Corso di laurea in Ingegneria Biomedica e Elettronica- II Compitino e I appello di Fondamenti di Automatica del 1/2/2012

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

Secondo compitino (Esercizi 3,4,5) tempo: 1 ora e 45 minuti	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4,5) tempo: 3 ore

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema nonlineare

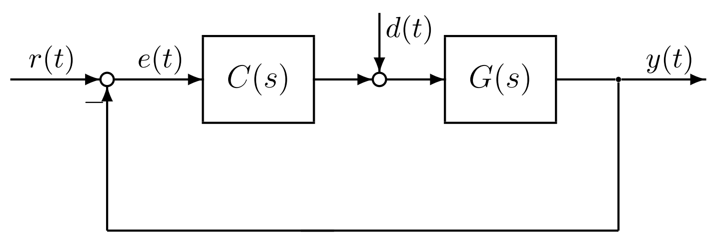
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_1(x_1+x_2) + u\\ y &= x_1\end{aligned}$$

1. Supponiamo di alimentare il sistema con un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, dove $\bar{u}$ è una costante ≥ 0. Determinare le evoluzioni di equilibrio $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$, $y(t) = \bar{y}$ al variare di $\bar{u} \geq 0$.

2. Determinare la linearizzazione del sistema nonlineare attorno ai precedenti punti di equilibrio al variare di $\bar{u} \geq 0$ e le corrispondenti funzioni di trasferimento.

3. Determinare la BIBO stabilita' delle precedenti funzioni di trasferimento al variare di $\bar{u} \geq 0$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi Si consideri lo schema della figura seguente



in cui

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s-3}{(s+6)(s^2-s+a)} \qquad h(y) = y$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che 0 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario.

3. Determinare per quale valore di K il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contenente il modo e^{-5t}. In corrispondenza a questo valore di K determinare i rimanenti modi del sistema in catena chiusa.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s+4)} \qquad C(s) = K$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ determinando eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e con l'asse immaginario.

3. Tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{5}{1+s} \qquad h(y) = y$$

1. Attraverso la sintesi di Bode si determini i compensatori $C_1(s), C_2(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

   (a) per entrambi errore a regime in risposta alla rampa $0,01$;

   (b) per entrambi margine di fase di circa 45^0;

   (c) per $C_1(s)$ pulsazione di attraversamento $\omega_A = 1$, per $C_2(s)$ pulsazione di attraversamento $\omega_A = 10$.

2. Attraverso la sintesi diretta si determini un compensatore $C(s)$ in modo tale che il sistema in catena chiusa abbia errore nullo in risposta al gradino e che abbia modi del tipo $t^i e^{-2t}$.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{2-s}{2+s}$$

dove $K \geq 0$. Si determini il margine di fase in funzione di K e si verifichi per quali valori di K il sistema in catena chiusa e' stabile.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \qquad\qquad = f_1(x_1\, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1(x_1 + x_2) + u = f_2(x_1\, x_2, u)$$

1) $x_1(t) = \bar{x}_1 \qquad x_2(t) = \bar{x}_2 \qquad u(t) = \bar{u} \geq 0$

$$0 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$
$$0 = -2\bar{x}_1(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + u \quad \Rightarrow \quad 4\bar{x}_1^2 = \bar{u} \qquad \bar{x}_1 = \pm\sqrt{\bar{u}}/2$$

2) $\tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \bar{x}_1 \quad , \quad \tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \bar{x}_2 \quad , \quad \tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u} \, , \; \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$$
$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\tilde{x}_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\tilde{x}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u}\tilde{u}$$
$$= (-4\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2)\tilde{x}_1 + (-2\bar{x}_1)\tilde{x}_2 + \tilde{u} = (-6\bar{x}_1)\tilde{x}_1 + (-2\bar{x}_1)\tilde{x}_2 + \tilde{u}$$

$$X_1(s) = \mathcal{L}(\tilde{x}_1) \qquad X_2(s) = \mathcal{L}(\tilde{x}_2)$$

$$sX_1 = -X_1 + X_2 \qquad \Rightarrow \qquad (s+1)X_1 = X_2$$
$$sX_2 = (-6\bar{x}_1)X_1 + (-2\bar{x}_1)X_2 + U \qquad\qquad Y = X_1$$

$$(s + 2\bar{x}_1)X_2 = (-6\bar{x}_1)X_1 + U \Rightarrow (s + 2\bar{x}_1)(s+1)X_1 + 6\bar{x}_1 X_1 = U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{(s + 2\bar{x}_1)(s+1) + 6\bar{x}_1} = \frac{1}{s^2 + (2\bar{x}_1 + 1)s + 8\bar{x}_1}$$

3) Stabilità BIBO

i) se $\bar{x}_1 = \sqrt{\bar{u}}/2 \geq 0$ allora è BIBO stabile

ii) se $\bar{x}_1 = -\sqrt{\bar{u}}/2$ allora non è BIBO stabile

$\boxed{ES\ 2}$

1) $\begin{cases}(s+6)(s^2-s+a)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+a+(s+6)(2s-1)+k=0\end{cases}$ deve avere soluzione in $s=0$

$\begin{cases}6a-3k=0 \\ a-6+k=0\end{cases}$ $\quad k=2a \quad a=2 \quad k=4$

2) Asintoti

$s^2-s+2=0 \qquad s_{12}=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\sigma_a=\frac{\sum P_i-\sum z_i}{2}=\frac{1/2+j\cancel{\sqrt{7}/2}+1/2-j\cancel{\sqrt{7}/2}-6-3}{2}=-4$

punti doppi

$\begin{cases}(s+6)(s^2-s+2)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+2+(s+6)(2s-1)+k=0\end{cases}$ $\quad k=-(3s^2+10s-4)$

$s^3+5s^2-4s+12-(3s^3+10s^2-4s-9s^2-3s+12)=0$

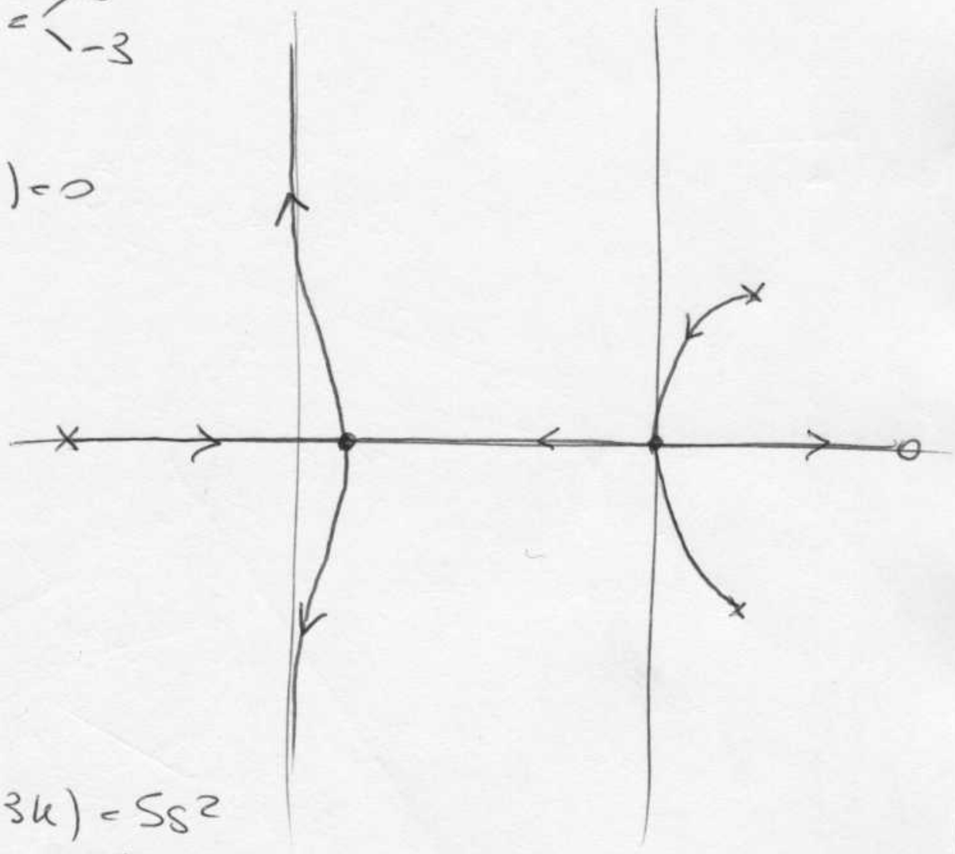
$-2s^3+4s^2+30s=0$

$s^2-2s-15=0 \qquad s_{12}=\begin{cases}5\\-3\end{cases}$

Intersezione assi

$s^3+5s^2+(k-4)s+(12-3k)=0$

3	1	$k-4$
2	5	$12-3k$
1	$\frac{8k-32}{5}$	
0	$12-3k$	



lo secondo rigo e lo terzo si annullano per $k=4$

in tal caso $5s^2+(12-3k)=5s^2$

divide il polinomio di partenza

che presenta due radici in 0

Quindi il luogo attraversa asse immaginario per $k=4$ nell'origine

3). $(s+6)(s^2-s+2)+k(s-3)=0$ $\quad s=-5$

$1(25+5+2)+k(-5-3)=0$

$32-8k=0 \quad k=4$

$s^3+s^2+\cancel{2s}+6s^2-\cancel{6s}+\cancel{12}+\cancel{4s}-\cancel{12}=0$

$s^3+5s^2=0$ radici $s_1=-5 \quad s_2=0 \quad s_3=0$

modi zero

$e^{-5t}, 1, t$

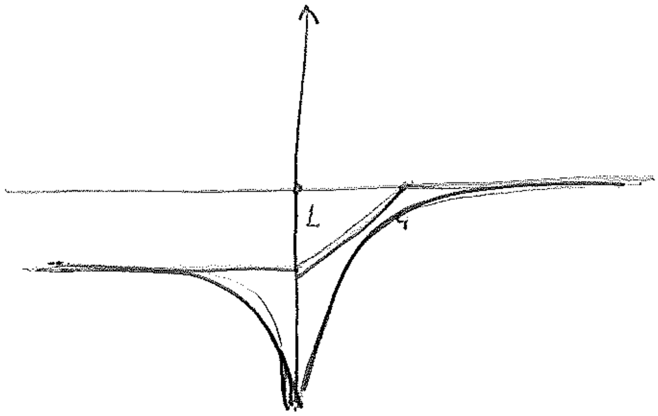
Es. 3

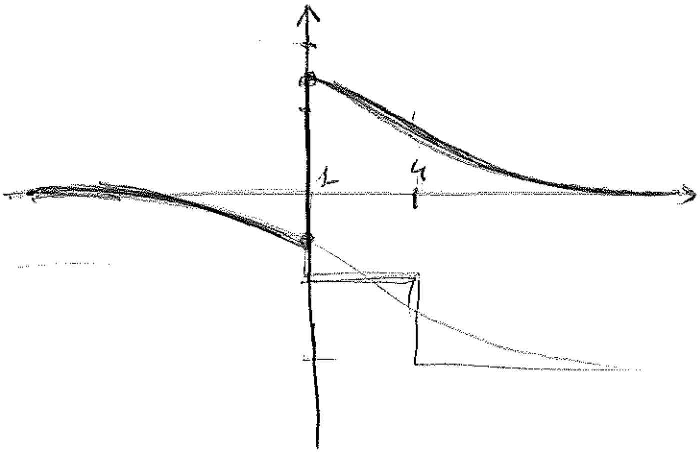
1) $G(s) = \frac{1}{4} \frac{1+s^2}{(1+s)(1+s/4)}$

punti spezzamento

$\omega_1 = 1$

$\omega_2 = 4$



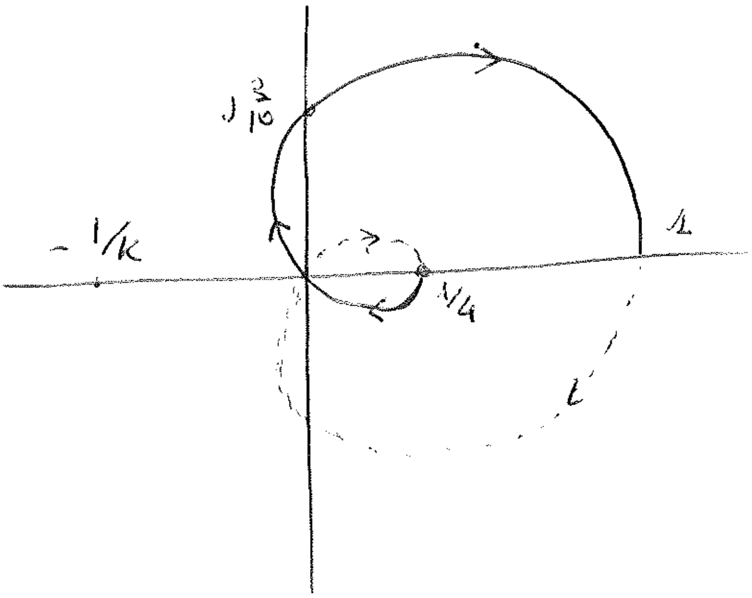


2) $G(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

$$= \frac{(1-\omega^2)(1-j\omega)(4-j\omega)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Re}\ G(j\omega) = \frac{(1-\omega^2)(4-\omega^2)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Im}\ G(j\omega) = \frac{(1-\omega^2)(-5\omega)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$$



$\omega = 0 \quad G(0) = \frac{1}{4}$

$\omega = 1 \quad G(j) = 0$

$\omega = 2 \quad \mathrm{Re} = 0 \quad \mathrm{Im} = 3/10$

3) $P = 0 \qquad Z = -N$

$-\frac{1}{k} < 0 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$ stabile $\quad k > 0$

$< -\frac{1}{k} < \frac{1}{4} \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2$ instabile $\quad k < -4$

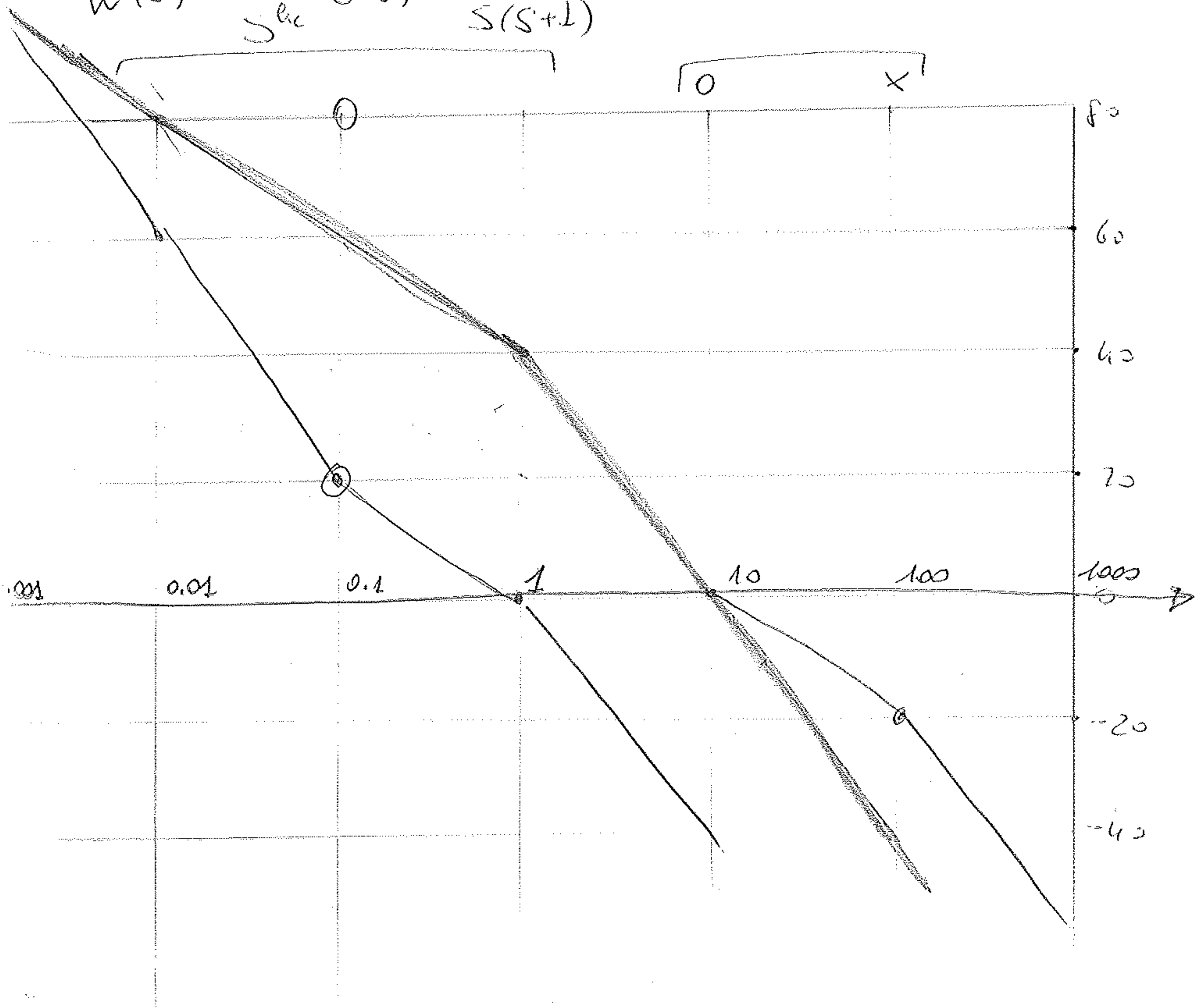
$< -\frac{1}{k} < 1 \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 1$ instabile $\quad -4 < k < -1$

$-1/k > 1 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$ stabile $\quad -1 < k < 0$

Es. 4

(a) $C(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s)$ $\quad K_c K_G = 100$, $\; h_c + h_G = 1$ $\Rightarrow$ $h_c = 1$, $\; K_c = \frac{100}{K_G} = 20$

$\hat{W}(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} G(s) = \frac{100}{s(s+1)}$



Per avere $\omega_A = 10$ $\quad \bar{C}_2(s) = \frac{1+s/10}{1+s/100}$ Rete anticipatrice

Alternativa $\bar{C}_2(s) = \frac{1+s10}{1+s100} \frac{1+s}{1+s/100}$ Sella

Per avere $\omega_A = 1$ $\quad \bar{C}_1(s) = \frac{1+s10}{1+s1000}$ Rete ritardatrice

$\boxed{\text{Es. 5}}$

$$W(s) = C(s)\,G(s) = \frac{k}{s}\,\frac{2-s}{2+s}$$

$$|W(j\omega_A)| = 1 \qquad \left|\frac{k}{j\omega_A}\,\frac{2-j\omega_A}{2+j\omega_A}\right| = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{k}{\omega_A}\,\frac{\cancel{|2-j\omega_A|}}{\cancel{|2+j\omega_A|}} \rightarrow \boxed{\omega_A = k}$$

$$m_\varphi = \pi + \angle W(j\omega_A) = \pi + \angle \frac{k}{j\omega_A}\,\frac{2-j\omega_A}{2+j\omega_A}$$

$$= \pi + \angle k - \angle j\omega_A + \angle 2-j\omega_A + \angle 2+j\omega_A$$

$$= \pi + 0 - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_A}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\omega_A}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{k}{2}$$

Il sistema è stabile per $m_\varphi > 0$ e quindi se e solo se

$$\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{k}{2} > 0 \iff \operatorname{arctg}\frac{k}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$\iff \frac{k}{2} < 1$$

$$\iff \boxed{k < 2}$$