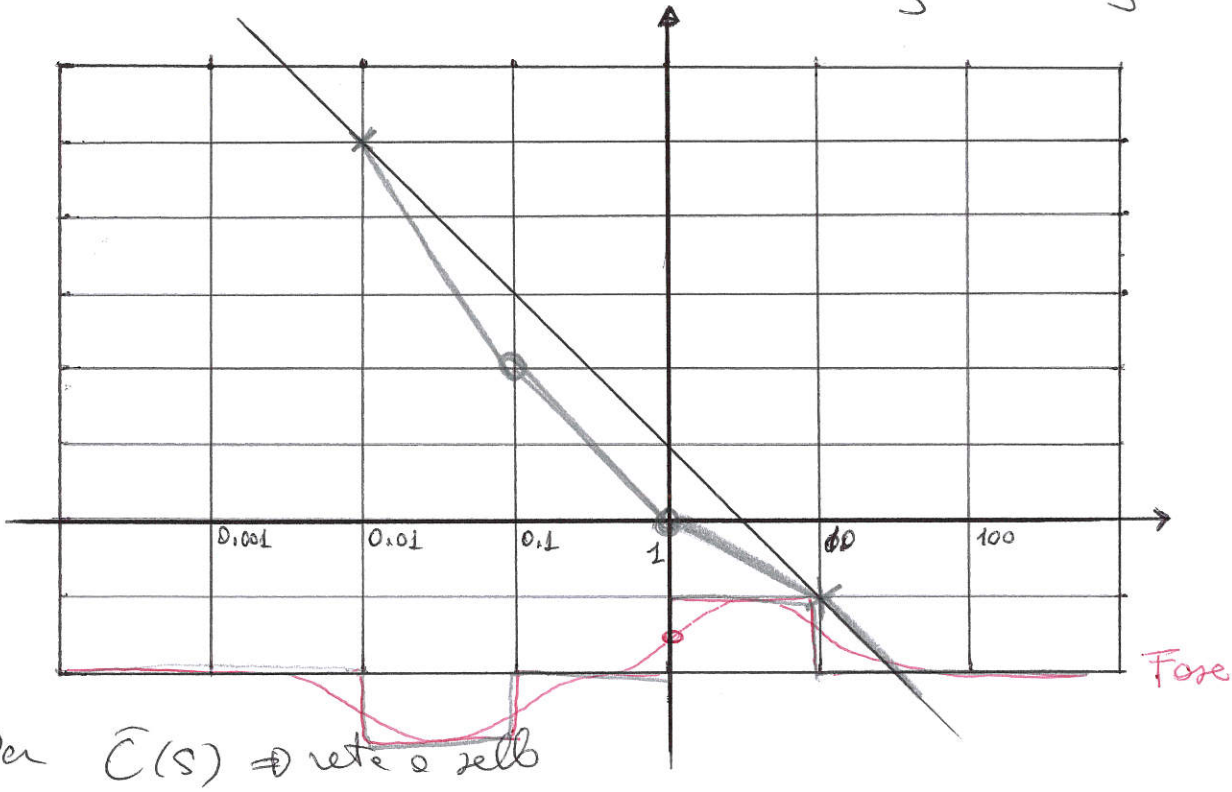
$$G(s) = \frac{k_G}{s^{h_G}} \bar{G}(s) \qquad k_G = 2 \qquad h_G = 1$$

$$h_c = h - h_G = 2 - 1 = 1$$

$$k_c = \frac{k}{k_G} = \frac{10}{2} = 5$$

$$C(s) = \frac{5}{s} \bar{C}(s)$$

$$\hat{W}(s) = \frac{5}{s} G(s) = \frac{10}{s^2}$$




Per $\bar{C}(s) \Rightarrow$ rete a sella binomiale poli in 0.01 e 10
zeri in 0.1 e 1

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + s10}{1 + s100} \, \frac{1+s}{1+s/10}$$

$$C(s) = \frac{5}{s} \, \frac{1 + s10}{1 + s100} \, \frac{1+s}{1+s/10}$$