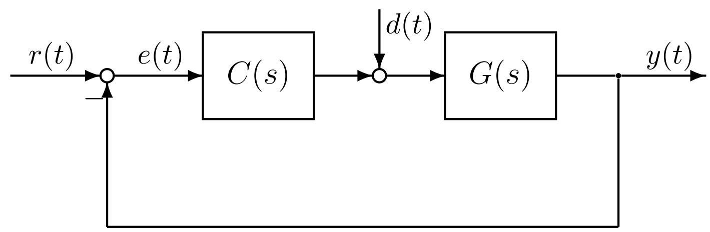
Corso di laurea in Ingegneria Informatica- II Compitino di Fondamenti di Controlli Automatici - 9/5/2016

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ______________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

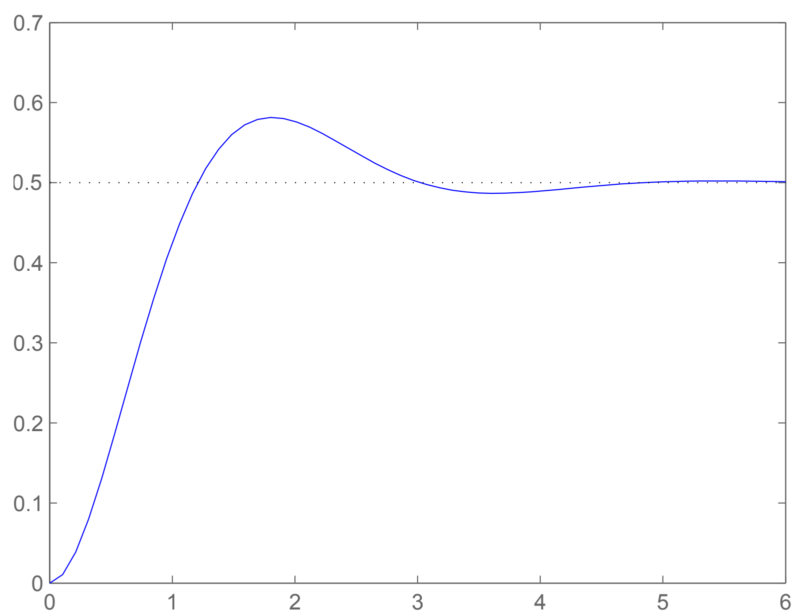


Si supponga che

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s+a}{s^2+s+4}$$

con $K \geq 0$.

1. Determinare a sapendo che, se $K = 0$ e $d(t) = \delta^{(-1)}(t)$ (gradino unitario), si osserva l'uscita $y(t)$ illustrata nella figura seguente



Supponiamo da ora in poi che a abbia valore nominale pari a quanto calcolato nel punto precedente.

2. Supponiamo che $r(t) = 5\delta^{(-1)}(t)$ e che $d(t) = \cos(2t)\delta^{(-1)}(t)$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

3. Sia $T(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$. Determinare la funzione sensibilita' di $T(s)$ rispetto alla variazione del parametro a.

4. Supponiamo che a abbia valore nominale pari a quanto calcolato nel punto 1 e che questo valore sia noto con una precisione del 10%. Determinare i valori di K tali da assicurare che il guadagno in continua tra $r(t)$ e $y(t)$ sia fissato a meno di un errore pari al 1%.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente dove

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2}$$

1. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K \geq 0$. Si determinino eventuali asintoti, punti doppi e intersezioni con l'asse immaginario.

2. Si trovino i valori di $K \geq 0$ per cui i modi del sistema ad anello chiuso sono tutti non oscillatori.

3. Determinare il valore di K tale che il sistema in catena chiusa contiene modi puramente oscillatori. Determinare tutti i modi del sistema in corrispondenza a questo valore di K.

4. Determinare il valore di K tale che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-3t}. Determinare tutti i modi del sistema in corrispondenza a questo valore di K.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) Dalla figura si desume che $y(\infty) = 0{,}5$ e quindi che

$$G(0) = \frac{a}{4} = 0{,}5 \implies a = 2$$

Stabilità: $s^2 + (k+1)s + 2k + 4$ stabile $\iff k > -1$

2)
$$T_{ry}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{k(s+2)}{s^2+s+4+k(s+2)}$$

$$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{s+2}{s^2+s+4+k(s+2)}$$

Se $r(t) = 5$ $d(t) = 0$ allora $y(t) \simeq T_{ry}(0)5 = \frac{2k}{4+2k} = \frac{k}{k+2}$

Se $r(t) = 0$ $d(t) = \cos(2t)$ allora

$$y(t) \simeq |T_{dy}(2j)| \cos(2t + \angle T_{dy}(2j))$$

$$T_{dy}(2j) = \frac{2+2j}{-\cancel{4}+2j+\cancel{4}+k(2+2j)} = \frac{1+j}{k+j(k+1)}$$

$$|T_{dy}(2j)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+(k+1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2k^2+2k+1}} \qquad \angle T_{dy}(2j) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{artg}\frac{k+1}{k}$$

Sovrapponendo le due uscite si ottiene

$$y(t) \simeq \frac{k}{k+2} + \sqrt{\frac{2}{2k^2+2k+1}} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4} - \operatorname{artg}\frac{k+1}{k}\right)$$

3)
$$S_a^T = \frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a} = a\,\frac{s^2+s+4+k(s+a)}{k(s+a)}\;\frac{k[s^2+s+4+\cancel{k(s+a)}]-\cancel{k(s+a)}k}{[s^2+s+4+k(s+a)]^2}$$

$$= \frac{a}{s+a}\,\frac{s^2+s+4}{s^2+s+4+k(s+a)}$$

4) $a = 2 \pm 10\% \implies \frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{10}$. Noi vogliamo che $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{100}$

Sappiamo che $\frac{\Delta T}{T} \simeq S_a^T \frac{\Delta a}{a}$

per $s = 0$ dato che siamo interessati al guadagno in continua

Quindi $\frac{1}{100} = |S_a^T| \frac{1}{10} \implies |S_a^T| = \frac{1}{10}$ per $a = 1$ e $s = 0$

$$S_a^T = \frac{a}{s+a}\,\frac{s^2+s+4}{s^2+s+4+k(s+a)}\bigg|_{\substack{a=2\\ s=0}} = \frac{2}{k+2} \qquad |S_a^T| = \frac{2}{k+2} = \frac{1}{10} \implies k = 18$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) Il sistema in catena chiusa ha denominatore

$s(s+1)^2+K(s+4)$. Tracciamo il luogo di questo polinomio.

Asintoti $\sigma_a = \dfrac{0-1-1+4}{2} = 1$

Punti doppi

$$\begin{cases} s(s+1)^2+K(s+4)=0 \\ 2s(s+1)+(s+1)^2+K=0 \end{cases}$$

$K=-(s+1)(3s+1)$

$s(s+1)^2-(s+1)(3s+1)(s+4)=0$

$(s+1)[s^2+\cancel{s}-3s^2-12s-\cancel{s}-4]=0$

$(s+1)(2s^2+12s+4)=0$

$s_1=-1 \qquad K_1=0$

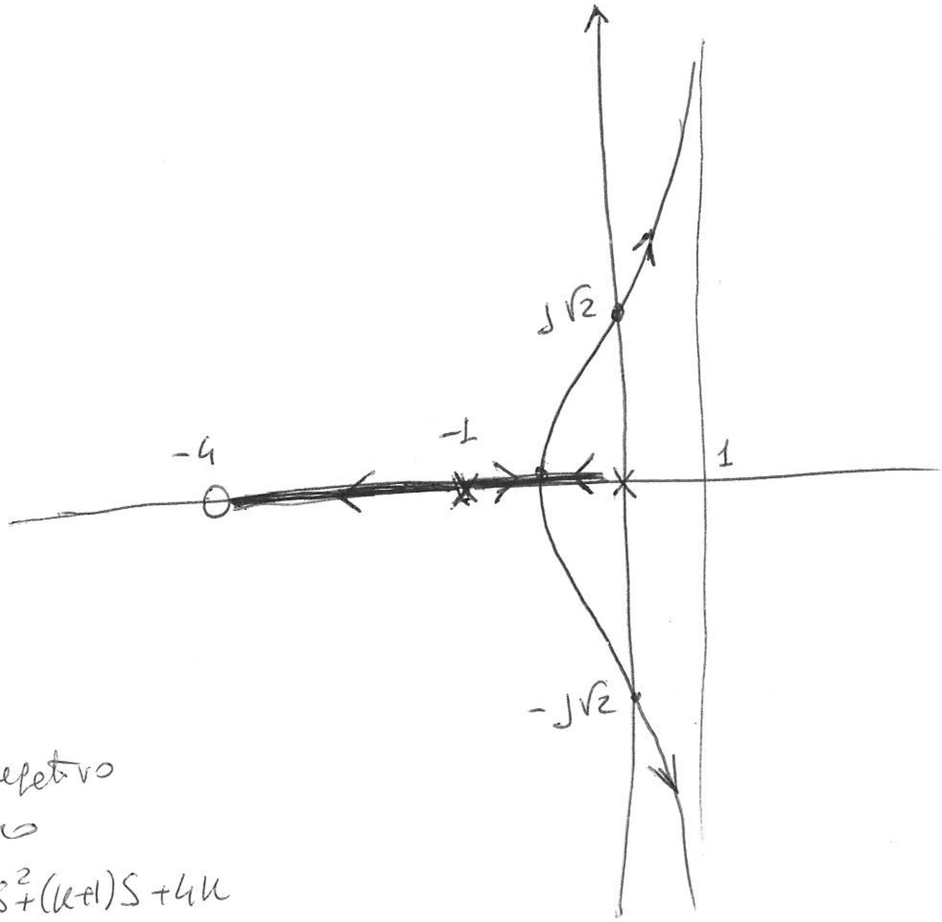
$s_{2,3}=-3\pm\sqrt{9-2}=\begin{cases}-5,64\\-0,35\end{cases}$

$s_2=-0,35 \qquad K_2=0,04$

$s_3=-5,64 \qquad K_3=-74$ luogo negativo

Intersezione asse immaginario

Tabella di Routh $s^3+2s^2+(K+1)s+4K$



$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K+1 \\ 2 & 2 & 4K \\ 1 & \frac{2K+2-4K}{2}=1-K & \\ 0 & 4K & \end{array}$$

Abbiamo stabilità per $0<K<1$

Per $K=1$ il polinomio è divisibile per $2s^2+4K=2s^2+4$ e quindi il polinomio ha radici $s_{12}=\pm j\sqrt{2}$ che sono le intersezioni dell'asse immaginario

2) Per $0<K\leq 0,04$ i punti del luogo sono tutti e 3 reali e quindi i corrispondenti modi sono non oscillatori

Per $K>0,04$ appaiono 2 modi oscillatori mentre il terzo resta reale

3) Il sistema ha modi puramente oscillatori per K corrispondente all'intersezione con l'asse immaginario cioè $k = 1$

I modi sono $\cos(\sqrt{2}t)$ e $\sin(\sqrt{2}t)$. In più c'è un altro modo ricavabile dividendo il polinomio

$s(s+1)^2 + 1(s+4)$ in s^2+2

$$
\begin{array}{l|l}
s^3 + 2s^2 + 2s + 4 & s^2+2 \\
\hline
s^3 \qquad\; 2s & s+2 \\
\hline
\quad 2s^2 \qquad +4 & \\
\quad 2s^2 \qquad +4 & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Quindi la rimanente radice è $s=-2$ e il modo corrispondente è e^{-2t}

4) Esiste il modo e^{-3t} se -3 è radice di $s(s+1)^2+k(s+4)$

Sostituiamo $s=-3$ in tale polinomio $=0$

$$s(s+1)^2+k(s+4)=0 \xrightarrow{s=-3} -3(-2)^2+k(1)=0 \Rightarrow k=12$$

Per trovare i rimanenti modi devo trovare le altre due radici di $s(s+1)^2+12(s+4)=0$

$$
\begin{array}{l|l}
s^3 + 2s^2 + 13s + 48 & s+3 \\
\hline
s^3 + 3s^2 & s^2 - s + 16 \\
\hline
\quad -s^2 + 13s + 48 & \\
\quad -s^2 - 3s & \\
\hline
\qquad +16s + 48 & \\
\qquad\; 16s + 48 & \\
\hline
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$s_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1-64}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{63}}{2}$$

$$e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{63}}{2}t\right)$$

$$e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{63}}{2}t\right)$$