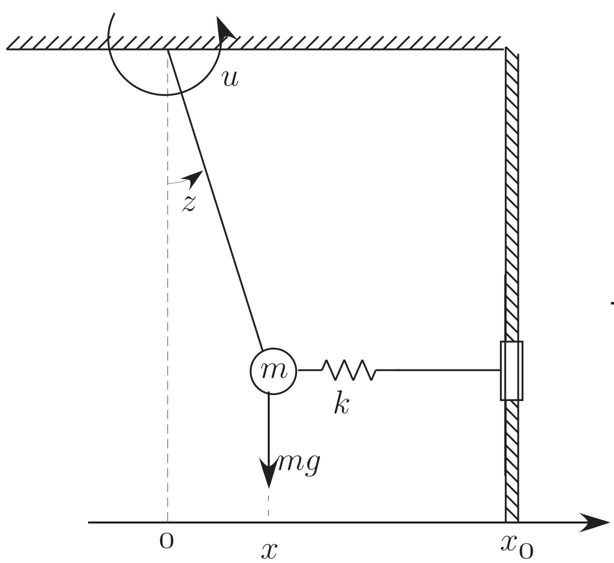
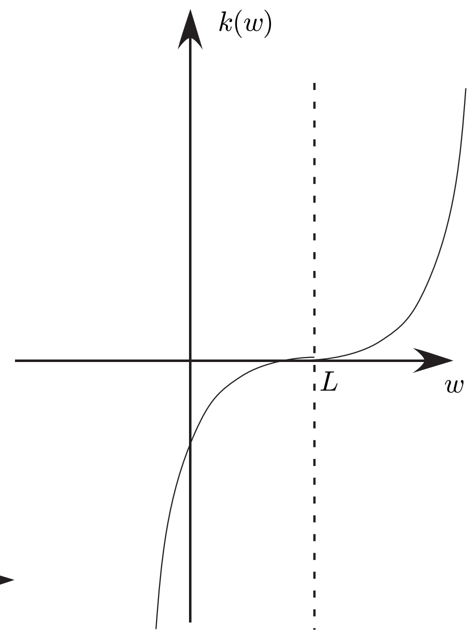
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Appello di Fondamenti di Automatica del 13/07/2011

Cognome e nome: ______________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.





Si tratta di un pendolo sul quale agisce una coppia u, incenierato in un perno sul quale ruota con costante di attrito viscoso rotazionale trasurabile. Sia z la posizione angolare, m la massa dell'estremita' del pendolo e l la sua lunghezza. Sia g la accelerazione di gravita'. Si suppone che il pendolo sia incernierato a una molla la cui altra estremita' scorre lungo la parete in maniera tale che la molla sia sempre orizzontale. La molla soddisfa la legge secondo cui $F_e(w) = k(w)$, dove w e' la lunghezza della molla e

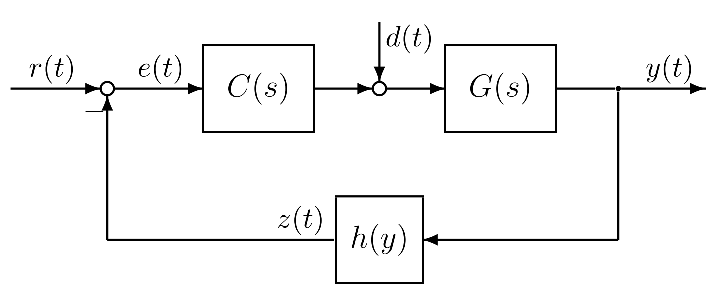
$$k(w) = \begin{cases} -(w-L)^2 & \text{se } w \leq L \\ (w-L)^2 & \text{se } w \geq L \end{cases}$$

come illustrato nella seconda figura (L e' la lunghezza a riposo della molla).

1. Determinare le equazioni del moto del pendolo. Determinare x_0 in modo tale che in condizioni di equilibrio ($u = 0$) si ha $z(t) = 45^o$ per tutti i t.

2. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t) := z(t) - 45^o$ sotto l'ipotesi che sia $u(t)$ che $y(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(s^2 - as + 61)}{(s+7)^2(s-1)}, \qquad h(y) = y$$

dove a e' un parametro reale.

1. Determinare a, sapendo che $s = -1$ é punto doppio del luogo delle radici.
2. Si fissi a pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e punti doppi.
3. Si trovino i valori di $K > 0$ per cui il sistema ad anello chiuso é stabile e quelli per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso non hanno componenti oscillatorie.
4. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-t}. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{(s^2 + 1)}{(s-1)^2}$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti.
3. Supponendo che $C(s) = K$ e che $h(y) = y$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+\frac{s}{10})} \qquad h(y) = y$$

Si progettino due compensatori stabilizzanti $C_1(s), C_2(s)$, in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino pari a circa 0.01 (per entrambi);
- pulsazione di attraversamento pari a circa 1 per $C_1(s)$, a 100 per $C_2(s)$;
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú (per entrambi).

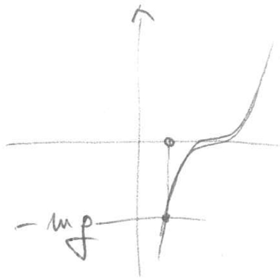
Esercizio 5 (Teorico) Enunciare il criterio del cerchio sia in versione analitica (enunciato del teorema) che nella versione grafica.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

$$-J\ddot{z} - mg\,l\sin z - k(x-x_0)\,l\cos z + u = 0$$

Supponiamo ora che $z(t) = 45°$ $\forall t$ e $u(t) = 0$ $\forall t$. Allora $\ddot{z} = 0$ e quindi

$$-mg\,\cancel{l}\,\cancel{\tfrac{\sqrt{2}}{2}} - k(x-x_0)\,\cancel{l}\,\cancel{\tfrac{\sqrt{2}}{2}} = 0 \qquad x = l\sin z$$



$$mg + k\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - x_0\right) = 0$$

$$k\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - x_0\right) = -mg$$

$$\parallel$$

$$-\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - x_0 - L\right)^2 = -mg$$

$$l\frac{\sqrt{2}}{2} - x_0 - L = \sqrt{mg} \qquad \boxed{x_0 = l\frac{\sqrt{2}}{2} - L - \sqrt{mg}}$$

Se ora $z(t) = 45° + y(t)$ con $y(t)$ e $u(t)$ piccoli allora $\ddot{z} = \ddot{y}$

$$-J\ddot{y} - mg\,l\sin(45+y) - k\left(l\sin(45+y) - x_0\right)l\cos(45+y) + u = 0$$

$$\sin(45+y) \simeq \sin(45) + \cos(45)y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$k\left(l\sin(45+y) - x_0\right) \simeq k\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} + l\frac{\sqrt{2}}{2}y - x_0\right) = k\left(L + \sqrt{mg} + l\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$$

$$= -\left(\cancel{L} + \sqrt{mg} + l\frac{\sqrt{2}}{2}y - \cancel{L}\right)^2 \simeq -mg + 2\sqrt{mg}\,l\frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$\cos(45+y) \simeq \cos(45) - \sin(45)y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

L'equazione diventa

$$-J\ddot{y} - mg\,l\frac{\sqrt{2}}{2} - mgl\frac{\sqrt{2}}{2}y - \left(-mg + 2\sqrt{mg}\,l\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - l\frac{\sqrt{2}}{2}y\right) + u = 0$$

$$-J\ddot{y} - \cancel{mgl\frac{\sqrt{2}}{2}} - mgl\frac{\sqrt{2}}{2}y + \cancel{mgl\frac{\sqrt{2}}{2}} - mgl\frac{\sqrt{2}}{2}y - 2\sqrt{mg}\left(l\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 y$$

$$\underbrace{+ \cancel{2\sqrt{mg}\left(l\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 y^2}}_{\text{trascurabile perché infinitesimo del II ordine}} + u = 0$$

$$J\ddot{y} + \left[mgl\sqrt{2} + \sqrt{mg}\, l^2\right] y = u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2 + mgl\sqrt{2} + \sqrt{mg}\, l^2}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ Luogo delle radici di $(s+7)^2(s-1)+k(s^2+as+61)$

1) $\begin{cases}(s+7)^2(s-1)+k(s^2-as+61)=0\\ 2(s+7)(s-1)+(s+7)^2+k(2s-a)=0\end{cases} \xrightarrow{s=-1} \begin{cases}6^2(-2)+k(1+a+61)=0\\ 2\cdot 6\cdot(-2)+6^2+k(-2-a)=0\end{cases}$

$$\begin{cases}-72+62k+ka=0\\ 12-2k-ka=0\end{cases}$$
$$-60+60k=0$$

$k=1$
$a=10$

2) Altri punti doppi

$\begin{cases}(s+7)^2(s-1)+k(s^2-10s+61)=0\\ 2(s+7)(s-1)+(s+7)^2+k(2s-10)=0\end{cases} \rightarrow k=-\dfrac{(s+7)[2s-2+s+7]}{2s-10}$

$$(s+7)^2(s-1)-\frac{\cancel{(s+7)}(3s+5)}{2(s-5)}(s^2-10s+61)=0$$

$$2(s-5)(s+7)(s-1)-(3s+5)(s^2-10s+61)=0$$

$$s^3-27s^2+207s+235=0$$

$s^3-27s^2+207s+235$	$s+1$
s^3+s^2	$s^2-28s+235$
$-28s^2+207s+235$	
$-28s^2-28s$	
$235s+235$	

$s_{12}=14\pm\sqrt{196-235}$ complessi non reali

Intersezione assi ~~$s^3+\ldots$~~ $s^3+(13+k)s^2+(35-10k)s+61k-49$

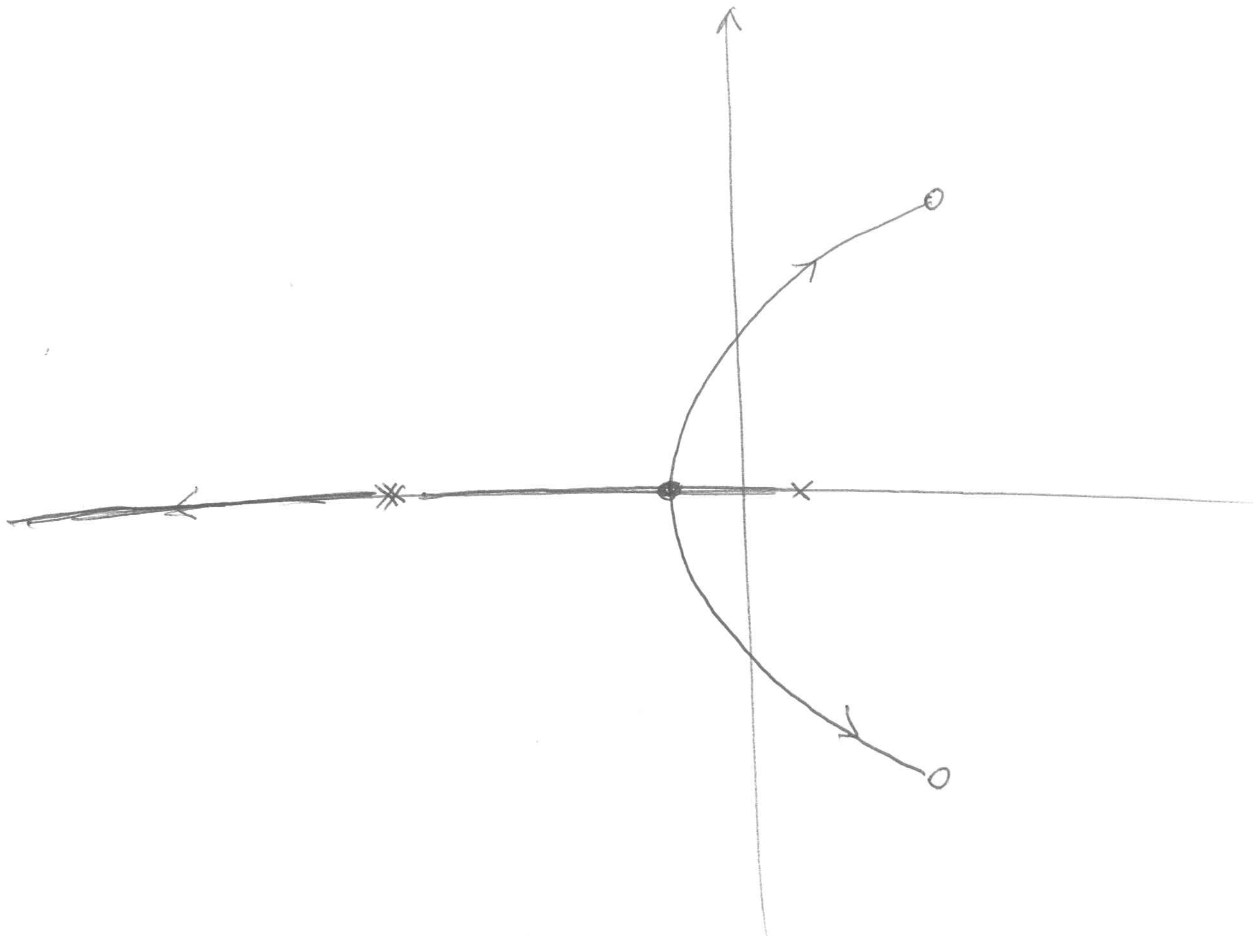
Tabella di Routh

1	1	$35-10k$
2	$13+k$	$-49+61k$
3	$-\dfrac{10k^2+156k-504}{13+k}$	
4	$-49+61k$	

$k= \begin{cases}-18{,}35\\ 2.75\end{cases}$

$(13+2.7)s^2+(-49+61\cdot 2{,}7)=0$

$s_{12}=\pm j\,2.7$



3) Stabilità per $0 \le k \le 2{,}75$

No componenti oscillatorie per $0 \le k \le 1$

4) C'è il modo e^{-t} se $s=-1$ è soluzione di $(s+7)^2(s-1)+k(s^2-10s+61) \to$

e ciò avviene quando il luogo tocca il punto $s=-1$ cioè per $k=-1$ (punto doppio)

quindi per $k=1$ il polinomio $(s+7)^2(s-1)+(s^2-10s+61)$ sarà divisibile per $(s+1)^2$

$$
\begin{array}{l|l}
s^3+14s^2+25s+12 & s^2+2s+1 \\
\underline{s^3+2s^2+s} & \overline{s+12} \\
\quad 12s^2+24s+12 &
\end{array}
$$

altro polinomio è $s=-12$

Modi sono e^{-t}, te^{-t}, e^{-12t}

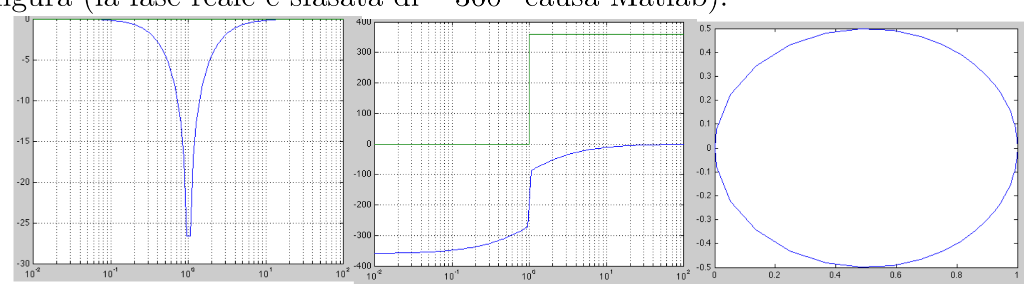
Esercizio 3. Data

$$G(s) = \frac{K(s^2+1)}{(s-1)^2}$$

é richiesto di:

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$ per $K = 1$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ per $K = 1$, evidenziando intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti;
- ricorrere al criterio di Nyquist per determinare il numero dei poli a parte reale positiva ed a parte reale nulla in $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$, al variare del guadagno $K \in$.

Soluzione. Per il diagramma di Bode tutto accade nelle vicinanze di $\omega = 1$: poli e zeri si "compensano", ma c'é un picco di antirisonanza infinito. Anche per la fase c'é "compensazione", ma prima parte da zero e sale fino a $+90^o$, poi una discontinuitá la porta a -90^o, poi ritorna a zero, come indicato in figura (la fase reale é sfasata di -360^o causa Matlab).

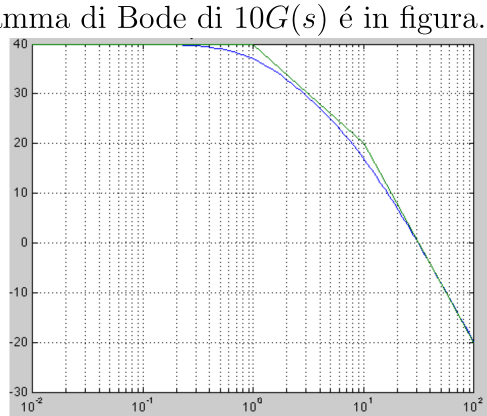


Per Nyquist, non ci sono asintoti e lo studio di parte reale ed immaginaria di $G(i\omega)$ mostra che esse possono annullarsi solo per $\omega = 0, 1$. Per $\omega = 0$ si annulla solo la parte immaginaria e quella reale vale 1 (il punto di partenza), per $\omega = 1$ si annullano entrambe, ed il diagramma attraversa l'origine (in accordo al picco di antirisonanza infinito). Poi per $\omega \to +\infty$ il diagramma ritorna nel punto di partenza. Inoltre la parte reale é sempre non negativa, mentre quella immaginaria cambia segno dopo $\omega = 1$. Quindi il diagramma di Nyquist "completato" con l'immagine speculare consta di una curva chiusa percorsa 2 volte (vedi figura). $G_+ = 2$ implica che, se $K > 0$ oppure $0 > K > -1$, essendo $N_G = 0$, si ha instabilitá con 2 poli a parte reale positiva, mentre se $K < -1$ si ha $N_G = +2$ (antiorari), da cui $W_+ = 0$ e quindi la stabilitá. Infine, per $K = 0$ poli di $G(s)$ e di $W(s)$ coincidono (due poli positivi), mentre per $K = -1$ si ha il passaggio del diagramma sia per $\omega = 0$ che per $\omega = \infty$. $W(s)$ diventa quindi impropria e con un polo nell'origine, infatti $W(s) = \frac{s^2+1}{2s}$. Riassumendo, due poli instabili per $K > -1$, stabilitá per $K < -1$, un polo nullo (ed uno all'infinito) per $K = -1$.

Esercizio 4. Data $G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+\frac{s}{10})}$ si progettino due compensatori stabilizzanti $C_1(s), C_2(s)$, in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino pari a circa 0.01 (per entrambi);
- pulsazione di attraversamento pari a circa 1 per $C_1(s)$, a 100 per $C_2(s)$;
- margine di fase elevato, di almeno 60^o o piú (per entrambi).

Soluzione. Il requisito a regime impone di aumentare il guadagno di un fattore 10. Il diagramma di Bode di $10G(s)$ é in figura.



Da esso si evince una ω_c pari a circa $10\sqrt{10}$, con un piccolissimo margine di fase. Occorrendo diminuire ω_c é necessario il ricorso ad una rete ritardatrice, con il polo posizionato due decadi prima di ω_c, quindi in $s = -\frac{1}{100}$, e lo zero in ω_c, quindi in $s = -1$. Con tale scelta, il diagramma "taglia" circa in $\omega_c = 1$, migliorando nel contempo il margine di fase, che risulta ora di quasi 90^o. Quindi ad esempio $C_1(s) = 10\frac{1+s}{1+100s}$ va bene (si veda la figura). Per $C_2(s)$ discorso analogo, solo che occorre ricorrere ad una rete anticipatrice con uno zero in -10 ed un polo in alta frequenza, ad esempio una decade oltre ω_c. Quindi $C_2(s) = 10\frac{1+\frac{s}{10}}{1+\frac{s}{1000}}$. In figura Bode per $C_1(s)G(s)$ e per $C_2(s)G(s)$.