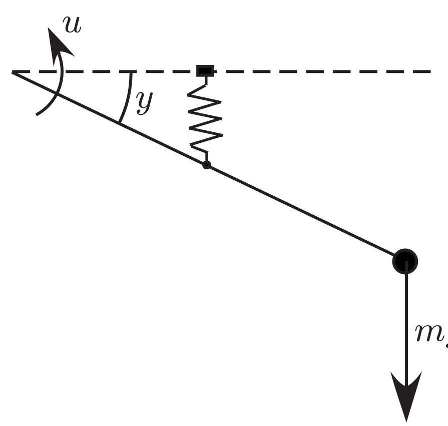
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 23/2/2015

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

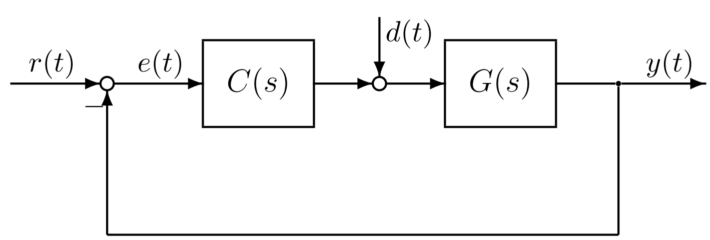
**Esercizio 1.** Si consideri il seguente sistema meccanico




Si tratta di una barra con massa $m$ concentrata su un estremo e con l'altro estremo incernierato in un punto. La barra ha lunghezza $\ell$ e alla sua meta' e' attaccata una molla ideale con lunghezza a riposo nulla e con costante di elasticita' $k$. L'altra estremita' della molla puo' scorrere in modo che la essa puo' restare sempre verticale. Sull'estremita' incernierata della barra agisce una coppia di controllo $u$ mentre $y$ e' l'angolo formato dalla barra rispetto alla retta orizzontale tratteggiata (l'angolo e' positivo se la barra sta sopra la linea orizzontale tratteggiata mentre e' negativo se sta sotto). Sulla massa $m$ agisce la forza di gravita' $mg$ dove $g$ e' la costante di accelerazione di gravita'.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema e le evoluzioni di equilibrio.
2. Supponiamo che se $u(t)$ e' nullo, allora un'evoluzione di equilibrio corrispondente sia $y(t) = -45^o$. Determinare la relazione tra parametri $k, m, g, \ell$ che ne possiamo dedurre.
3. Determinare la funzione di trasferimento del sistema linearizzato attorno al precedente punto di equilibrio.

**Esercizio 2.** Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.




Si supponga che

$$C(s) = K\frac{1}{s+a} \qquad G(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)^2}$$

dove $a$ e' un parametro reale.

1. Determinare $a$ in modo tale che $-1$ sia punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si fissi $a$ pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e punti doppi.
3. Determinare i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa ha solo modi non oscillatori.
4. Determinare i valori di $K$ tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo $e^{-t}$. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

**Esercizio 3.** Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)^2} \, .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale $K$ (negativo e positivo);
4. Supponendo che $C(s) = K$ con $K > 0$, calcolare il margine di fase al variare di $K$.

**Esercizio 4.** Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{2}{5s+1}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino $\leq 0.01$;
2. margine di fase $m_\phi \geq 40^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 2$.

**Esercizio 5.** Dare la definizione della BIBO stabilita'. Indicare come si caratterizza la BIBO stabilita' in termini delle caratteristiche dalla risposta impulsiva e dare un cenno della dimostrazione.

## $\boxed{\text{ES. 1}}$

1. Equazioni del moto

$$-m l^2 \ddot{y} - m g l \cos y - k \frac{l^2}{4} \sin y \cos y + u = 0$$

Se $u(t) = \bar{u}$ e $y(t) = \bar{y}$

$$-m g l \cos \bar{y} - k \frac{l^2}{4} \sin \bar{y} \cos \bar{y} + \bar{u} = 0$$

2. Se $\bar{u} = 0$ $\bar{y} = -45°$

$$-m g \cancel{l} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} - k \frac{l^{\cancel{2}}}{4} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \qquad \boxed{m g = -\frac{k l}{4\sqrt{2}}}$$

3) Linearizzazione attorno a $u(t) = 0$ $y(t) = -45° = \bar{y}$

$y(t) = +\bar{y} + \tilde{y}(t)$ $u(t) = \tilde{u}(t)$ $\tilde{y}, \tilde{u}$ piccoli

$$\cos(y) \simeq \cos \bar{y} - \sin(\bar{y}) \tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{y}$$

$$\sin(y) \cos(y) \simeq \sin \bar{y} \cos \bar{y} + (\cos^2 \bar{y} - \sin^2 \bar{y}) \tilde{y} = -\frac{1}{2} + 0 \tilde{y}$$

Sostituiamo

$$-m l^2 \ddot{\tilde{y}} - m g l \left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{y}\right) - \cancel{k \frac{l^2}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)} + \tilde{u} = 0$$

$$-m l^2 \ddot{\tilde{y}} - m g l \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{y} + \tilde{u} = 0$$

sia $Y(s) = \mathcal{L}(\tilde{y})$
$U(s) = \mathcal{L}(\tilde{u})$

$$\left(m l^2 s^2 + m g l \frac{\sqrt{2}}{2}\right) Y(s) = U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{m l^2 s^2 + m g l \sqrt{2}/2}$$

## ES. 2

1) $\begin{cases} (s+a)(s+2)^2 + k(s^2+1) = 0 \\ (s+2)^2 + 2(s+2)(s+a) + 2ks = 0 \end{cases}$ $\xRightarrow{s=-1}$ $\begin{cases} -1+a+2k=0 \\ 1-2+2a-2k=0 \end{cases}$

$-2+3a=0 \quad a=\frac{2}{3}$

2) Punti doppi

$$\begin{cases} \left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2)^2 + k(s^2+1) = 0 \\ (s+2)^2 + 2(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right) + 2ks = 0 \end{cases} \qquad k = -\frac{(s+2)\left[s+2+2s+\frac{4}{3}\right]}{2s}$$

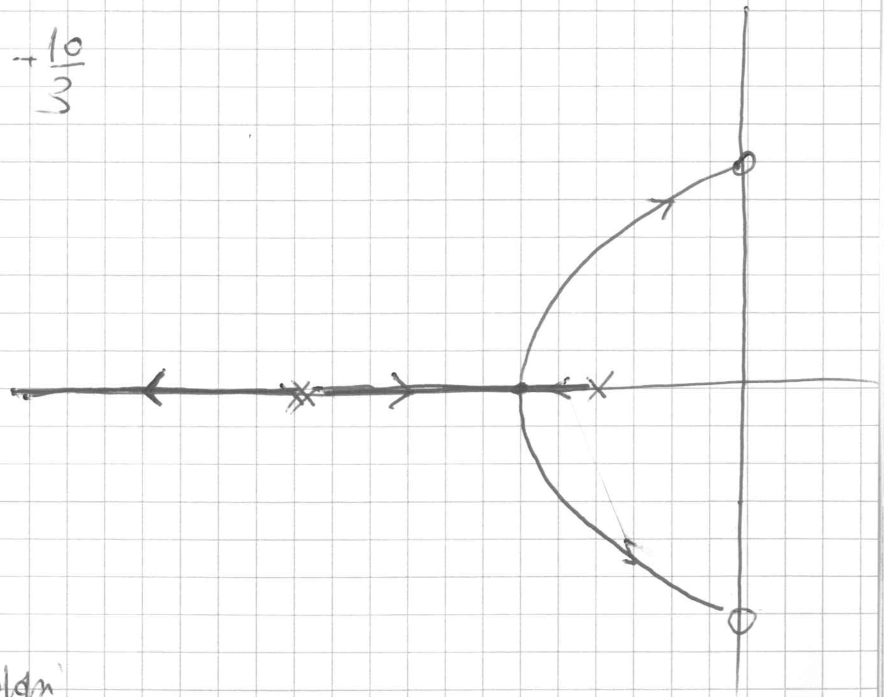
$$\left(s+2/3\right)(s+2)^2 - \frac{\cancel{(s+2)}\left(3s+\frac{10}{3}\right)}{2s}(s^2+1) = 0$$

$$2s\left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2) - \left(3s+\frac{10}{3}\right)(s^2+1) = 0$$

$$2s^3 + \frac{16}{3}s^2 + \frac{8}{3}s - 3s^3 - \frac{10}{3}s^2 - 3s - \frac{10}{3} = 0$$

$$s^3 - \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} = 0$$

$$\begin{array}{l|l} s^3 - \frac{2}{3}s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} & s+1 \\ \hline s^3 + s^2 & s^2 - \frac{5}{3}s + \frac{10}{3} \\ \hline -\frac{5}{3}s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} & \\ -\frac{5}{3}s^2 - \frac{5}{3}s & \\ \hline \frac{10}{3}s + \frac{10}{3} & \end{array}$$



Discriminante

$\Delta = 9 - \frac{40}{3} < 0$

Non ci sono altri punti doppi

3) Bisogna trovare $k$ in modo tale che $-1$ sia radice. Si ottiene

$$\left(-1+\frac{2}{3}\right)(-1+2)^2+k(1+1)=0 \qquad k=\frac{1/3}{2}=\frac{1}{6}$$

Il polinomio per quel valore di $k$ è

$$\left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2)^2+\frac{1}{6}(s^2+1)=0$$

$$s^3+4s^2+4+\frac{2}{3}s^2+\frac{8}{3}s+\frac{8}{3}+\frac{1}{6}s^2+\frac{1}{6}=0$$

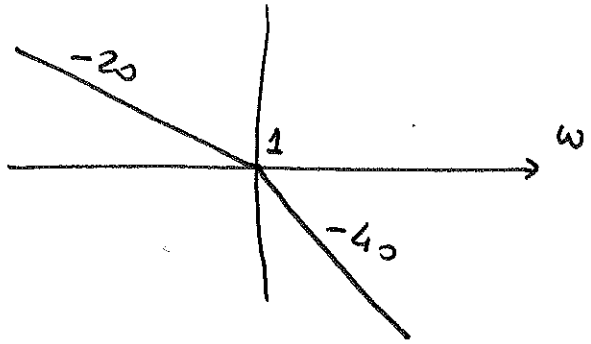
$$s^3+\frac{29}{6}s^2+\frac{20}{3}s+\frac{17}{3}=0$$

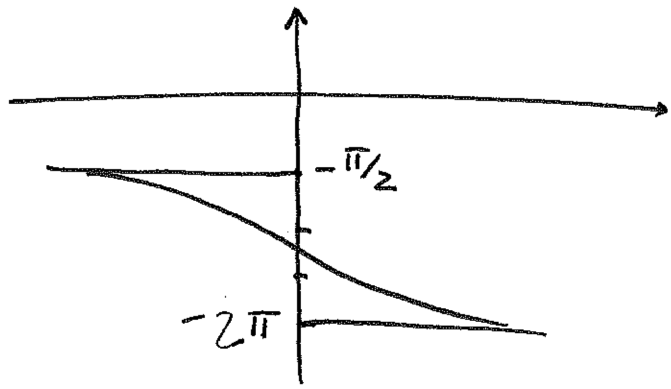
$$\begin{array}{l|l}
s^3+\frac{29}{6}s^2+\frac{20}{3}s+\frac{17}{\cancel{3}\,6} & s^2+2s+1 \\ \hline
s^3+2s^2+s & s+\frac{17}{6} \\ \hline
\quad \frac{17}{6}s^2+\frac{17}{3}s+\frac{17}{6} &
\end{array}$$

I modi sono $e^{-t}$, $te^{-t}$, $e^{-\frac{17}{6}t}$

# ES. 3

1. $G(s)$ è già in forma di Bode



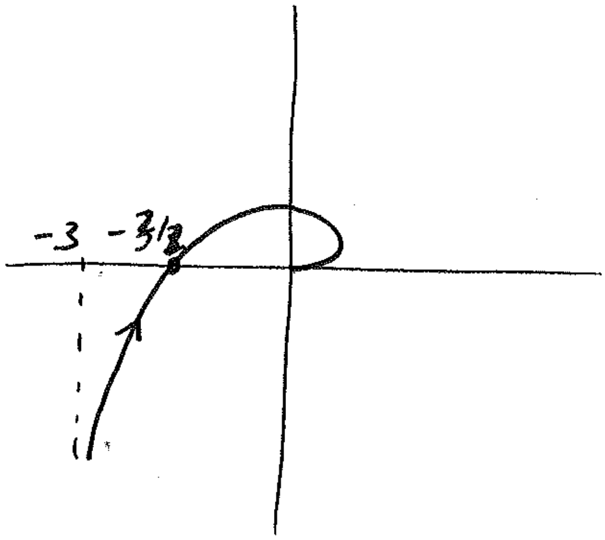




2. $G(j\omega) = \dfrac{1 - j\omega}{j\omega(1 + j\omega)^2}$

$$Re = \frac{\omega^2 - 3}{(1+\omega^2)^2}$$

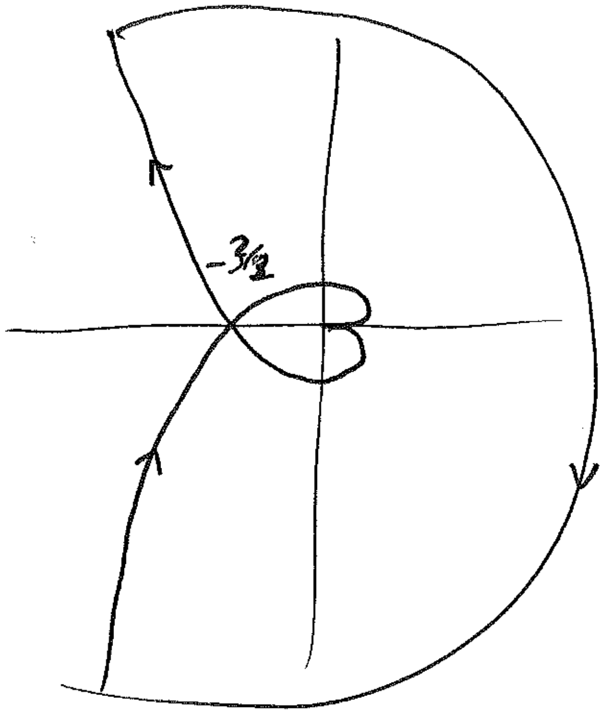
$$Im = \frac{3\omega^2 - 1}{\omega(1+\omega^2)}$$

| $\omega$ | Re | Im |
|---|---|---|
| $0^+$ | $-3$ | $-\infty$ |
| $1/\sqrt{3}$ | $-\frac{3}{2}$ | $0$ |
| $\sqrt{3}$ | $0$ | $1/2\sqrt{3}$ |
| | | |



3. Criterio di Nyquist

$P=0$




$-\frac{1}{k} < -\frac{3}{2} \quad \left(0<k<\frac{2}{3}\right) \quad N=0$

0 poli instabili in catena chiuso

$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{k} < 0 \quad \left(k > \frac{2}{3}\right) \quad N=-2$

2 poli instabili in catena chiuso

$-\frac{1}{k} > 0 \quad (k<0) \quad N=-1$

1 polo instabile in catena chiuso

4. $|kG(j\omega_A)| = 1 \iff |kG(j\omega_A)|^2 = 1$

$k^2 \frac{\cancel{1+\omega_A^2}}{\omega_A^2(1+\omega_A^2)^{\cancel{2}}} = 1 \qquad \omega_A^4 + \omega_A^2 - k^2 = 0$

Sia $x = \omega_A^2 \qquad x^2 + x - k^2 = 0 \qquad x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k^2}}{2}$

Siccome $x>0$ allora $x = \frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2} \qquad \omega_A = \sqrt{\frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2}}$

Margine di fase

$M\varphi = \pi + \angle kG(j\omega_A) = \pi + \underbrace{\cancel{\angle k}}_{k>0\ \to\ 0} + \angle 1-j\omega_A - \underbrace{\angle j\omega_A}_{-\pi/2} - 2\angle 1+j\omega_A$

$= \frac{\pi}{2} - 3\angle 1+j\omega_A = \frac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{artg}(\omega_A)$

$= \frac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{artg}\sqrt{\frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2}}$

## ES 4

1) $K_c K_G \geq \frac{1}{0{,}01} = 100$

$K_G = 2 \quad K_c = 50 \quad h_c = h - h_G = 0$

$\hat{W}(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} G(s) = \frac{100}{1+5s}$

$T = 5$

punto di tessamento $\frac{1}{T} = 0{,}2$

introduco un polo in $0{,}2$
e uno zero in $2$

$\hat{C}(s) = \frac{1+0{,}5s}{1+5s}$

$C(s) = 50 \frac{1+0{,}5s}{1+5s}$