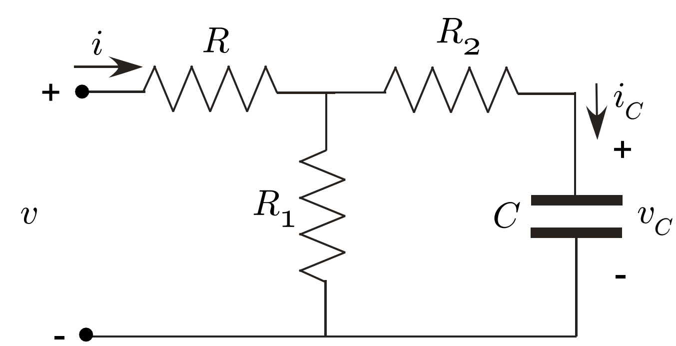
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 19/7/2018

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico



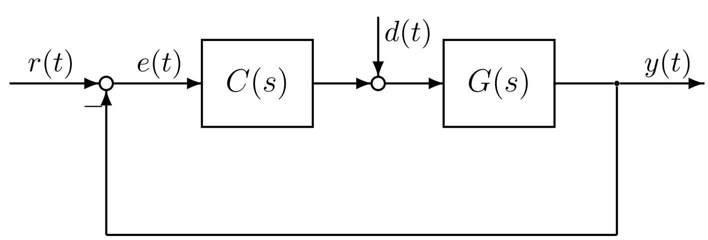
Supponiamo che la resistenza R sia non lineare tale che legare la tensione e corrente attraverso la relazione

$$v_R = f(i_R)$$

dove $f(x) = Rx^3$ dove R e' una costante maggiore di zero.

1. Trovare le equazioni che legano le variabili $i(t), v(t), i_C(t), v_C(t)$.
2. Determinare le evoluzioni di equilibrio $i(t) = \bar{i}, v(t) = \bar{v}, i_C(t) = \bar{i}_C, v_C(t) = \bar{v}_C$.
3. Consideriamo ora l'evoluzione di equilibrio associata all'ingresso $i(t) = \bar{i} = 0$ e siano $\tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}, \tilde{v}(t) := v(t) - \bar{v}, \tilde{i}_C(t) := i_C(t) - \bar{i}_C, \tilde{v}_C(t) := v_C(t) - \bar{v}_C$. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}$ e l'uscita $\tilde{v}(t) := v(t) - \bar{v}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s^2 + a}{s^2 + s + 1}$$

con $a > 0$.

1. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiuso al variare di K e a. Determinare la funzione sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.
2. Supponiamo che $a = 4, K = 1$ e che $r(t) = \cos(2t)$ e che $d(t) = 2$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(s+4)^2}{s(s+1)(s+a)}$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che $-\frac{1}{2}$ é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario).

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale la risposta impulsiva in catena chiusa contiene tutti modi non oscillatori.

4. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale la risposta impulsiva in catena chiusa contiene il modo $e^{-\frac{1}{2}t}$. Determinare i rimanenti modi.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)^2} \, .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

4. Supponendo che $C(s) = K$ con $K > 0$, calcolare il margine di fase al variare di K.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{10}{s + 1/2}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino $\simeq 0.01$;

2. margine di fase $m_\varphi \simeq 45^0$;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 5$.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) $\begin{cases} v = f(i) + R_1(i - i_c) \\ v = f(i) + R_2 i_c + v_c \\ i_c = C\, v_c^{(1)} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \bar{v} = f(\bar{i}) + R_1(\bar{i} - \bar{i}_c) \\ \bar{v} = f(\bar{i}) + R_2 \bar{i}_c + \bar{v}_c \\ \bar{i}_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{v} = f(\bar{i}) + R_1 \bar{i} \\ \bar{v}_c = R_1 \bar{i} \\ \bar{i}_c = 0 \end{cases}$

3) Se $\bar{i} = 0$ allora $\bar{v} = 0$, $\bar{v}_c = 0$ e $\bar{i}_c = 0$

Sostituendo nelle equazioni iniziali ~~ste~~

$v(t) = \bar{v} + \tilde{v}(t)$, $i(t) = \bar{i} + \hat{i}(t)$, $i_c(t) = \bar{i}_c + \hat{i}_c(t)$ e $v_c(t) = \bar{v}_c + \tilde{v}_c(t)$

$$\begin{cases} \bar{v} + \tilde{v} = f(\bar{i} + \hat{i}) + R_1(\bar{i} + \hat{i} - \bar{i}_c - \tilde{i}_c) \\ \bar{v} + \tilde{v} = f(\bar{i} + \hat{i}) + R_2(\bar{i}_c + \hat{i}_c) + \bar{v}_c + \tilde{v}_c \\ \bar{i}_c + \hat{i}_c = C(\bar{v}_c + \tilde{v}_c)^{(1)} \end{cases} \xrightarrow[\substack{\bar{v}=0 \\ \bar{i}=0 \\ \bar{i}_c=0 \\ \bar{v}_c=0}]{} \begin{cases} \tilde{v} = f(\tilde{i}) + R_1(\hat{i} - \tilde{i}_c) \\ \tilde{v} = f(\tilde{i}) + R_2 \tilde{i}_c + \tilde{v}_c \\ \tilde{i}_c = C \tilde{v}_c^{(1)} \end{cases}$$

Poichè $\hat{i}$ è piccolo allora

$f(\tilde{i}) \simeq f'(0)\hat{i}$ e quindi

$$\begin{cases} \tilde{v} = f'(0)\tilde{i} + R_1(\hat{i} - \tilde{i}_c) \\ \tilde{v} = f'(0)\tilde{i} + R_2 \hat{i}_c + \tilde{v}_c \\ \tilde{i}_c = C \tilde{v}_c^{(1)} \end{cases} \xrightarrow{f'(0)=0} \begin{cases} \tilde{v} = \cancel{f} R_1 \tilde{i} - R_1 \tilde{i}_c \\ \tilde{v} = R_2 \tilde{i}_c + \tilde{v}_c \\ \tilde{i}_c = C \tilde{v}_c^{(1)} \end{cases} \mathcal{L} \Rightarrow \begin{cases} \hat{V} = R_1 \hat{I} - R_1 \hat{I}_c \\ \tilde{V} = R_2 \hat{I}_c + \hat{V}_c \\ \hat{I}_c = sC \hat{V}_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{V} = R_1 \tilde{I} - sR_1 C \hat{V}_c \\ \tilde{V} = sR_2 C \hat{V}_c + \tilde{V}_c \end{cases} \Rightarrow \hat{V}_c = \frac{1}{1 + sR_2 C} \tilde{V} \Rightarrow \hat{V} = R_1 \tilde{I} - \frac{sR_1 C}{1 + sR_2 C} \tilde{V}$$

$$\left(1 + \frac{sR_1 C}{1 + sR_2 C}\right) \tilde{V} = R_1 \tilde{I}$$

$$\frac{\hat{V}}{\tilde{I}} = \frac{R_1}{1 + \frac{sR_1 C}{1 + sR_2 C}} = \frac{R_1(1 + sR_2 C)}{1 + s(R_1 + R_2)C}$$ funzione di trasferimento

ES. 2

1) $T_{zy}(s) = \dfrac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \dfrac{k(s^2+a)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)} = \dfrac{k(s^2+a)}{s^3+(k+1)s^2+s+ka}$

Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & k+1 & ka \\ 1 & \frac{k+1-ka}{k+1} & \\ 0 & ka & \end{array}$$

$\begin{cases} k+1>0 \\ k+1-ka>0 \\ ka>0 \iff k>0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} k>0 \\ k+1-ka>0 \end{cases}$

Se $0 \leq a \leq 1$ allora $\forall k>0$

Se $a>1$ allora $0<k<\dfrac{1}{a-1}$

$$S_a^{T_{zy}} = \frac{a}{T_{zy}} \frac{dT_{zy}}{da} = a \frac{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)}{k(s^2+a)} \frac{k[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]-k^2(s^2+a)}{[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]^2}$$

$$= \frac{a\,s(s^2+s+1)}{(s^2+a)[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]}$$

2) $T_{zy}(s) = \dfrac{s^2+4}{s(s^2+s+1)+(s^2+4)}$ $\qquad T_{dy}(s) = \dfrac{s(s^2+4)}{s(s^2+s+1)+(s^2+4)}$

Se $z(t) = \cos(2t)$ e $d(t)=0$ allora

$y(t) = |T_{zy}(2j)| \cos(2t + \angle T_{zy}(2j)) = 0$ dato che

$T_{zy}(2j) = \dfrac{(2j)^2+4}{2j((2j)^2+2j+1)+((2j)^2+4)} = 0$

Se $z(t)=0$ e $d(t)=2$ allora

$y(t) = T_{dy}(0)\,2 = 0$ dato che $T_{dy}(0)=0$

Tuttavia si noti che per $k=1$ e $a=4$ il sistema non è stabile ($k+1-ka<0$) e quindi $y(t)$ tenderà all'infinito.

$$\boxed{ES.3}$$

1) $\begin{cases} s(s+1)(s+a)+k(s+4)^2=0 \\ (s+1)(s+a)+s(s+a)+s(s+1)+2k(s+4)=0 \end{cases} \xrightarrow{s=-\frac{1}{2}} \begin{cases} -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})+k\frac{49}{4}=0 \\ \cancel{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}-\cancel{\frac{1}{2}(a-\frac{1}{2})}-\frac{1}{4}+7k=0 \end{cases}$

$\begin{cases} -a+\frac{1}{2}+49k=0 \\ k=\frac{1}{28} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} a=49\frac{1}{28}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4} \\ k=\frac{1}{28} \end{cases}$ $\quad a=\frac{9}{4}$, $k=1/28$

2) Altri punti doppi

$$\begin{cases} s(s+1)(s+9/4)+k(s+4)^2=0 \\ (s+1)(s+\frac{9}{4})+s(s+\frac{9}{4})+s(s+1)+2k(s+4)=0 \end{cases} \qquad k=-\frac{s(s+1)(s+9/4)}{(s+4)^2}$$

$$s^2+\frac{13}{4}s+\frac{9}{4}+s^2+\frac{9}{4}s+s^2+s-2\frac{s(s+1)(s+9/4)}{(s+4)^{\cancel{2}}}\cancel{(s+4)}=0$$

$$(s+4)\left(3s^2+\frac{13}{2}s+\frac{9}{4}\right)-2\left(s^3+\frac{13}{4}s^2+\frac{9}{4}s\right)=0$$

$$s^3+12s^2+\frac{95}{4}s+9=0$$

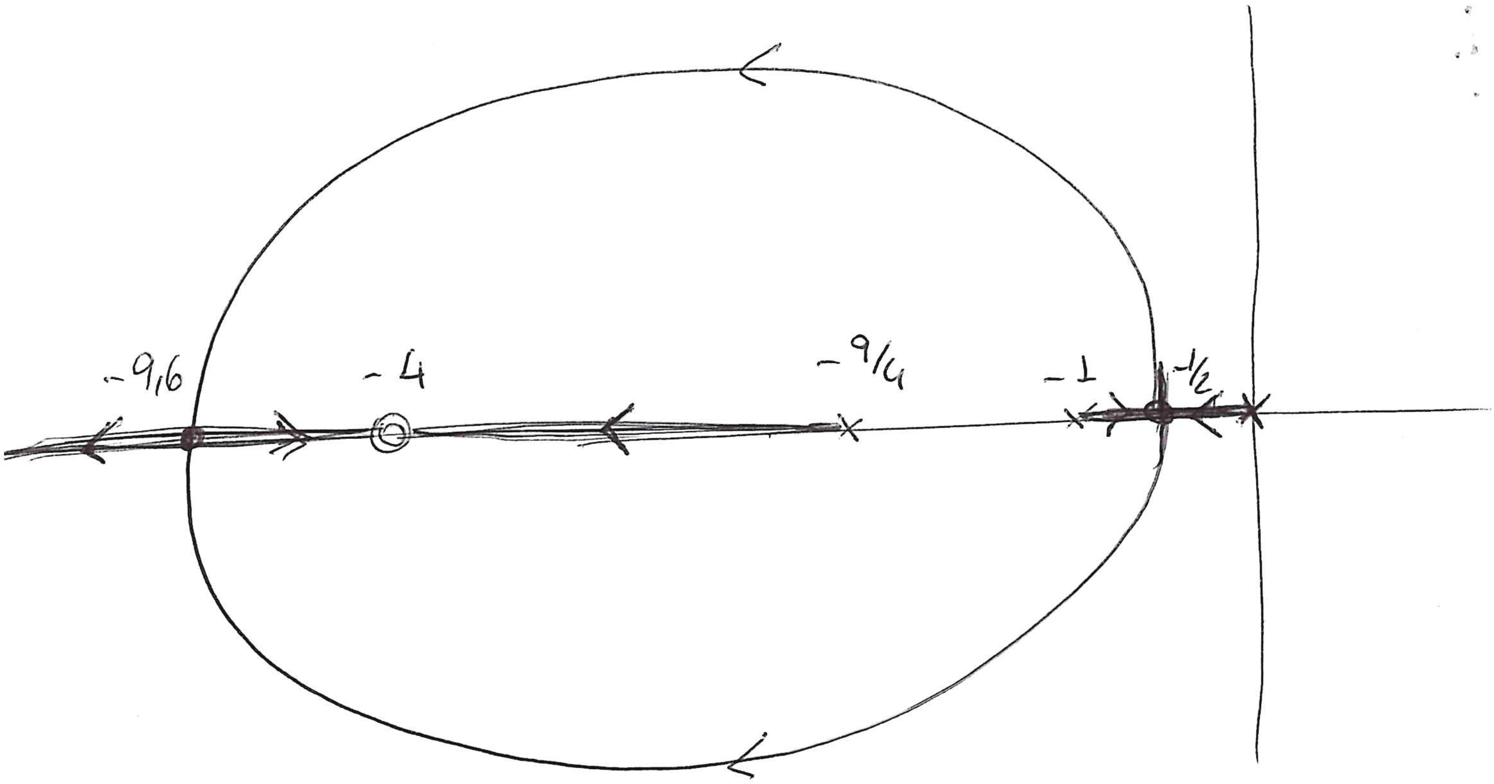
Supponiamo che $s=-\frac{1}{2}$ è punto doppio e quindi soluzione. Il polinomio è quindi divisibile per $s+\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l|l} s^3+12s^2+\frac{95}{4}s+9 & s+\frac{1}{2} \\ \hline s^3+\frac{1}{2}s^2 & s^2+\frac{23}{2}s+18 \\ \hline \frac{23}{2}s^2+\frac{95}{4}s+9 & \\ \frac{23}{2}s^2+\frac{23}{4}s & \\ \hline \cancel{\frac{72}{4}}^{18}s+9 & \\ 18s+9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\longrightarrow s_{12}=\frac{-23/2\pm\sqrt{(23/2)^2-4\cdot 18}}{2}$$

$s_1=-9{,}63$, $k=19{,}4$

$s_2=-1{,}86$



3) Le tre radici devono essere tutte e tre reali

Quindi $\quad 0 \le K < \frac{1}{28} \qquad K > 19,4$

4) $e^{-\frac{1}{2}t}$ è un modo del sistema per K tali che $-\frac{1}{2}$ è radice e quindi per $K = \frac{1}{28}$. Per quel valore di K, il polinomio è

$$s(s+1)(s+\tfrac{9}{4}) + \tfrac{1}{28}(s+4)^2 = s^3 + \tfrac{13}{4}s^2 + \tfrac{9}{4}s + \tfrac{1}{28}s^2 + \tfrac{2}{7}s + \tfrac{4}{7}$$
$$= s^3 + \tfrac{92}{28}s^2 + \tfrac{71}{28}s + \tfrac{4}{7}$$

Sapendo che è divisibile per $(s+\frac{1}{2})^2 = s^2 + s + \frac{1}{4}$

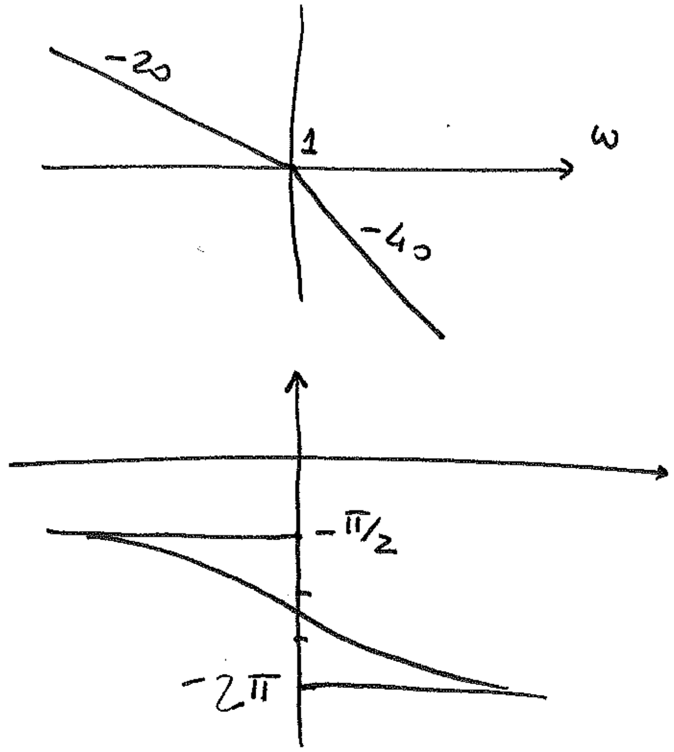
$$\begin{array}{l|l} s^3 + \frac{23}{7}s^2 + \frac{71}{28}s + \frac{4}{7} & s^2 + s + \frac{1}{4} \\ \cline{2-2} s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s & s + \frac{16}{7} \\ \hline \quad \frac{16}{7}s^2 + \cancel{\frac{64}{28}}\frac{16}{7}s + \frac{4}{7} & \\ \quad \frac{16}{7}s^2 + \frac{16}{7}s + \frac{4}{7} & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

Modi sono

$e^{-\frac{1}{2}t}$, $te^{-\frac{1}{2}t}$ e $e^{-\frac{16}{7}t}$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

1. $G(s)$ è già in forma di Bode

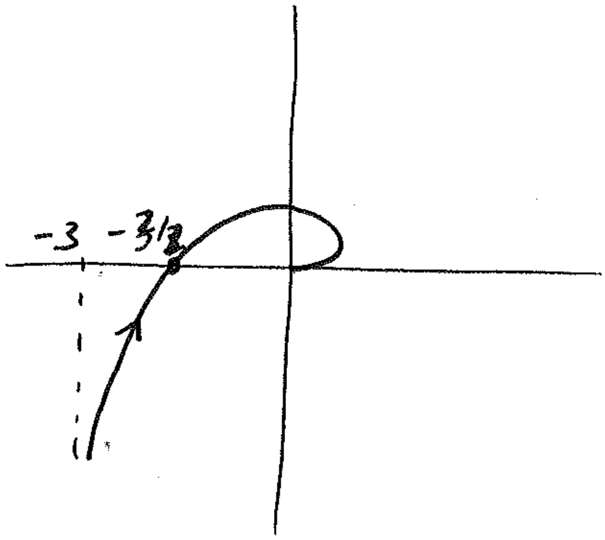


2. $G(j\omega) = \dfrac{1 - j\omega}{j\omega(1+j\omega)^2}$

$$Re = \frac{\omega^2 - 3}{(1+\omega^2)^2}$$

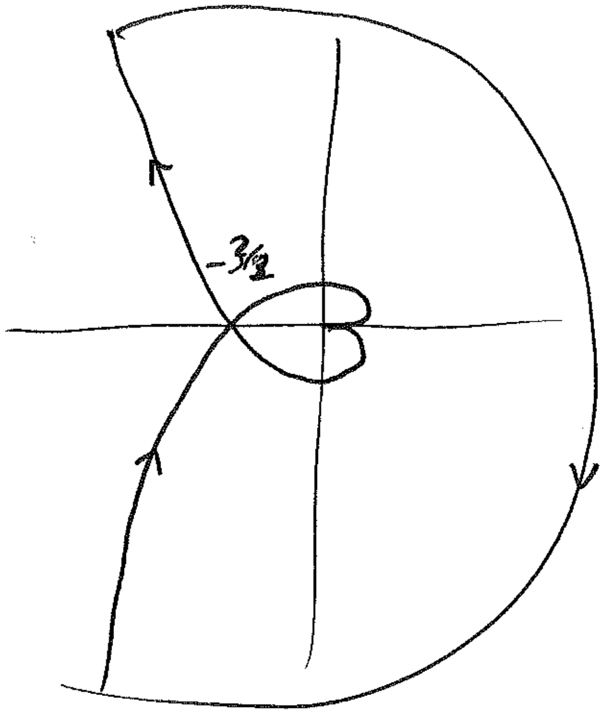
$$Im = \frac{3\omega^2 - 1}{\omega(1+\omega^2)}$$

ω	Re	Im
0^+	-3	$-\infty$
$1/\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}$	0
$\sqrt{3}$	0	$1/2\sqrt{3}$



3. Criterio di Nyquist

$P=0$



$-\frac{1}{k} < -\frac{3}{2} \quad \left(0<k<\frac{2}{3}\right) \quad N=0$

0 poli instabili in catena chiuso

$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{k} < 0 \quad \left(k > \frac{2}{3}\right) \quad N=-2$

2 poli instabili in catena chiusa

$-\frac{1}{k} > 0 \quad (k<0) \quad N=-1$

1 polo instabile in catena chiusa

4. $|kG(j\omega_A)| = 1 \iff |kG(j\omega_A)|^2 = 1$

$k^2 \frac{\cancel{1+\omega_A^2}}{\omega_A^2(1+\omega_A^2)^{\cancel{2}}} = 1 \qquad \omega_A^4 + \omega_A^2 - k^2 = 0$

Sia $x = \omega_A^2 \qquad x^2 + x - k^2 = 0 \qquad x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4k^2}}{2}$

Siccome $x>0$ allora $x = \frac{\sqrt{4k^2+1} - 1}{2}$

$\omega_A = \sqrt{\frac{\sqrt{4k^2+1} - 1}{2}}$

Margine di fase

$M_\varphi = \pi + \angle kG(j\omega_A) = \pi + \underbrace{\cancel{\angle k}}_{k>0} + \angle 1-j\omega_A - \underbrace{\angle j\omega_A}_{-\pi/2} - 2\angle 1+j\omega_A$

$= \frac{\pi}{2} - 3\angle 1+j\omega_A = \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{arctg}(\omega_A)$

$= \frac{\pi}{2} - 3 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2}}$

ES. 5

$K_C K_G = \frac{1}{0{,}01} - 1 = 99 \simeq 100$ $\qquad G(s) = \frac{20}{1+2s}$

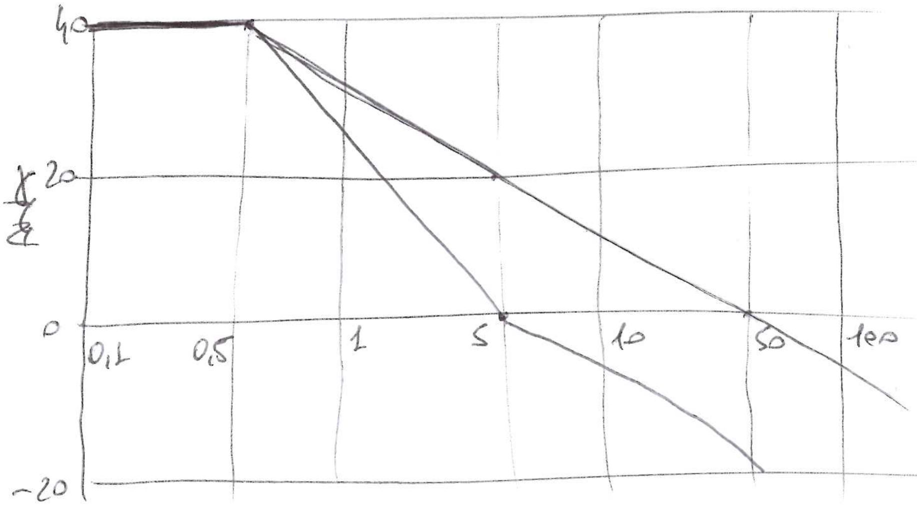
Siccome $k_G = 20$ allora $K_C = \frac{100}{20} = 5$

$h_C + h_G = 0 \Rightarrow h_C = 0 - h_G = 0$ perché $h_G = 0$

$\hat{W} = \frac{k_C}{s^{h_C}} G(s) = \frac{100}{1+2s}$

punto di spezzamento

$\frac{1}{2} = 0{,}5$



Introduciamo un polo in $\omega = 0{,}5$ zero in $\omega = 5$

$$\hat{C}(s) = \frac{1 + s/5}{1 + s/0{,}5} = \frac{1 + 0{,}2s}{1 + 2s}$$

$$C(s) = 5\,\frac{1 + 0{,}2s}{1 + 2s}$$