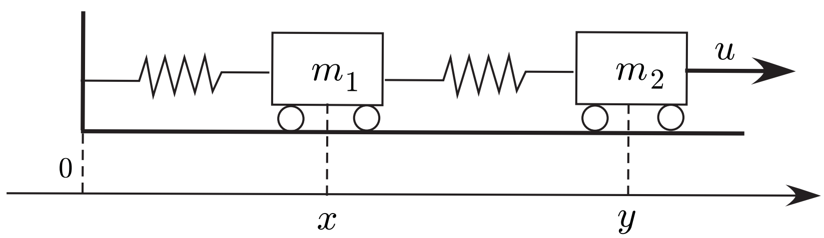
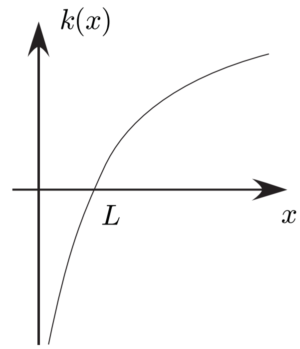
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 25/8/2014

Cognome e nome: ________________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.





Si tratta di due carrelli collegati tra loro da una molla e uno dei due e' collegato a una parete con una molla. Le due molle sono identiche e soddisfano la legge secondo cui la forza elastica generata vale $F_e = k(z)$, dove z e' la lunghezza della molla e

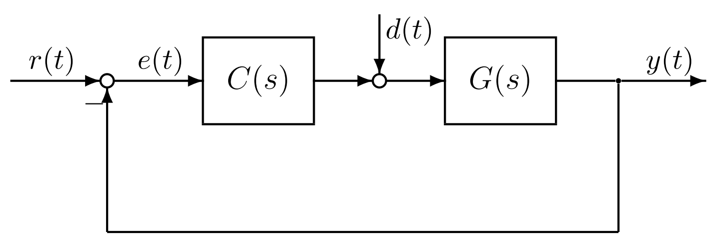
$$k(z) = 1 - \frac{L}{z}$$

come illustrato nella seconda figura (L e' la lunghezza a riposo della molla). Su uno dei carrelli agisce una forza u.

1. Determinare le equazioni del moto. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$, $x(t) = \bar{x}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$.

2. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



dove

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{a}{s^2 + b}$$

con $a, b > 0$.

1. Supponiamo che $K = 0$. Determinare a, b sapendo che il sistema risponde a $d(t) = \delta^{(-1)}(t)$ (gradino unitario) con l'uscita $y(t) = 1 - \cos(2t)$.

2. Supponiamo che a, b siano quelli calcolati nel punto precedente. Determinare la funzione di trasferimento $T_{ry}(s)$ dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$ e studiarne la stabilita' al variare di K.

3. Ancora supponendo che a, b siano quelli calcolati nel punto precedente. Calcolare l'andamento a regime di $y(t)$ in funzione di K sapendo che $d(t) = sin(2t)$ e $r(t) = 1$.

Esercizio 3 Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente. Supponiamo ora che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 8s + b}$$

1. Si determini b in modo che -2 sia punto doppio del luogo.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario e angoli ingresso/uscita).

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il modi **puramente** oscillatori (ne' convergenti, ne' divergenti). In corrispondenza a tale valore di K determinare i rimenenti modi del sistema.

4. Determinare i modi del sistema in catena chiusa per il valore di K che corrisponde al punto doppio $s = -2$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{2}{s + 2}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino $\simeq 0.01$;

2. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 20$;

3. margine di fase $\simeq 90^0$.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Determinare il margine di fase in funzione di $K > 1$.

Esercizio 6. Spiegare i principi su cui si basa la sintesi in frequenza (o sintesi di Bode) cioe' indicare quali specifiche nel dominio del tempo si vuole soddisfare e come si cerca di ottenere il controllore che le soddisfa.

$\boxed{\text{Es.1}}$

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x} + k(y-x) - k(x) = 0 \\ -m_2\ddot{y} - k(y-x) + u = 0 \end{cases}$$

Equilibrio $\quad x(t)=\bar{x} \quad y(t)=\bar{y} \quad \dot{x}=\ddot{x}=0 \quad \dot{y}=\ddot{y}=0$

$u(t)=0$

$$\begin{cases} k(\bar{y}-\bar{x}) - k(\bar{x}) = 0 \\ k(\bar{y}-\bar{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y}-\bar{x}=L \end{cases} \Rightarrow k(\bar{x})=0 \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x}=L \\ \bar{y}=\bar{x}+L=2L \end{array}$$

Siano $\tilde{x}(t)=x(t)-\bar{x} \qquad \tilde{y}(t)=y(t)-\bar{y}$

$$k(x)\simeq k(\bar{x})+\left.\frac{\partial k}{\partial x}\right|_{\bar{x}}\tilde{x} = 0+\frac{L}{\bar{x}^2}\tilde{x} = \frac{1}{L}\tilde{x}$$

$$k(y-x)=k(\bar{x}-\bar{y})+\left.\frac{\partial k}{\partial x}\right|_{\bar{x}-\bar{y}}(\tilde{y}-\tilde{x}) = \frac{1}{L}(\tilde{y}-\tilde{x})$$

$$\begin{cases} -m_1\ddot{\tilde{x}} + \frac{1}{L}(\tilde{y}-\tilde{x}) - \frac{1}{L}\tilde{x} = 0 \\ -m_2\ddot{\tilde{y}} - \frac{1}{L}(\tilde{y}-\tilde{x}) + u = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} \left(m_1 s^2 + \frac{2}{L}\right)X(s) = \frac{1}{L}Y(s) \\ \left(m_2 s^2 + \frac{1}{L}\right)Y(s) = \frac{1}{L}X(s)+U(s) \end{cases}$$

Eliminando $X(s)$ $\qquad X(s)=\dfrac{1/L}{m_1 s^2+2/L}Y(s)$

$$\left(m_2 s^2 + 1/L\right)Y = \frac{1}{L}\,\frac{1/L}{m_1 s^2+2/L}\,Y + U$$

$$\left[\left(m_2 s^2+1/L\right)\left(m_1 s^2+2/L\right) - 1/L^2\right]Y = U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{\left(m_2 s^2+1/L\right)\left(m_1 s^2+2/L\right)-1/L^2} = \frac{1}{m_1 m_2 s^4 + \frac{1}{L}(m_1+2m_2)s^2 + \frac{1}{L^2}}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) $y(t) = 1 - \cos(2t) = 1 - \frac{1}{2} e^{j2t} - \frac{1}{2} e^{-j2t}$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1/2}{s-2j} - \frac{1}{s+2j} = \frac{\cancel{s^2} + 4 \cancel{- \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s2j - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s2j}}{s(s-2j)(s+2j)} = \frac{4}{s(s^2+4)}$$

D'altra parte

$$Y(s) = G(s)D(s) = \frac{a}{s^2+b}\,\frac{1}{s} = \frac{a}{s(s^2+b)}$$

Confrontando $a = 4$, $b = 4$

2) $$T_{ry} = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{4k}{s(s^2+4)+4k} = \frac{4k}{s^3+4s+4k}$$ mai stabile per Cartesio

3) Andamento a regime non esiste perché il sistema in catena chiusa è sempre instabile

$\boxed{\text{ES. 3}}$

1) $\begin{cases} s(s^2+8s+b)+k=0 \\ 3s^2+16s+b=0 \end{cases} \xRightarrow{s=-2} \begin{matrix} 12-32+b=0 \\ b=20 \end{matrix}$

2) Altri punti doppi

$\begin{cases} s(s^2+8s+20)+k=0 \\ 3s^2+16s+20=0 \end{cases} \Rightarrow s_{12} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64-60}}{3} = \begin{cases} -10/3 \\ -2 \end{cases}$

Asintoti

Osservo che i poli sono $0, -4 \pm 2j$

$\sigma_0 = \dfrac{0-4+2j-4-2j}{3} = -8/3$

Angoli uscita

$-\beta - \angle\left(s-(-4-2j)\right) - \angle(s-0) = \pi$

$s \simeq -4+2j$

$-\beta - \angle 4j - \angle(-4+2j) = \pi$

$\Downarrow$

$\beta = -\pi - \frac{\pi}{2} - \angle(-4+2j) = -\operatorname{arctg} 2$

Intersezione asse immaginario

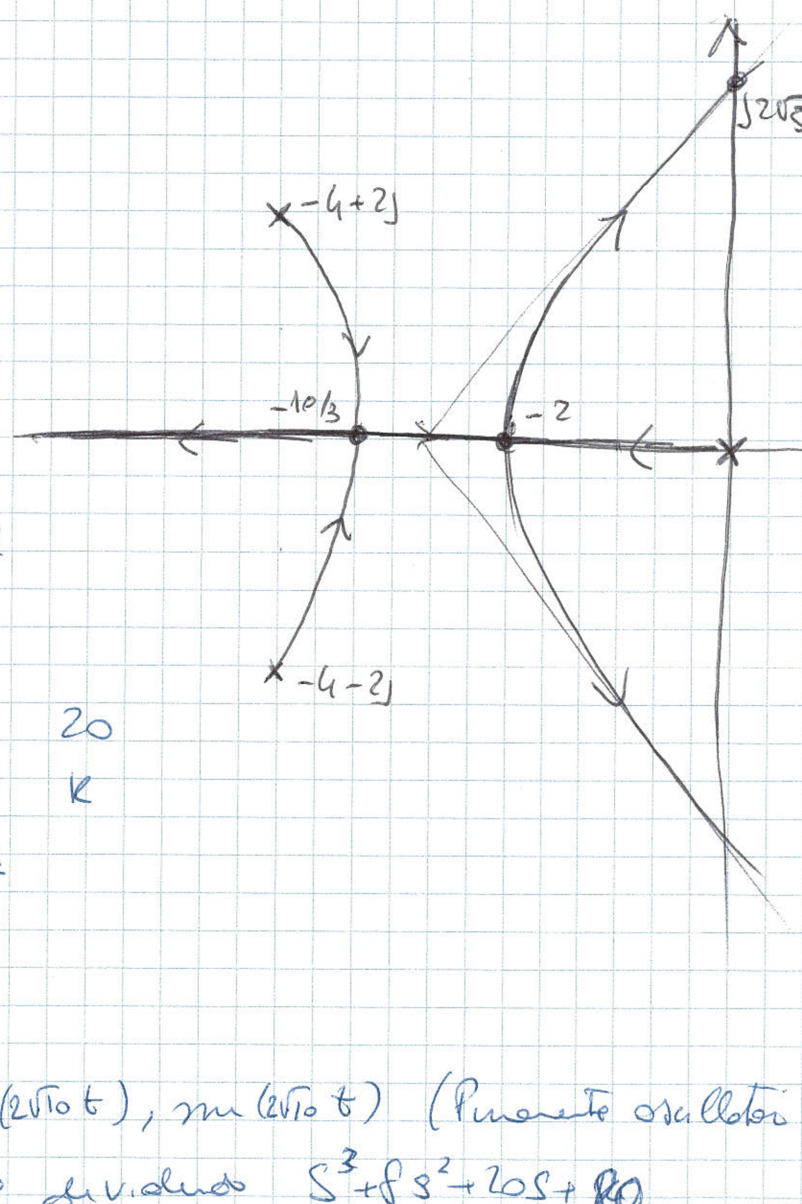
$s^3+8s^2+20s+k$

3	1	20
2	8	k
1	$\frac{160-k}{8}$	
0	k	

Stabilità per $0<k<160$

Per $k=160 \Rightarrow$ interseco asse immaginario

$8s^2+160=0 \quad s=\pm j\sqrt{10}$



Per $k=160$ i modi sono $\cos(2\sqrt{10}\,t)$, $\sin(2\sqrt{10}\,t)$ (Puramente oscillatori)

Il rimanente modo si trova dividendo $s^3+8s^2+20s+80$ per s^2+20

$$\begin{array}{l|l} s^3+8s^2+20s+80 & s^2+20 \\ \hline s^3 \qquad\quad +20s & s+8 \\ \hline 8s^2 \qquad\quad +80 & \\ 8s^2 \qquad\quad +80 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ rimanente modo e^{-8t}

4. ~~Poiché~~ Se $s=-2$ $\Rightarrow$ trovo k

$$s(s^2+8s+20)+k=0 \xRightarrow{s=-2} -2(4+8(-2)+20)+k=0 \Rightarrow k=16$$

Per $k=16$ il polinomio diventa

$$s(s^2+8s+20)+16 = s^3+8s^2+20s+16$$ che è

divisibile per $(s+2)^2$. Dividiamo

$$\begin{array}{r|l} s^3+8s^2+20s+16 & s^2+4s+4 \\ \cline{2-2} s^3+4s^2+4s & s+4 \\ \hline 4s^2+16s+16 & \\ 4s^2+16s+16 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

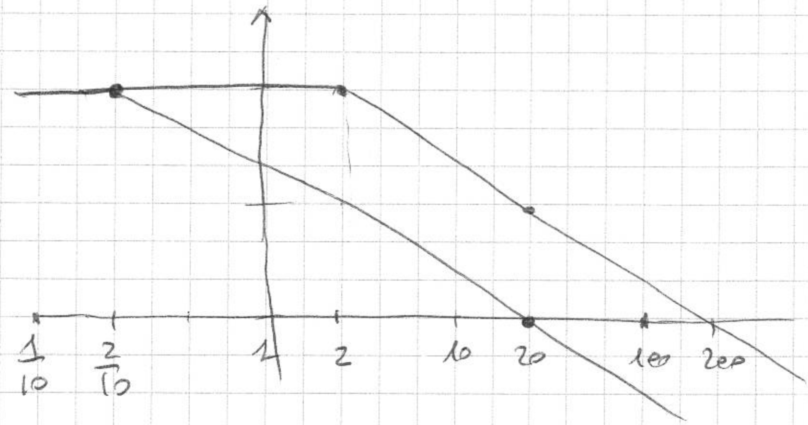
I modi sono e^{2t}, te^{-2t}, e^{-4t}

ES. 4

$$G(s) = \frac{1}{1+s/2}$$

rispetto a gradino con errore $\frac{1}{100}$ $\Rightarrow$ guadagno di Bode totale ≥ 100

$$\hat{W}(s) = \frac{100}{1+s/2} \qquad T = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{T} = 2$$



Compensatore

$$\bar{C}(s) = \frac{1+s/2}{1+5s}$$

$$C(s) = 100 \, \frac{1+s/2}{1+5s}$$

ES 5

Calcolare la pulsazione di attraversamento ω_A

$$\left|\frac{k}{1+j\omega_A}\right| = 1 \iff \left|\frac{k}{1+j\omega_A}\right|^2 = 1 \iff \frac{k^2}{1+\omega_A^2} = 1 \iff \omega_A^2 = k^2-1$$

$$\omega_A = \sqrt{k^2-1}$$

$$M_\varphi = \pi + \angle \frac{k}{1+j\omega_A} = \pi - \angle 1+j\omega_A =$$

$$= \pi - \operatorname{arctg} \omega_A = \pi - \operatorname{arctg} \sqrt{k^2-1}$$