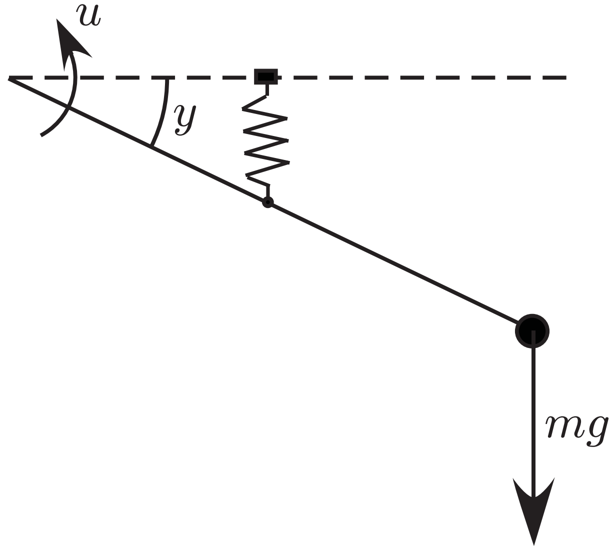
Corso di laurea in Ingegneria Biomedica e Elettronica - Appello di Fondamenti di Automatica del 25/5/2012

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

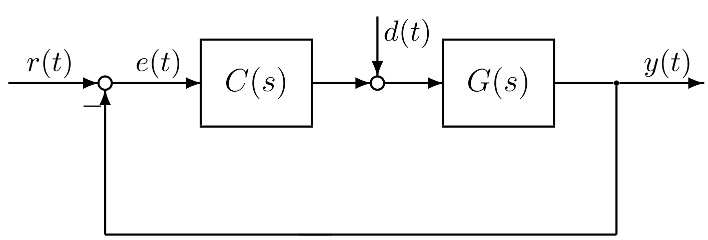
Esercizio 1. (9 punti) Si consideri il seguente sistema meccanico



Si tratta di una barra con massa m concentrata su un estremo e con l'altro estremo incernierato in un punto. La barra ha lunghezza ℓ e alla sua meta' e' attaccata una molla ideale con lunghezza a riposo nulla e con costante di elasticita' k. L'altra estremita' della molla puo' scorrere in modo che la essa puo' restare sempre verticale. Sull'estremita' incernierata della barra agisce una coppia di controllo u mentre y e' l'angolo formato dalla barra rispetto alla retta orizzontale tratteggiata (l'angolo e' positivo se la barra sta sopra la linea orizzontale tratteggiata mentre e' negativo se sta sotto). Sulla massa m agisce la forza di gravita' mg dove g e' la costante di accelerazione di gravita'.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema e le evoluzioni di equilibrio.
2. Supponiamo che se $u(t)$ e' nullo, allora un'evoluzione di equilibrio corrispondente sia $y(t) = -45^o$. Determinare la relazione tra parametri k, m, g, ℓ che ne possiamo dedurre.
3. Determinare la funzione di trasferimento del sistema linearizzato attorno al precedente punto di equilibrio.

Esercizio 2. (9 punti) Si consideri lo schema della figura seguente



$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s-3}{(s+6)(s^2-s+a)}$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che 0 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario.

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il punto doppio in -2. Determinare i rimanenti punti del luogo in corrispondenza a tale K.

Esercizio 3. (7 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)^2}\ .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

4. Supponendo che $C(s) = K$ con $K > 0$, calcolare il margine di fase al variare di K.

Esercizio 4. (5 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{2}{5s+1}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino ≤ 0.01;

2. margine di fase $m_\phi \geq 40^0$;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 2$.

ES. 1

1. Equazioni del moto

$$-m l^2 \ddot{y} - m g l \cos y - k \frac{l^2}{4} \sin y \cos y + u = 0$$

Se $u(t) = \bar{u}$ e $y(t) = \bar{y}$:

$$-m g l \cos \bar{y} - k \frac{l^2}{4} \sin \bar{y} \cos \bar{y} + \bar{u} = 0$$

2. Se $\bar{u} = 0$ $\bar{y} = -45°$

$$-m g \cancel{l} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - k \frac{l^{\cancel{2}}}{4} \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \qquad \boxed{m g = k \frac{l}{4}}$$

3) Linearizzazione attorno a $u(t) = 0$ $y(t) = -45° = \bar{y}$

$y(t) = +\bar{y} + \tilde{y}(t)$ $u(t) = \tilde{u}(t)$ $\tilde{y}, \tilde{u}$ piccoli

$$\cos(y) \simeq \cos \bar{y} - \sin(\bar{y}) \tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{y}$$

$$\sin(y) \cos(y) \simeq \sin \bar{y} \cos \bar{y} + (\cos^2 \bar{y} - \sin^2 \bar{y}) \tilde{y} = -\frac{1}{2} + 0 \tilde{y}$$

Sostituiamo

$$-m l^2 \ddot{\tilde{y}} - m g l \left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{y}\right) - \cancel{k \frac{l^2}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)} + \tilde{u} = 0$$

$$-m l^2 \ddot{\tilde{y}} - m g l \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{y} + \tilde{u} = 0$$

sia $Y(s) = \mathcal{L}(\tilde{y})$
$U(s) = \mathcal{L}(\tilde{u})$

$$\left(m l^2 s^2 + m g l \frac{\sqrt{2}}{2}\right) Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{m l^2 s^2 + m g l \sqrt{2}/2}$$

$\boxed{ES\ 2}$

1) $\begin{cases} (s+6)(s^2-s+a)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+a+(s+6)(2s-1)+k=0 \end{cases}$ deve avere soluzione in $s=0$

$\begin{cases} 6a-3k=0 & k=2a \\ a-6+k=0 & a=2 \end{cases}$ $\quad k=4$

2) Asintoti $\qquad s^2-s+2=0 \quad s_{12}=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\sigma_0=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{2}=\frac{1/2+\cancel{j\sqrt{7}/2}+1/2-\cancel{j\sqrt{7}/2}-6-3}{2}=-4$

punti doppi

$\begin{cases} (s+6)(s^2-s+2)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+2+(s+6)(2s-1)+k=0 \end{cases}$ $\quad k=-(3s^2+10s-4)$

$s^3+5s^2-4s+12-(3s^3+10s^2-4s-9s^2-30s+12)=0$

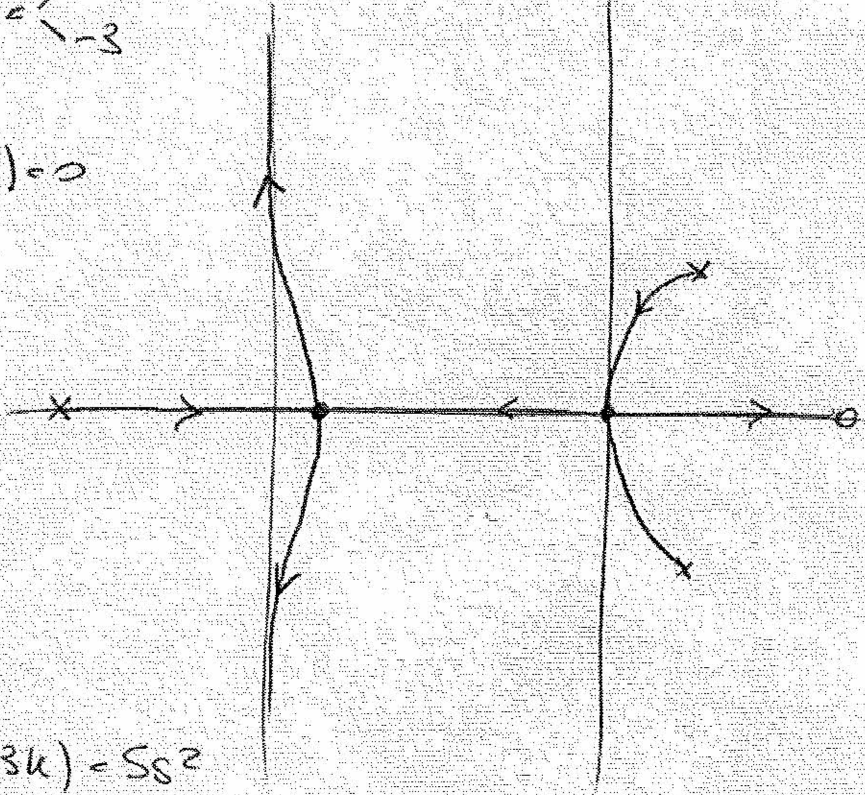
$-2s^3+4s^2+30s=0$

$s^2-2s-15=0 \quad s_{12}=\begin{cases}5\\-3\end{cases}$

Intersezione assi

$s^3+5s^2+(k-4)s+(12-3k)=0$

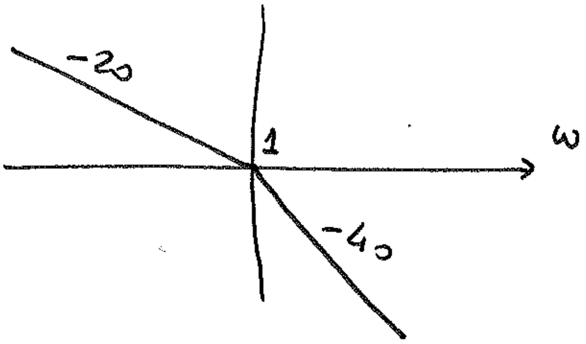
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-4 \\ 2 & 5 & 12-3k \\ 1 & \frac{8k-32}{5} & \\ 0 & 12-3k & \end{array}$$

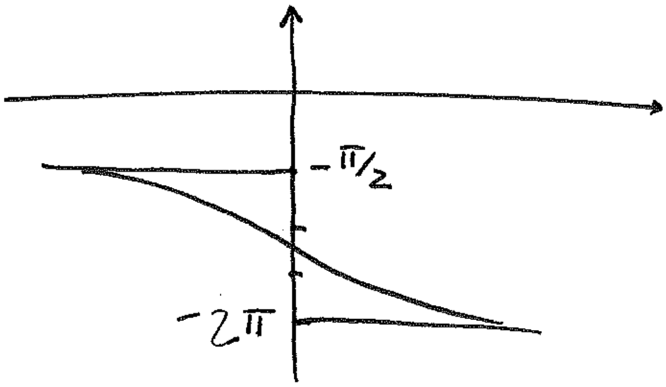


lo secondo rigo e lo terzo
si annullano per $k=4$
in tal caso $5s^2+(12-3k)=5s^2$
divide il polinomio di partenza
che presenta due radici in 0
Quindi il luogo attraversa asse immaginario per $k=4$ nell'origine

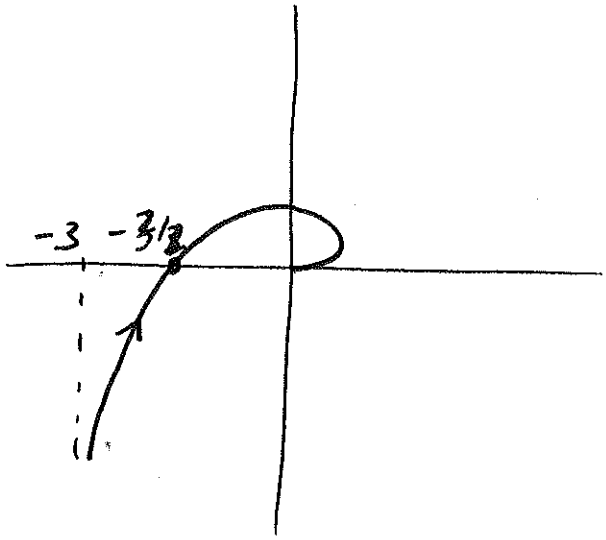
ES. 3

1. $G(s)$ è già in forma di Bode





2. $G(j\omega) = \dfrac{1-j\omega}{j\omega(1+j\omega)^2}$



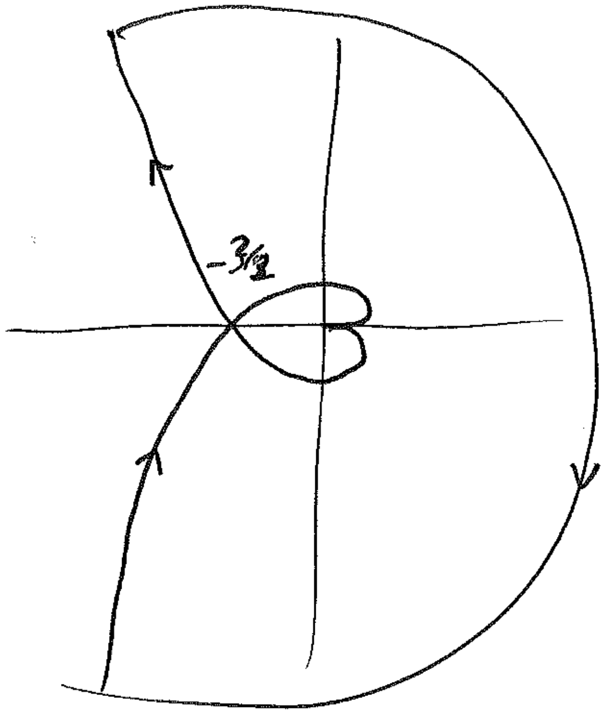
$$Re = \frac{\omega^2-3}{(1+\omega^2)^2}$$

$$Im = \frac{3\omega^2-1}{\omega(1+\omega^2)}$$

ω	Re	Im
0^+	-3	$-\infty$
$1/\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}$	0
$\sqrt{3}$	0	$1/2\sqrt{3}$

3. Criterio di Nyquist

$P = 0$



$-\frac{1}{k} < -\frac{3}{2}$ $\left(0 < k < \frac{2}{3}\right)$ $N = 0$

0 poli instabili in catena chiusa

$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{k} < 0$ $\left(k > \frac{2}{3}\right)$ $N = -2$

2 poli instabili in catena chiusa

$-\frac{1}{k} > 0$ $(k < 0)$ $N = -1$

1 polo instabile in catena chiusa

4. $|kG(j\omega_A)| = 1 \iff |kG(j\omega_A)|^2 = 1$

$$k^2 \frac{\cancel{1+\omega_A^2}}{\omega_A^2 (1+\omega_A^2)^{\cancel{2}}} = 1 \qquad \omega_A^4 + \omega_A^2 - k^2 = 0$$

Sia $x = \omega_A^2$ $\qquad x^2 + x - k^2 = 0 \qquad x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k^2}}{2}$

Siccome $x > 0$ allora $\qquad x = \frac{\sqrt{4k^2+1} - 1}{2}$ $\qquad \omega_A = \sqrt{\frac{\sqrt{4k^2+1} - 1}{2}}$

Margine di fase

$$M\varphi = \pi + \angle kG(j\omega_A) = \pi + \overset{k>0}{\cancel{\angle k}} + \angle 1 - j\omega_A - \overset{-\pi/2}{\angle j\omega_A} - 2\angle 1 + j\omega_A$$

$$= \frac{\pi}{2} - 3\angle 1 + j\omega_A = \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{artg}(\omega_A)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{artg} \sqrt{\frac{\sqrt{4k^2+1} - 1}{2}}$$

$\boxed{ES\ 4}$

1) $K_c K_G \geq \frac{1}{0{,}01} = 100$

$K_G = 2 \quad K_c = 50 \quad h_c = h - h_G = 0$

$\hat{W}(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} G(s) = \frac{100}{1+5s}$

$T = 5$

punto di spezzamento $\frac{1}{T} = 0{,}2$

introduco un polo in 0,2
e uno zero in 2

$\hat{C}(s) = \frac{1+0{,}5s}{1+5s}$

$C(s) = 50\,\frac{1+0{,}5s}{1+5s}$