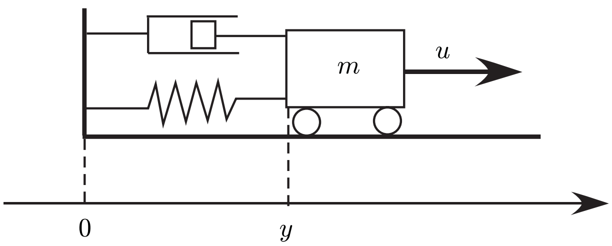
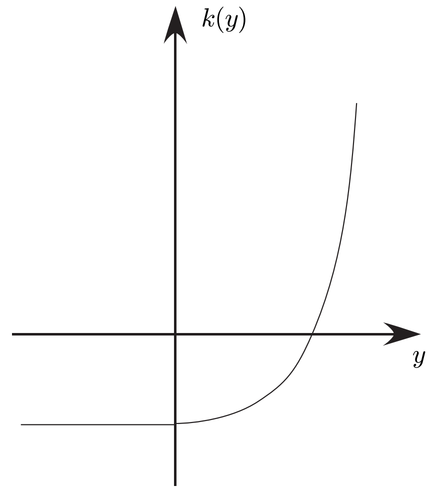
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compitino di Fondamenti di Automatica del 20/04/2011

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico





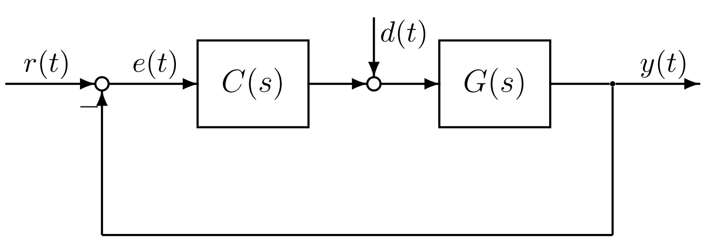
Si tratta di un carrello collegato a una parete attraverso una molla e uno smorzatore. Lo smorzatore è ideale con costante di attrito b mentre la molla non è ideale e genera una forza elastica (positiva se avente direzione da sinistra verso destra) $F_e = -k(y)$, dove

$$k(y) = \begin{cases} -1 & \text{se } y < 0 \\ y^2 - 1 & \text{se } y \geq 0 \end{cases}$$

L'andamento di $k(y)$ è illustrato nella figura precedente. Al carrello viene applicata una forza u.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Supponiamo che venga applicato un ingresso costante $\bar{u} = 3$. Determinare la corrispondente posizione di equilibrio $\bar{y}$.
3. Siano $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $\tilde{u}(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$ ipotizzando che entrambi i segnali siano piccoli.
4. Dire per quali valori di m, b il sistema linearizzato precedente ha modi oscillatori.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = K\frac{s+1}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{(s+4)(s-5)}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $T(s)$ del sistema in catena chiusa con ingresso r e uscita y. Determinare il numero di poli instabili di $T(s)$ al variare di K (i casi critici sono facoltativi).

2. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e punti doppi sapendo che sono valori reali e interi.

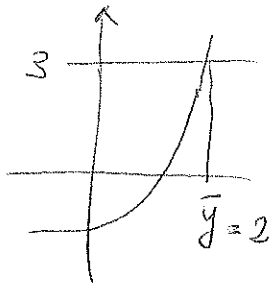
3. Determinare i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa ha solo modi non oscillatori.

Esercizio Teorico Dare la definizione di funzione sensibilità di una funzione di trasferimento rispetto alle variazioni di un parametro e descrivere a che cosa serve. Si descriva inoltre come la funzione sensibilità viene influenzata dal controllo in retroazione.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) Equazioni del moto

$$-m\ddot{y} - b\dot{y} - k(y) + u = 0$$



2) $u(t)=\bar{u}=3$ $\quad y(t)=\bar{y} \quad \to \ddot{y}=\dot{y}=0$

$$-k(\bar{y})+\bar{u}=0 \qquad k(\bar{y})=3$$

$$\bar{y}^2-1=3 \qquad \bar{y}=2$$

3) $\dot{\tilde{y}}=\dot{y} \quad \ddot{\tilde{y}}=\ddot{y} \quad y=\bar{y}+\tilde{y} \quad u=\bar{u}+\tilde{u}$

$$-m\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} - k(\bar{y}+\tilde{y}) + \bar{u} + \tilde{u} = 0$$

$$k(\bar{y}+\tilde{y}) \simeq k(\bar{y}) + \left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_{\bar{y}} \tilde{y} = 3 + (2y)\big|_{y=\bar{y}}\,\tilde{y} = 3+4\tilde{y}$$

Linearizzazione

$$-m\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} - \cancel{k(\bar{y})} - \left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_{y=\bar{y}} \tilde{y} + \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} = 0$$

$$-m\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} - 4\tilde{y} + \tilde{u} = 0$$

4) Passiamo alle Laplace trasformate $\quad Y(s)=\mathcal{L}[\tilde{y}]$

$U(s)=\mathcal{L}[\tilde{u}]$

$$(ms^2+bs+4)Y(s)=U(s)$$

$$Y(s)=\frac{1}{ms^2+bs+4}U(s)$$

Modi oscillatori $\iff \dfrac{1}{ms^2+bs+4}$ ha poli non reali

$$\iff \Delta = b^2-16m<0 \iff b<4\sqrt{m}$$

ES. 2

1) $T(s) = \dfrac{C(s)\,G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \dfrac{k(s+1)}{s(s+4)(s-5) + k(s+1)}$

Tabella Routh $\qquad s(s+4)(s-5) + k(s+1) = s^3 - s^2 + (k-20)s + k$

3	1	$k-20$
2	-1	k
1	$2k-20$	
0	k	

	$k<0$	$0<k<10$	$k>10$
1° coef	+	+	+
2° coef	−	−	−
3° coef	−	−	+
4° coef	−	+	+
	1 Var	2 Var	2 Var

$k < 0$ 1 instabile

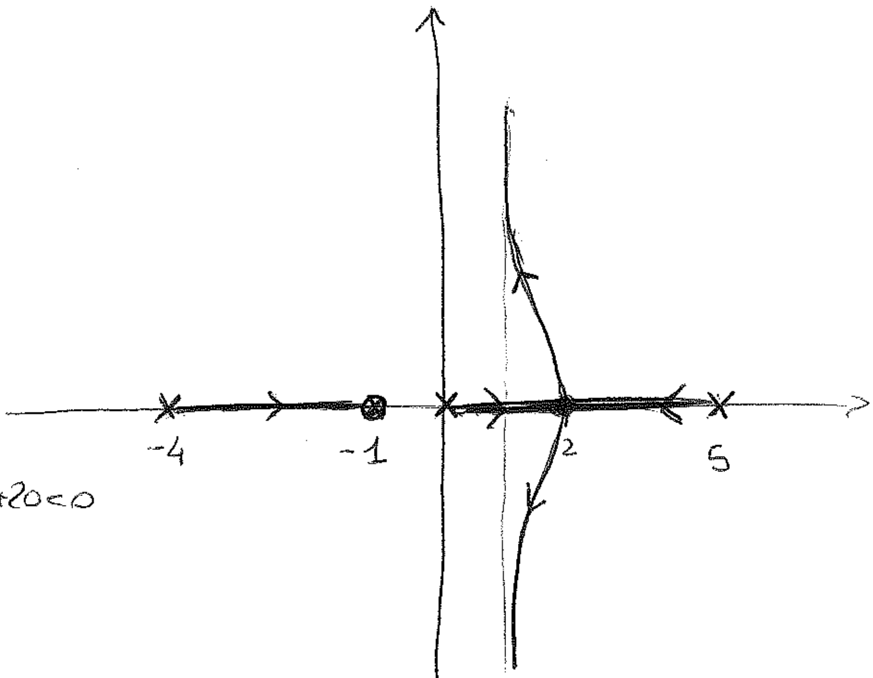
$k > 0$ 2 instabili

$k = 0 \Rightarrow T(s) = 0$ BIBO

2) Punti doppi

$$\begin{cases} s^3 - s^2 - 20s + k(s+1) = 0 \\ 3s^2 - 2s - 20 + k = 0 \end{cases}$$

$k = -3s^2 + 2s + 20$



$s^3 - s^2 - 20s + (s+1)(-3s^2 + 2s + 20) = 0$

$s^3 - s^2 - \cancel{20s} + 3s^3 + 2s^2 + \cancel{20s} - 3s^2 + 2s + 20 = 0$

$2s^3 + 2s^2 - 2s - 20 = 0$

$s^3 + s^2 - s - 10 = 0$

Tra 0 e 5 c'è di sicuro un punto doppio. Sapendo che è intero proviamo a sostituire $p(s) = s^3 + s^2 - s - 10$ con i numeri 1, 2, 3, 4

$p(1) = -9 \qquad p(2) = 0 \qquad p(3) = 23 \qquad p(4) = 66$

Quindi 2 è punto doppio. Per trovare i rimanenti facciamo la divisione con resto di $p(s)$ diviso $s-2$

$$\begin{array}{l|l} s^3 + s^2 - s - 10 & s - 2 \\ \hline s^3 - 2s^2 & s^2 + 3s + 5 \\ \hline \quad 3s^2 - s - 10 & \\ \quad 3s^2 - 6s & \\ \hline \qquad 5s - 10 & \\ \qquad 5s - 10 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

gli altri punti doppi sono eventualmente gli zeri di $s^2 + 3s + 5$ che non sono reali e quindi non sono punti doppi

Unico punto doppio in $s = 2$ in corrispondenza di $k = -3s^2 + 2s + 20\big|_{s=2} = 12$

Asintoti

angoli $\pm \frac{\pi}{2}$

centro $= \frac{\sum p_i - \sum z_i}{2} = \frac{-4+5-(-1)}{2} = 1$

3) Dal luogo si deduce che si hanno modi non oscillatori se e solo se i punti del luogo sono reali e quindi per i valori di K precedenti al valore di K che dà il punto doppio. Quindi

$$0 \leq K \leq 12$$

ESERCIZIO TEORICO

Vedi dispensa