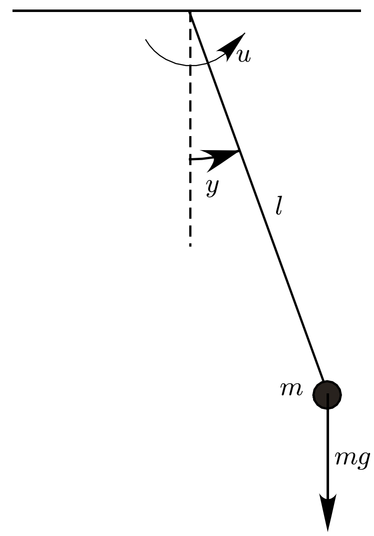
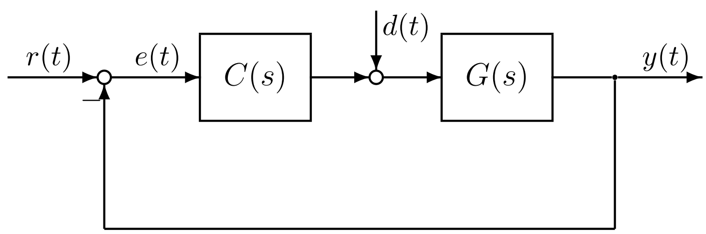
Esercizio 1 Si consideri il sistema meccanico in figura. Si tratta di un pendolo sul quale agisce una coppia u, incernierato ad un perno sul quale ruota con costante di attrito viscoso rotazionale b. Sia y la posizione angolare, m la massa fissata all'estremita' del pendolo e l la sua lunghezza. Sia g la accelerazione di gravita'.



1. Determinare le equazioni del moto del pendolo.
2. Supponiamo ora di voler tenere bloccato il pendolo su una posizione angolare fissa $y(t) = \bar{y} = 45^0$. Quale coppia $u(t) = \bar{u}$ deve essere applicata?
3. Sia ora $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$ e supponiamo che entrambi questi segnali siano piccoli. Determinare la funzione di trasferimento tra $\tilde{u}(t)$ e $\tilde{y}(t)$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s^2+4}{s^2+s+1}$$

1. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiuso al variare di K.
2. Supponiamo che $r(t) = \cos(2t)$ e che $d(t) = 2t$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ al variare di K.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K\frac{s+1}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{(s-6)(s+10)}$$

1. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ sapendo che esiste un solo punto doppio in $s = 2$ che si ottiene per $K = 32$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni dell'asse immaginario.
2. Determinare i valori di K in corrispondenza dei quali la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene solo modi non oscillatori.
3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene il modo e^{2t}. Determinare tutti i modi corrispondenti a tale valore di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s-2)}\,.$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo).

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

Attraverso la sintesi di Bode (o sintesi in frequenza) si determini il compensatore $C_(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino di circa $\simeq 0,01$;

2. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 20$;

3. margine di fase $m_\varphi \simeq 45^0$.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

Equazioni del moto

$$-J y^{(2)} - b y^{(1)} - mgl \sin(y) + u = 0$$

Se $y(t) = \bar{y}$ e $u(t) = \bar{u}$ allora $y^{(1)} = y^{(2)} = 0$ e

$$-mgl \sin(\bar{y}) + \bar{u} = 0 \qquad \bar{u} = mgl \sin(\bar{y}) = mgl \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y(t) = \bar{y} + \tilde{y}(t) \qquad u(t) = \bar{u} + \tilde{u}(t) \quad \Rightarrow \tilde{y}^{(1)} = y^{(1)} \quad e \quad \tilde{y}^{(2)} = y^{(2)}$$

$$-J \tilde{y}^{(2)} - b \tilde{y}^{(1)} - mgl \sin(\bar{y} + \tilde{y}) + \bar{u} + \tilde{u} = 0$$

$\sin(\bar{y} + \tilde{y}) \simeq \sin(\bar{y}) + \cos(\bar{y}) \tilde{y}$ espansione di Taylor

$$-J \tilde{y}^{(2)} - b \tilde{y}^{(1)} - mgl \left(\cancel{\sin(\bar{y})} + \cos(\bar{y}) \tilde{y} \right) + \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} = 0$$

$\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}]$ $\quad \tilde{U}(s) = \mathcal{L}[\tilde{u}]$ $\quad$ Laplace Trasformata

$$-\left(J s^2 + b s + mgl \cos(\bar{y}) \right) \tilde{Y}(s) + \tilde{U}(s) = 0$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{J s^2 + b s + mgl \cos(\bar{y})} \tilde{U}(s) = \frac{1}{J s^2 + b s + mgl \frac{\sqrt{2}}{2}} \tilde{U}(s)$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

$$W_{zy}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{k(s^2+4)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+4)}$$

$$W_{dy}(s) = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{s(s^2+4)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+4)}$$

Stabilità $\quad s^3+s^2+s+k(s^2+4) = s^3+(k+1)s^2+s+4k$

3	1	1
2	$k+1$	$4k$
1	$\frac{k+1-4k}{k+1} = \frac{1-3k}{k+1}$	
0	$4k$	

Stabilità $\quad k > -1$

$k < \frac{1}{3}$ $\qquad 0 < k < \frac{1}{3}$

$k > 0$

Calcolo andamento a regime

$z(t) = \cos(2t) \qquad d(t) = 0$

$$y(t) \simeq |W_{zy}(2j)| \cos\left(2t + \angle W_{zy}(2j)\right)$$

$$W_{zy}(2j) = \frac{k((2j)^2+4)}{2j((2j)^2+2j+1)+k((2j)^2+4)} = \frac{k(-4+4)}{2j(-4+2j+1)+k(-4+4)} = 0$$

$y(t) \simeq 0$

$z(t) = 0 \qquad d(t) = 2t \qquad D(s) = \frac{2}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{\cancel{s}(s^2+4)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+4)} \frac{2}{s^{\cancel{2}}} = \frac{2(s^2+4)}{[s(s^2+s+1)+k(s^2+4)]s}$$

$$= \frac{A}{s} + \sum \frac{C_{ij}}{(s-P_i)^j} \qquad P_i \text{ poli stabili}$$

$y(t) \simeq A \qquad A = Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{2(s^2+4)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+4)}\Big|_{s=0} = \frac{8}{4k} = \frac{2}{k}$

Complessivamente

$$y(t) \simeq \frac{2}{k}$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

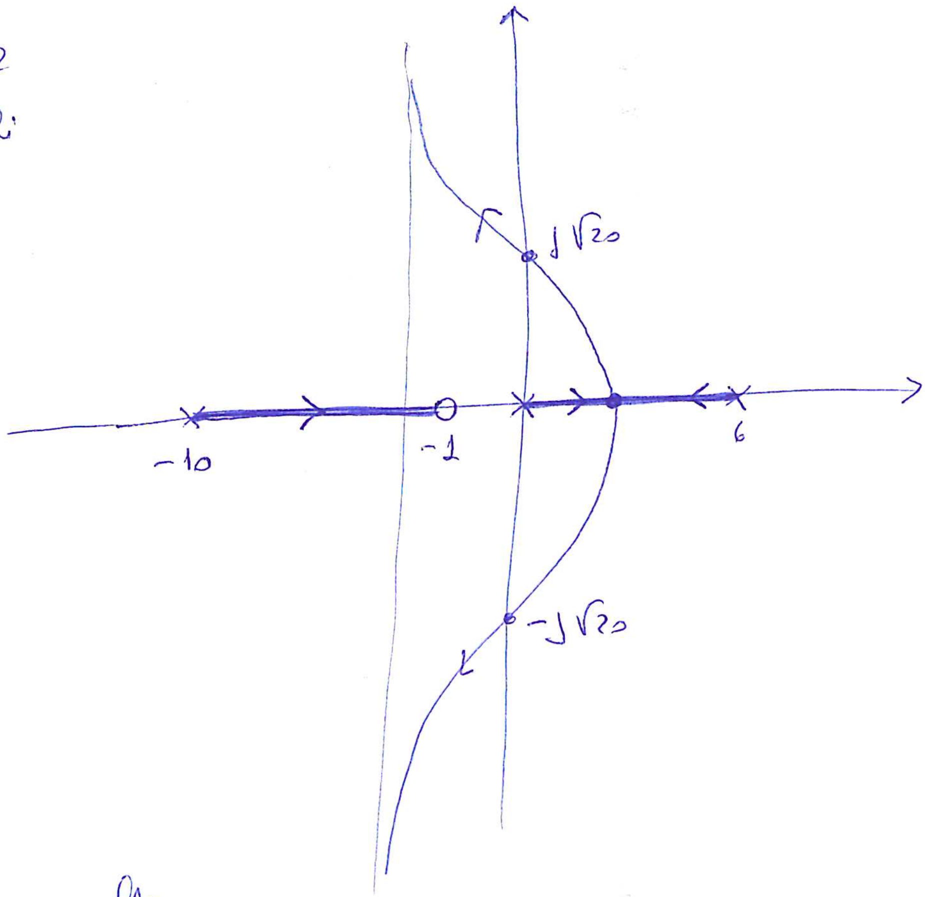
$$W_{zy}(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-6)(s+10)+k(s+1)}$$

Luogo dei poli = luogo delle radici $s(s-6)(s+10)+k(s+1)=0$

punto doppio $s=2$ per $k=32$

Asintoti: 2 asintoti verticali

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{0+6-10-(-1)}{2} = -\frac{3}{2}$$



Intersezione asse immaginario

$s^3+4s^2-60s+k(s+1)=0$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & k-60 \\
2 & 4 & k \\
1 & \frac{4k-240-k}{4} = \frac{3k-240}{4} & \\
0 & k &
\end{array}$$

$\leftarrow$ si annulla per $k=80$ $\rightarrow 4s^2+k=0 \rightarrow 4s^2+80=0$

$\rightarrow s^2+20=0 \qquad s_{12}=\pm j\sqrt{20}$

2) Solo modi non oscillatori se $0<k<32$

3) Modo e^{2t} quando $s=2$ appartiene al luogo e questo succede per $k=32$. Per tale valore di k $s=2$ è radice doppia. La rimanente radice si trova dividendo

$\cancel{s^3+4s^2+(k-60)}$

$$\begin{array}{l|l}
s^3+4s^2+(32-60)s+32 & (s-2)^2 = s^2-4s+4 \\
s^3-4s^2+4s & s+8 \\
\hline
8s^2-32s+32 & \\
8s^2-32s+32 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Le tre radici sono $2, 2, -8 \rightarrow$ modi sono e^{2t}, te^{2t}, e^{-8t}

ES. 4

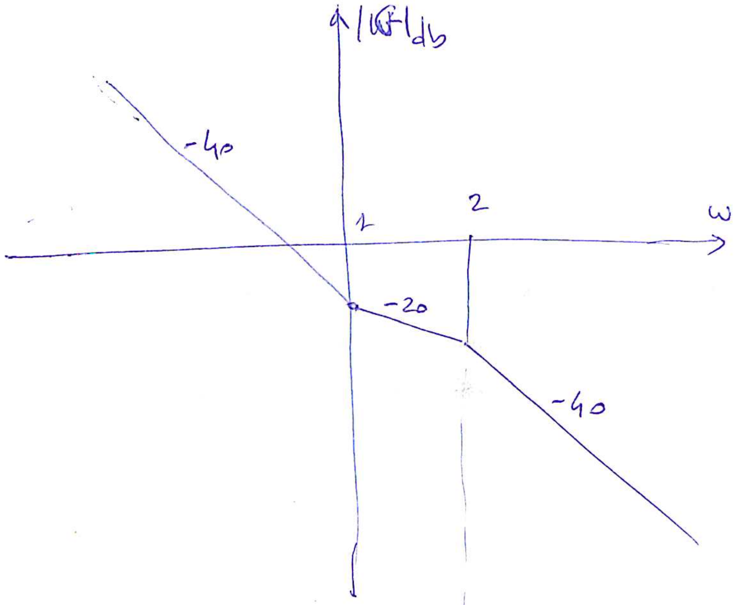
$$G(s) = \frac{1}{-2}\,\frac{1+s}{s^2(1-s/2)} =$$

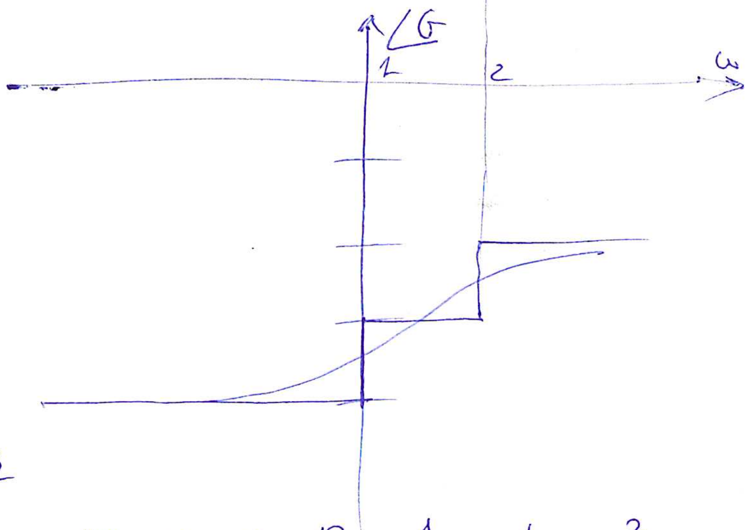
$$= \frac{-1/2}{s^2}\,\frac{1+s}{1-s/2}$$

$T_1 = 1 \qquad T_2 = -\frac{1}{2}$

Punti di spezzamento

$\omega_1 = \frac{1}{|T_1|} = 1 \qquad \omega_2 = \frac{1}{|T_2|} = 2$





$$G(j\omega) = \frac{1+j\omega}{-\omega^2(-2+j\omega)} = \frac{(1+j\omega)(-2-j\omega)}{-\omega^2(4+\omega^2)}$$

$$= \frac{-2+\omega^2+j\omega(-3)}{-\omega^2(4+\omega^2)}$$

$\mathrm{Re}\,G(j\omega) = \frac{2-\omega^2}{\omega^2(4+\omega^2)}$ $\qquad$ $\mathrm{Re} = 0$ se $\omega = \sqrt{2}$

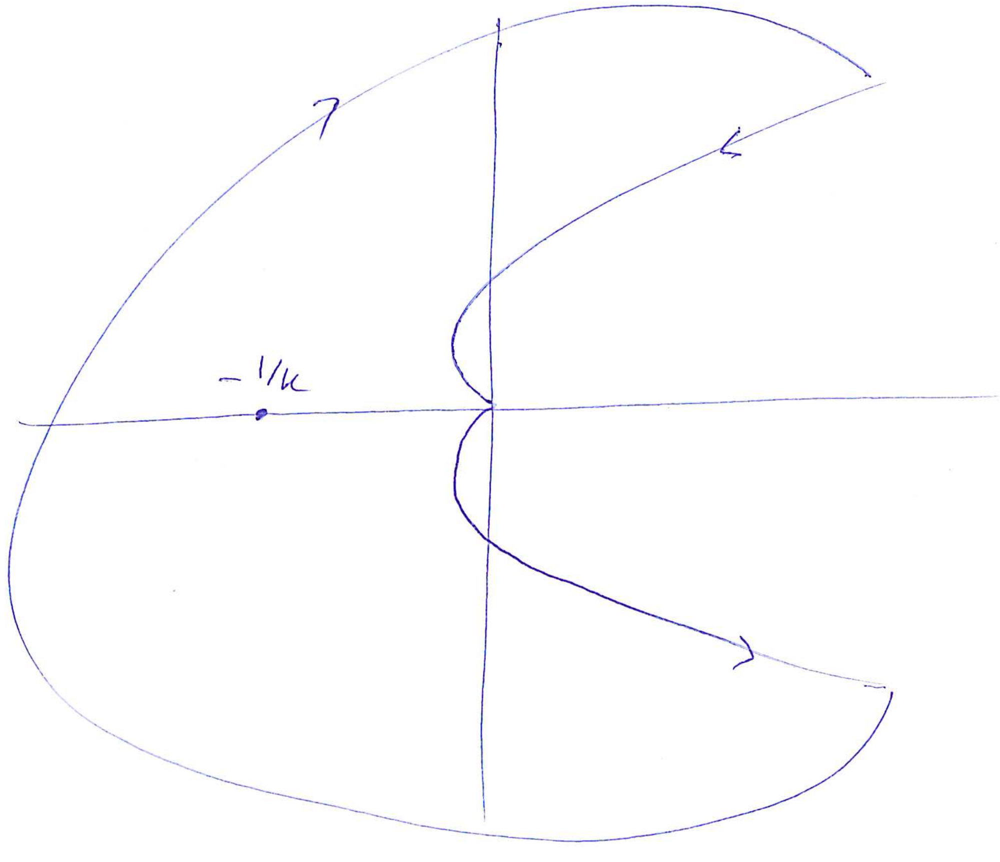
$\mathrm{Im} = \frac{3}{\sqrt{2}\,6} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\mathrm{Im}\,G(j\omega) = \frac{3\omega}{\omega^2(4+\omega^2)} = \frac{3}{\omega(4+\omega^2)} > 0$

per $\omega = 0^+$ $\quad \mathrm{Re} \simeq \frac{1}{2\omega^2}$ $\quad \mathrm{Im} \simeq \frac{3}{4\omega}$

andamento parabolico

ω	Re	Im
0^+	$+\infty$	$+\infty$
$\sqrt{2}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$+\infty$	0	0



Criterio Nyquist $P = 1$

$-\frac{1}{k} < 0 \ (k > 0) \Rightarrow N = -1$

$Z = P - N = 2$

$-\frac{1}{k} > 0 \ (k < 0) \Rightarrow N = 0$

$Z = P - N = 1$

$\boxed{\text{ES. 5}}$

$W(s) = G(s)C(s)$

$G(s) = \frac{1/2}{1+s/2}$ $\quad k_G = 1/2 \quad h_G = 0$

errore a regime al gradino $\cong 0,01 \Rightarrow \underbrace{K_G K_C}_{K_W} = \frac{1}{\varepsilon} - 1 \simeq 100$

Quindi $k_C = \frac{100}{k_G} = \frac{100}{1/2} = 200$

$h_W = 0 \quad . \quad h_W = h_G + h_C \Rightarrow h_C = h_W - h_G = 0 - 0 = 0$

$C(s) = \frac{k_C}{s^{h_C}} \bar{C}(s) = 200\, \bar{C}(s)$ $\qquad \hat{W}(s) = \frac{k_C}{s^{h_C}} G(s) = \frac{100}{1+s/2}$

$\bar{C}(s) = \frac{1+\frac{s}{20}}{1+\frac{s}{2}}$

$C(s) = 200\, \frac{1+\frac{s}{20}}{1+\frac{s}{2}}$