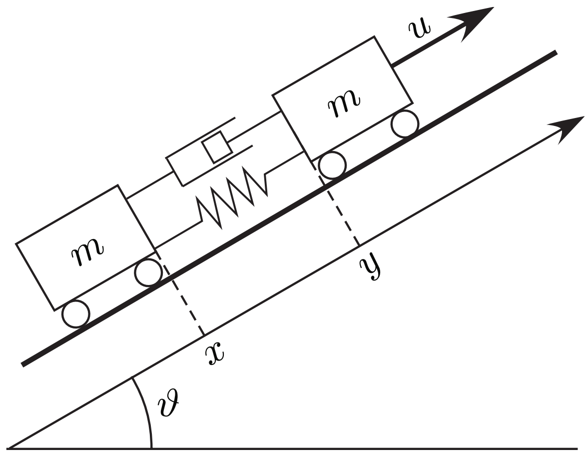
Fondamenti di controlli automatici - Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Primo Compitino 2015

Cognome e nome: ________________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Si tratta di due carrelli entrambi di massa m sottoposti alla forza di gravita' che si muovono su di un piano inclinato collegati tra di loro da una molla e da uno smorzatore. Lo smorzatore e' ideale con costante di attrito b e la molla e' ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L. Su uno due due carrelli agisce una forza u.

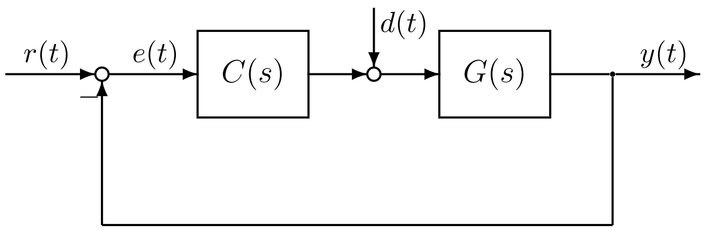
1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Determinare, se esistono, le evoluzioni di equilibrio del sistema cioe' le soluzioni costanti $x(t) = \bar{x}$, $y(t) = \bar{y}$, $u(t) = \bar{u}$.
3. Sia $\tilde{x}(t) := x(t) - \bar{x}$, $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$, $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$ e dire se questa corrisponde a un sistema BIBO stabile.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) = u(t)$$

alimentato con un ingresso a gradino $u(t) = \delta^{(-1)}(t)$. Determinare l'uscita forzata.

Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 4}$$

con $a > 0$.

1. Determinare le funzioni di trasferimento $T_{ry}(s)$ del sistema in catena chiusa dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$ e se ne studi la stabilita' al variare di K e a.

2. Supponiamo che $r(t) = t$ e che $d(t) = 5$. Determinare l'andamento a regime di $e(t)$.

3. Supponiamo che $K = 0$ e che a un ingresso di disturbo sinusoidale $d(t) = 8\cos(2t)$ si osservi un'uscita $y(t)$ che asintoticamente e' uguale a $y(t) \simeq 2\cos(2t + \phi)$. Determinare il valore di a.

Esercizio 4. Dare la definizione della funzione sensibilita' di una funzione di trasferimento rispetto a un parametro e spiegarne il significato e l'utilizzo nella valutazione delle proprieta' di un sistema.

$\boxed{\text{ES.1}}$

$$\begin{cases} -m\ddot{y} - b(\dot{y}-\dot{x}) - k(y-x-L) - mg\sin\theta + u = 0 \\ -m\ddot{x} - b(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y+L) - mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Equilibri

$$\begin{cases} -k(\bar{y}-\bar{x}-L) - mg\sin\theta + \bar{u} = 0 \\ -k(\bar{x}-\bar{y}+L) - mg\sin\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{u} = 2mg\sin\theta \\ \bar{y} = \bar{x} + L + \dfrac{mg\sin\theta}{k} \end{array}$$

Scriviamo le equazioni differenziali nelle variabili $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}$

$$\begin{cases} -m\ddot{\tilde{y}} - b(\dot{\tilde{y}}-\dot{\tilde{x}}) - k(\cancel{\bar{y}}+\tilde{y}-\cancel{\bar{x}}-\tilde{x}-\cancel{L}) - \cancel{mg\sin\theta} + \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} = 0 \\ -m\ddot{\tilde{x}} - b(\dot{\tilde{x}}-\dot{\tilde{y}}) - k(\cancel{\bar{x}}+\tilde{x}-\cancel{\bar{y}}-\tilde{y}+\cancel{L}) - \cancel{mg\sin\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m\ddot{\tilde{y}} - b(\dot{\tilde{y}}-\dot{\tilde{x}}) - k(\tilde{y}-\tilde{x}) + \tilde{u} = 0 \\ -m\ddot{\tilde{x}} - b(\dot{\tilde{x}}-\dot{\tilde{y}}) - k(\tilde{x}-\tilde{y}) = 0 \end{cases}$$

Passando alle trasformate di Laplace $\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}]$ $\tilde{X}(s) = \mathcal{L}[\tilde{x}]$ $\tilde{U}(s) = \mathcal{L}[\tilde{u}]$

$$\begin{cases} (-ms^2 - bs - k)\tilde{Y} + (bs+k)\tilde{X} + \tilde{U} = 0 \\ (-ms^2 - bs - k)\tilde{X} + (bs+k)\tilde{Y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{X} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}\tilde{Y}$$

$$\left(ms^2+bs+k - \frac{(bs+k)^2}{ms^2+bs+k}\right)\tilde{Y} = \tilde{U}$$

$$\tilde{Y} = \frac{1}{ms^2+bs+k - \dfrac{(bs+k)^2}{ms^2+bs+k}}\tilde{U} = \frac{ms^2+bs+k}{(ms^2+bs+k)^2 - (bs+k)^2}\tilde{U}$$

$$= \frac{ms^2+bs+k}{ms^4+2mbs^3+2mks^2}\tilde{U}$$

La risultante funzione di trasferimento non è BIBO stabile dato che ha due poli nell'origine

$\boxed{\text{ES. 2}}$

La funzione di trasferimento è $W(s) = \dfrac{1}{s^2+s} = \dfrac{1}{s(s+1)}$

L'uscita forzata è

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)}\,U(s) = \frac{1}{s(s+1)}\,\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{As(s+1) + B(s+1) + Cs^2}{s^2(s+1)}$$

$$= \frac{(A+C)s^2 + (A+B)s + B}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$\begin{cases} A+C = 0 \\ A+B = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 1,\ A = -1,\ C = 1$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = -\delta^{(-1)}(t) + t\,\delta^{(-1)}(t) + e^{-t}\,\delta^{(-1)}(t) = (-1 + t + e^{t})\,\delta^{(-1)}(t)$$

$\boxed{\text{Es. 3}}$

1) $T_{ry}(s) = \dfrac{CG}{1+CG} = \dfrac{k}{s(s^2+as+4)+k} = \dfrac{k}{s^3+as^2+4s+k}$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 4 \\ 2 & a & k \\ 1 & \frac{4a-k}{a} & \\ 0 & k & \end{array}$$

$-\frac{1}{a}\det\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ a & k \end{bmatrix} = \dfrac{4a-k}{a}$

ricordandoci che $a>0$ si ottiene

$$\boxed{0<k<4a}$$

2) $T_{re}(s) = \dfrac{1}{1+CG} = \dfrac{s(s^2+as+4)}{s(s^2+as+4)+k}$

$T_{de}(s) = \dfrac{-G}{1+CG} = \dfrac{-s}{s(s^2+as+4)+k}$

i) Suppongo $r(t)=t$ e $d(t)=0$ $\Rightarrow R(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$E(s) = T_{re}(s)\dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s^2+as+4}{s(s^2+as+4)+k}\dfrac{1}{s} = \dfrac{A}{s} +$ termini

dove $A = E(s)s\big|_{s=0} = \dfrac{s^2+as+4}{s(s^2+as+4)+k}\Big|_{s=0} = \dfrac{4}{k}$

$e(t) \simeq \dfrac{4}{k}\delta^{(-1)}(t) + (\underset{\text{per la stabilità}}{\text{termini} \to 0})$

ii) Suppongo $r(t)=0$ e $d(t)=5$

$e(t) \simeq T_{de}(0)\,5 = 0$

Quindi $e(t)$ globale varrà a regime $e(t) \simeq \dfrac{4}{k}$

3) Il segnale di ingresso sinusoidale $d(t)=\delta\cos(2t)$ porterà a una uscita $y(t)$ che sarà a regime ancora un segnale sinusoidale di pulsazione $\omega=2$ e ampiezza $= |G(j2)|\delta$

Quindi $2 = |G(j2)|\delta \Rightarrow |G(j2)| = \dfrac{1}{4}$

$|G(j2)| = \dfrac{1}{|\cancel{-4}+a2j\cancel{+4}|} = \dfrac{1}{2a} \Rightarrow \dfrac{1}{2a} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a=2}$