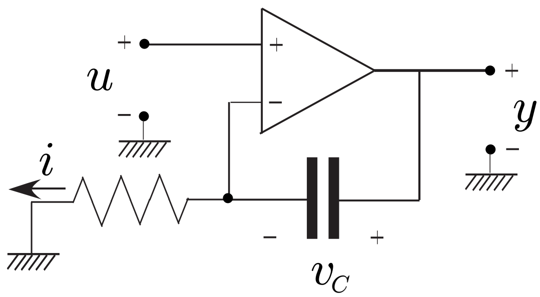
Corso di laurea in Ingegneria Informatica- I Compitino di Fondamenti di Controlli Automatici - 4/4/2016

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico



Sia u la tensione di ingresso, y la tensione di uscita e i la corrente che attraversa il resistore e v_C la tensione ai capi del condensatore.

1. Determinare la funzione di trasferimento dall'ingresso u all'uscita y sapendo che il resistore e' ideale con resistenza R, che il condensatore e' ideale con capacita' C e che l'amplificatore e' descritto dall'equazione
$$v_0 = A(v_+ - v_-)$$
dove v_0 e' la tensione di uscita dell'amplificatore, v_+, v_- sono le tensioni in ingresso ai due morsetti e sapendo che l'amplificatore ha impedenza di ingresso infinita.

2. Supponiamo ora che il resistore sia non lineare e che la tensione ai suoi capi v_R sia funzione della corrente i_R che l'attraversa secondo la formula
$$v_R = \tan(i)$$
cioe' la tensione e' tangente della corrente. Determinare le tre equazioni che legano le quattro incognite $u(t)$, $y(t)$, $v_C(t)$ e $i(t)$.

3. Sapendo che $u(t)$, $y(t)$, $v_C(t)$ e $i(t)$ sono costanti, $u(t) = \bar{u}$, $y(t) = \bar{y}$, $v_C(t) = \bar{v}_C$ e $i(t) = \bar{i}$, determinare i valori delle costanti $\bar{u}, \bar{y}, \bar{v}_C, \bar{i}$.

4. Siano $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$, $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$, $\tilde{v}_C(t) := v_C(t) - \bar{v}_C$ e $\tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}$. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$ sapendo che $\tilde{u}(t), \tilde{y}(t), \tilde{v}_C(t), \tilde{i}(t)$ sono piccoli.

Esercizio 1. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y^{(1)} + y = u$$

1. Determinare la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva.

2. Determinare la risposta libera sapendo che $y(0_-) = -2$.

3. Determinare la risposta forzata sapendo che $u(t) = cos(t)\delta^{(-1)}(t)$.

ES. 1

1) Siccome l'impedenza di ingresso dell'amplificatore è infinita allora i attraversa anche il condensatore. Quindi $V = Ri$

$$(*)\begin{cases} i = C\dfrac{dv_c}{dt} \\ y = v_c + Ri \\ y = A(u - Ri) \end{cases} \quad \text{Trasformata di Laplace} \quad \begin{cases} I = sCV_c \rightarrow V_c = \dfrac{1}{sC} I = \dfrac{U - Y/A}{sRC} \\ Y = RI + V_c \longrightarrow \\ Y = A(U - RI) \rightarrow I = \dfrac{U - Y/A}{R} \end{cases}$$

$$Y = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I = \left(R + \frac{1}{sC}\right)\frac{U - Y/A}{R} = \left(1 + \frac{1}{sRC}\right)U - \left(1 + \frac{1}{sRC}\right)\frac{Y}{A}$$

$$\left(1 + \left(1 + \frac{1}{sRC}\right)\frac{1}{A}\right)Y = \left(1 + \frac{1}{sRC}\right)U \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{1 + \frac{1}{sRC}}{1 + \left(1 + \frac{1}{sRC}\right)A} = \frac{sRC + 1}{(1+A)sRC + A}$$

2) Se $v_R = \tan(i)$ le equazioni diventano

$$\begin{cases} i = C\dfrac{dv_c}{dt} \\ y = v_c + \tan(i) \\ y = A(u - \tan(i)) \end{cases}$$

3) Se v_c, i, u, y sono costanti allora

$$\begin{cases} \bar{i} = \dfrac{d\bar{v}_c}{dt} = 0 \\ \bar{y} = \bar{v}_c + \tan(\bar{i}) = \bar{v}_c \\ \bar{y} = A(\bar{u} - \tan(\bar{i})) = A\bar{u} \end{cases}$$

quindi $\bar{i} = 0$, $\bar{v}_c = \bar{y} = A\bar{u}$

4) L'unico non linearità è $\tan(i) \simeq \tan(\bar{i}) + \left.\dfrac{d\tan(i)}{di}\right|_{i=\bar{i}} \tilde{i} = 0 + 1\tilde{i} = \tilde{i}$

$$\begin{cases} \tilde{i} = C\dfrac{d\tilde{v}_c}{dt} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = \cancel{\bar{v}_c} + \tilde{v}_c + \tilde{i} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = A(\cancel{\bar{u}} + \tilde{u} + \tilde{i}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{i} = C\dfrac{d\tilde{v}_c}{dt} \\ \tilde{y} = \tilde{v}_c + \tilde{i} \\ \tilde{y} = A(\tilde{u} + \tilde{i}) \end{cases}$$

Otteniamo le stesse equazioni che appaiono in (*) con $R = 1$ e quindi con gli stessi passaggi fatti sopra si ottiene

$$\frac{\tilde{Y}}{\tilde{U}} = \frac{sC + 1}{(1+A)sC + A}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) $W(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\qquad w(t) = e^{-t}\delta^{(-1)}(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

2) $\mathcal{L}(y^{(1)} + y) = \mathcal{L}(u)$

$sY(s) - y(0^-) + Y(s) = U(s)$ $\qquad Y(s) = \underbrace{\dfrac{y(0^-)}{s+1}}_{Y_e(s)} + \underbrace{\dfrac{1}{s+1}U(s)}_{Y_f(s)}$

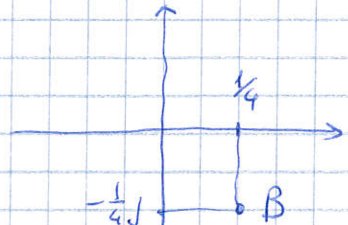
$Y_e(s) = \dfrac{2}{s+1}$ $\qquad y_e(t) = 2e^{-t}$

3) $u(t) = \cos(t)\,\delta^{(-1)}(t) = \dfrac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$

$U(s) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-j} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s+j}$

$Y_f(s) = \dfrac{1}{s+1}U(s) = \dfrac{1}{s+1}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-j} + \dfrac{1}{s+1}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-j} = \dfrac{1}{s+1}\dfrac{s}{s^2+1}$

$= \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-j} + \dfrac{C}{s+j}$



$A = Y_f(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \dfrac{s}{s^2+1}\Big|_{s=-1} = -\dfrac{1}{2}$

$B = Y_f(s)(s-j)\Big|_{s=j} = \dfrac{1}{s+1}\dfrac{s}{s+j}\Big|_{s=j} = \dfrac{j}{(1+j)2j} = \dfrac{1-j}{2(1+j)(1-j)} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}j$

$C = \bar{B} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}j$ $\qquad |B| = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\qquad \angle B = -\dfrac{\pi}{4}$

$y_f(t) = -\dfrac{1}{2}e^{-t} + 2|B|\cos(t + \angle B) = -\dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$