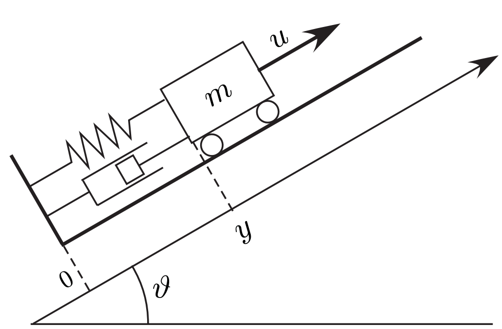
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 16/6/2014

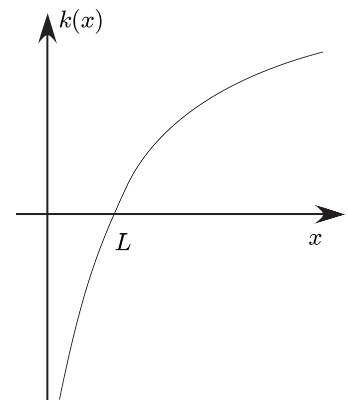
Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Per l'appello svolgere Esercizi 1, 2, 3 (punti 1 e 2), 4 (punti 1, 2 e 3) e 5. Per secondo compitino svolgere Esercizi 3, 4, 5.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.





Si tratta di un carrello che si muove su di un piano inclinato sul quale agisce una coppia u, attaccato a una parete con una molla e uno smorzatore. Lo smorzatore e' ideale con costante di attrito b mentre la molla soddisfa la legge secondo cui la forza elastica generata vale $F_e = k(x)$, dove x e' la lunghezza della molla e

$$k(x) = 1 - \frac{L}{x}$$

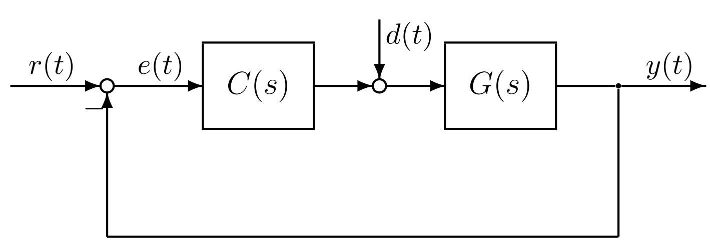
come illustrato nella seconda figura (L e' la lunghezza a riposo della molla).

1. Determinare le equazioni del moto. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$.

2. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

3. Per quali valori dei parametri m, b, L, θ il sistema ha modi oscillatori?

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



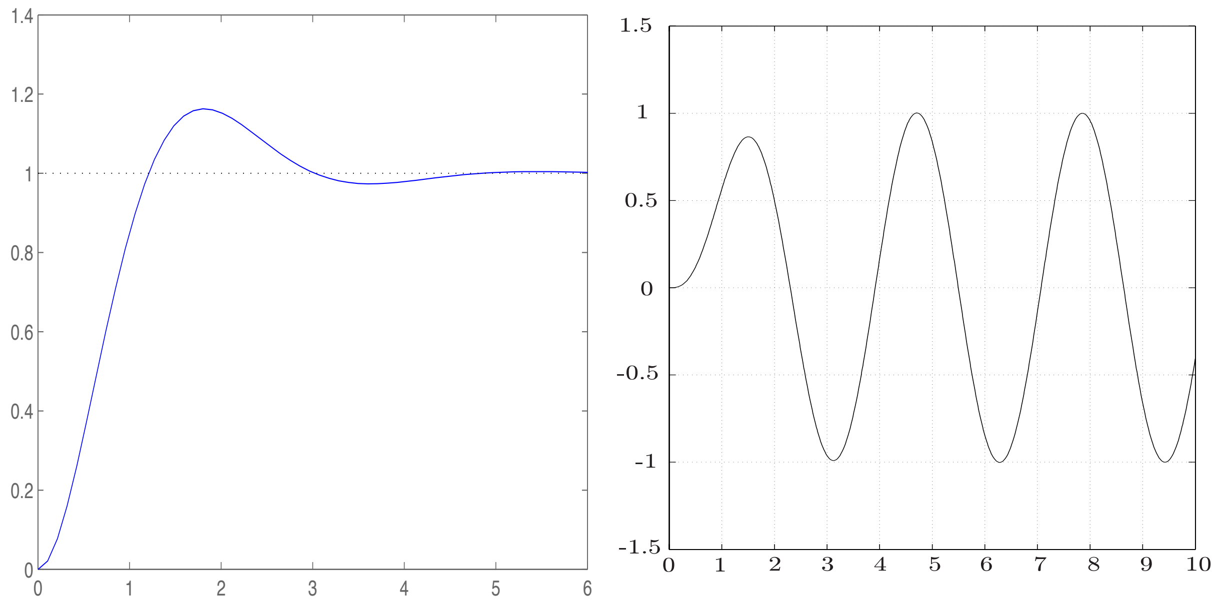
dove

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{a}{s^2 + 2s + b}$$

con $a, b > 0$.

1. Supponiamo che $K = 0$. Determinare a, b sapendo che il sistema risponde a $d(t) = \delta^{(-1)}(t)$ (gradino unitario) con l'uscita mostrata in figura (sinistra) mentre il sistema risponde a un ingresso $d(t) = sin(2t)$ con l'uscita mostrata in figura (destra).

2. Suponiamo che a, b siano quello calcolati nel punto precedente (se non svolto fatto il punto precedente ponete $a = 8$ e $b = 2$). Studiare la stabilita' di $T(s)$ al variare di K. Calcolare l'andamento a regime di $e(t)$ **errore di inseguimento** in funzione di K sapendo che $d(t) = sin(2t)$ e $r(t) = 2t$.



Esercizio 3. Supponiamo ora che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + a}$$

1. Si determini a in modo che -1 sia punto doppio del luogo.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario e angoli ingresso/uscita).

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il modi **puramente** oscillatori (ne' convergenti, ne' divergenti). In corrispondenza a tale valore di K determinare i rimenenti modi del sistema.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1 - s}{s^2(s + 1)} \, .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

4. Supponendo che $C(s) = K$ con $K > 0$, calcolare il margine di fase al variare di K.

Esercizio 5. Dare la definizione di margine di stabilita', di margine di fase e di margine di ampiezza.

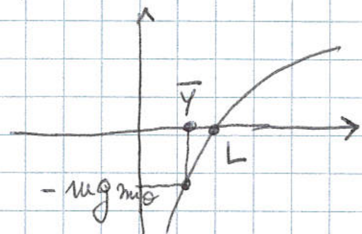
ES 1

1) $-m\ddot{y} - b\dot{y} - k(y) - mg\sin\theta + u = 0$

Se $y(t)=\bar{y}$ e $u(t)=0$ l'equazione diventa

$-k(\bar{y}) - mg\sin\theta = 0$

$k(\bar{y}) = -mg\sin\theta$



$1-\frac{L}{\bar{y}} = -mg\sin\theta \Rightarrow \bar{y} = \frac{L}{1+mg\sin\theta}$

2) $k(y) = k(\bar{y}+\tilde{y}) \cong k(\bar{y}) + \frac{dk}{dy}\Big|_{\bar{y}}\tilde{y} = -mg\sin\theta + \frac{L}{\bar{y}^2}\tilde{y}$

$= -mg\sin\theta + (1+mg\sin\theta)^2/L\ \tilde{y}$

Sistema linearizzato

$-m\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} + \cancel{mg\sin\theta} - (1+mg\sin\theta)^2 L\,\tilde{y} - \cancel{mg\sin\theta} + u = 0$

$\left(ms^2 + bs + (1+mg\sin\theta)^2/L\right)Y(s) = U(s)$

$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+(1+mg\sin\theta)^2/L}$

3) La funzione di trasferimento ha modi oscillatori se e solo se il discriminante di $ms^2+bs+(1+mg\sin\theta)^2L$ è negativo

$b^2 - 4m(1+mg\sin\theta)^2/L < 0$

$(1+mg\sin\theta)^2 > \frac{b^2L}{4m}$ $\quad 1+mg\sin\theta > \frac{b}{2}\sqrt{\frac{L}{m}}$

$\sin\theta > \frac{1}{mg}\left(\frac{b}{2}\sqrt{\frac{L}{m}} - 1\right)$

Es. 2

1) $T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{ka}{s(s^2+2s+b)+ka}$

$S_a^T = \frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a} = \cancel{a}\,\frac{s(s^2+2s+b)+ka}{\cancel{ka}}\;\frac{k[s(s^2+2s+b)+ka]-kak}{[s(s^2+2s+b)+ka]^2}$

$= \frac{s(s^2+2s+b)}{s(s^2+2s+b)+ka}$

$S_b^T = \frac{b}{T}\frac{\partial T}{\partial b} = b\,\frac{\cancel{s(s^2+2s+b)+ka}}{\cancel{ka}}\;\frac{-kas}{[s(s^2+2s+b)+ka]^2}$

$= \frac{-bs}{s(s^2+2s+b)+ka}$

2) Dalla uscita al gradino deduciamo che $G(0) = 1$
Dalla uscita alla sinusoide deduciamo che $|G(2j)| = 1$

$G(0) = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$

$|G(2j)|^2 = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{|-4+4j+b|^2} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{(a-4)^2+16} = 1 \Rightarrow \cancel{a^2} = \cancel{a^2} - 8a + 32$

$a = 4 \Rightarrow b = 4$ $\qquad G(s) = \frac{4}{s^2+2s+4}$

3) Usiamo la sovrapposizione degli effetti $\quad T_{re}(s) = \frac{s(s^2+2s+4)}{s(s^2+2s+4)+4k}$

(a) $r(t) = 2t \quad d(t) = 0 \qquad R(s) = \frac{2}{s^2} \qquad Y(s) = \frac{s(s^2+2s+4)}{s(s^2+2s+4)+4k}\,\frac{2}{s^2}$

$e(\infty) = sY(s)\big|_{s=0} = \frac{4}{4k}\,2 = \frac{2}{k}$

(b) $r(t) = 0 \quad d(t) = \sin(2t) \qquad T_{de}(s) = \frac{-G}{1+CG} = \frac{-4s}{s(s^2+2s+4)+4k}$

$T_{de}(2j) = \frac{-8j}{2j(-4+4j)+4k} = \frac{-8j}{4k-8} = \frac{-2j}{k-2} = \frac{2j}{2-k}$

$|T_{de}(2j)| = \frac{2}{2-k} \qquad 0<k<2$ per stabilità

$\angle T_d(2j) = \pi/2 \Rightarrow e(t) = \frac{2}{2-k}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$

Stabilità

$0<k<2$

3	1	4
2	2	4k
1	4-2k	
0	4k	

$\boxed{\text{ES. 3}}$ $s(s^2+4s+a)+k=0$ Luogo

1) $\begin{cases} s(s^2+4s+a)+k=0 \\ 3s^2+8s+a=0 \end{cases} \Rightarrow s=-1 \Rightarrow 3(-1)^2+8(-1)+a=0 \Rightarrow a=5$

Altro punto doppio

$3s^2+8s+5=0 \qquad s_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-15}}{3} \begin{cases} -5/3 \\ -1 \end{cases}$

2) $s(s^2+4s+5)+k=0$ nessun zero. I poli sono $0, -2\pm j$

Asintoti

$\sigma_a = \dfrac{0-2+\cancel{j}-2-\cancel{j}}{3} = -\dfrac{4}{3}$

Angoli uscita dal polo $-2+j$

$-\beta - \angle s-(-2-j) - \angle s-0 = \pi$

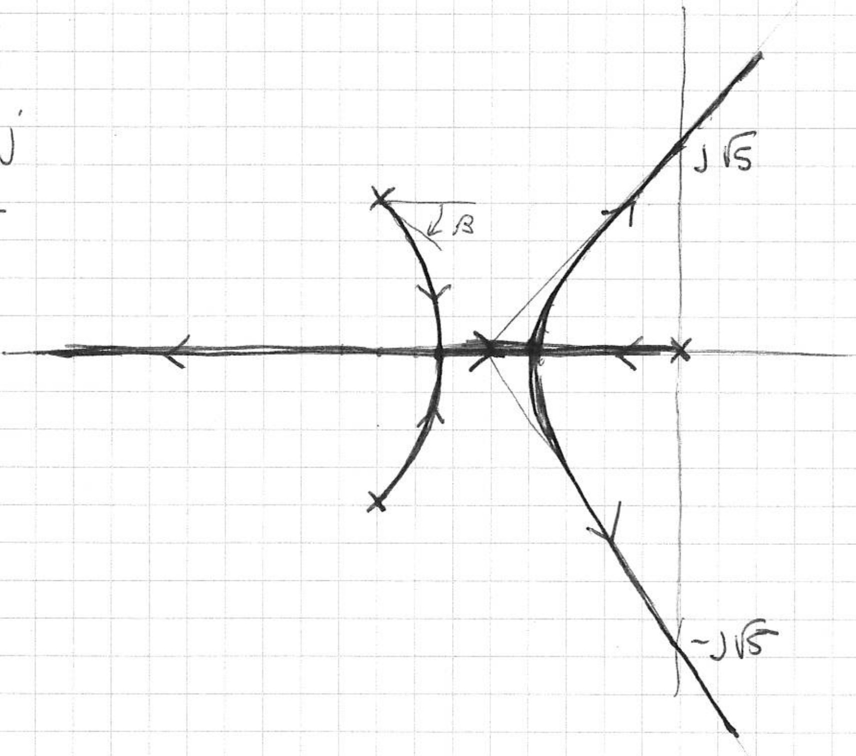
$s \simeq -2+j$

$-\beta - \angle 2j - \angle -2+j = \pi$

$\beta = -\pi - \dfrac{\pi}{2} - \angle -2+j$

$= -\pi - \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{2} + \text{arctg}\, 2\right)$

$= -2\pi - \text{arctg}\, 2 = -\text{arctg}\, 2$



Intersezione asse immaginario

s^3+4s^2+5s+k

3	1	5
2	4	k
1	$\frac{20-k}{4}$	
0	k	

Stabilità per $0<k<20$

Per $k=20$

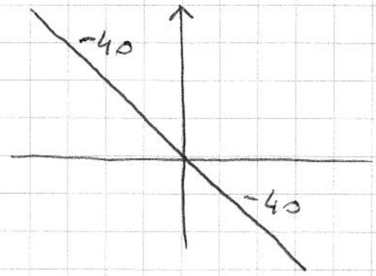
$4s^2+k = 4s^2+20$

radici $\pm j\sqrt{5}$

$$\begin{array}{l|l} s^3+4s^2+5s+20 & s^2+5 \\ \underline{s^3 \quad\;\; +5s} & \hline \\ \quad 4s^2 \quad +20 & s+4 \\ \quad \underline{4s^2 \quad +20} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

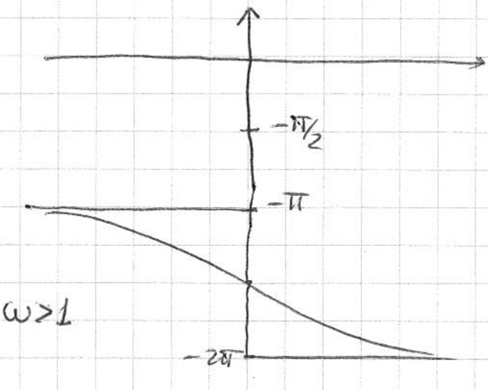
3) Abbiamo modi puramente oscillatori se abbiamo poli puramente immaginari. Questo avviene per $K=20$. Le radici sono $\pm j\sqrt{5}, -4$ e quindi i modi sono $\cos(\sqrt{5}t)$, $\sin(\sqrt{5}t)$, e^{-4t}

Es. 4



1) $G(s)$ è già in forma di Bode

Punto di spezzamento $\omega = 1$

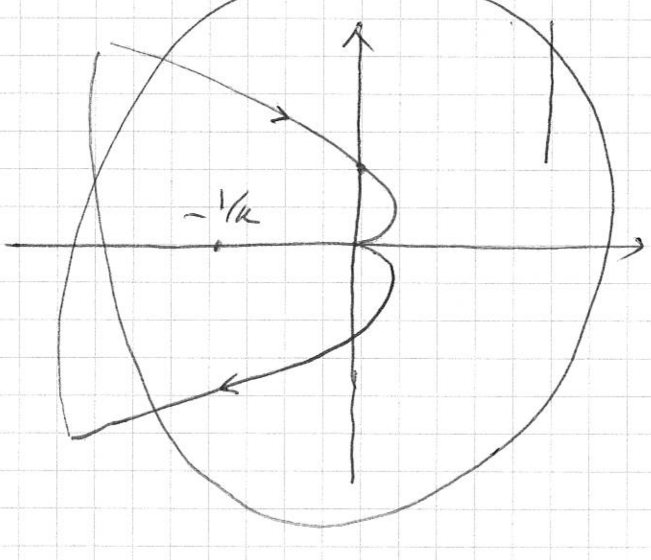


2) $G(j\omega) = \dfrac{1-j\omega}{-\omega^2(1+j\omega)}$

$$= \frac{(1-j\omega)^2}{-\omega^2(1+\omega^2)} = \frac{1-\omega^2-2j\omega}{-\omega^2(1+\omega^2)}$$

$\mathrm{Re}\, G(j\omega) = \dfrac{\omega^2-1}{\omega^2(1+\omega^2)} \Rightarrow \mathrm{Re} \geq 0 \Leftrightarrow \omega > 1$

$\mathrm{Im}\, G(j\omega) = \dfrac{2}{\omega(1+\omega^2)}$



Per $\omega \approx 0^+$ $\quad \mathrm{Re} \simeq -\dfrac{1}{\omega^2} \quad \mathrm{Im} \simeq \dfrac{2}{\omega}$

e quindi $\mathrm{Re} \simeq -\left(\dfrac{\mathrm{Im}}{2}\right)^2$ andamento parabolico

Per $\omega = 1$ $\quad \mathrm{Re} = 0$

$\quad \mathrm{Im} = 1$

Per $\omega = \infty$ $\quad \mathrm{Re} = \mathrm{Im} = 0$

3) $P = 0 \qquad Z = P - N$

per $k > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{k} < 0 \qquad N = -2 \Rightarrow Z = 2$

per $k < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{k} > 0 \qquad N = -1 \Rightarrow Z = 1$

4) Calcolo ω_A. $\quad |KG(j\omega_A)| = 1 \Leftrightarrow K^2 \dfrac{\cancel{|1-j\omega_A|^2}}{|j\omega_A|^2 \cancel{|1+j\omega_A|^2}} = 1 \Rightarrow \omega_A = K$

$$\angle KG(j\omega_A) = \angle 1 - j\omega_A - 2\angle j\omega_A - \angle 1 + j\omega_A$$

$$= -\mathrm{arctg}\,\omega_A - 2\,\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\omega_A = -\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,\omega_A = -\pi - 2\,\mathrm{arctg}\,K$$

$$M_\varphi = \pi + \angle KG(j\omega_A) = -2\,\mathrm{arctg}\,K$$