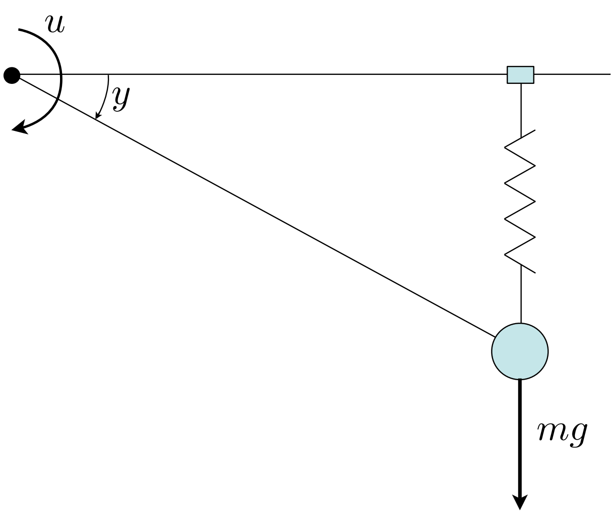
Compitino di FONDAMENTI DI CONTROLLI AUTOMATICI del 16/06/2015

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico



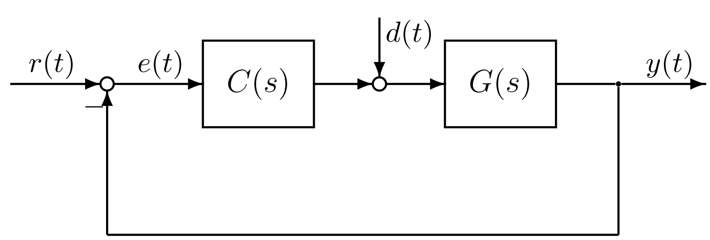
Si tratta di pendolo di lunghezza ℓ con massa m concentrata alla sua estremita' incernierato sul soffitto e collegato al soffitto con una molla. Supponiamo che la molla sia ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L. Supponiamo il pendolo ruoti sul perno con una costante di attrito b. Supponiamo che sul perno del pendolo sia applicata una coppia di ingresso u che l'uscita sia l'angolo y.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema.

2. Supponiamo che $u(t) = 0$. Determinare la relazione tra i parametri L, m, ℓ, k, b tale che $\bar{y}(t) = 45^o$ sia evoluzione di equilibrio.

3. Determinare la funzioni di trasferimento del sistema dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$ supponendo che i segnali $\tilde{y}(t), u(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s+1} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}$$

con $a > 0$.

1. Determinare le funzioni di trasferimento $T_{ry}(s)$ e $T_{dy}(s)$ del sistema in catena chiusa dagli ingressi $r(t)$ e $d(t)$ all'uscita $y(t)$. Studiare la stabilita' di $T_{ry}(s)$ e $T_{dy}(s)$ al variare di a e K.
2. Determinare la funzione sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.
3. Supponiamo che $a = 0, K = 1$ e che $r(t) = \cos(t)$ e che $d(t) = 3$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.
4. Supponiamo che $K = 0$. Determinare il valore di a sapendo che a un ingresso di disturbo impulsivo $d(t) = \delta(t)$ si osserva un'uscita $y(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\ t\right)$ dove A e' una costante opportuna.

Esercizio 3. Si consideri lo schema precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + a)}$$

dove $a, K > 0$.

1. Si determini il valore di a, sapendo che -1 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario e angoli di uscita dai poli).
3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il sistema ammette modi puramente oscillatori (ne' convergenti ne' divergenti). Determinare i modi del sistema in corrispondenza a tale valore di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2(s + 10)}\ .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{4s + 2}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino $\simeq 0,001$;
2. margine di fase circa uguale a $m_\phi \geq 45^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 50$.

Esercizio 5. Dare la definizione di poli dominanti e il loro significato nella descrizione del comportamento in transitorio di un sistema.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) Equazioni del moto in rotazione $\quad J = ml^2$

$$-J\ddot{y} - b\dot{y} - k(l\sin y - L)\,l\cos y + mg\,l\cos y + u = 0$$

2) $\bar{y}(t) = 45°$ $\quad u(t) = 0$ $\quad \dot{\bar{y}} = \ddot{\bar{y}} = 0$

$$-k\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - L\right)\cancel{l\frac{\sqrt{2}}{2}} + mg\,\cancel{l\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$$

$$k\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - L\right) = mg$$

3) $\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}$ $\quad$ Espansione di Taylor

$$\cos(y) = \cos(\bar{y} + \tilde{y}) \simeq \cos\bar{y} - \underbrace{\sin(\bar{y})}_{[\cos y]'_{y=\bar{y}}}\tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$$

$$\sin(y)\cos(y) = \sin(\bar{y} + \tilde{y})\cos(\bar{y} + \tilde{y})$$

$$\simeq \sin(\bar{y})\cos(\bar{y}) + \left[\sin y \cos y\right]'_{y=\bar{y}}\tilde{y}$$

$$= \sin\bar{y}\cos\bar{y} + \left[(\cos y)^2 - (\sin y)^2\right]_{y=\bar{y}}\tilde{y} = \frac{1}{2} + 0\tilde{y}$$

Sostituendo $\quad \dot{\tilde{y}} = \dot{y} \quad \ddot{\tilde{y}} = \ddot{y}$

$$-J\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} - \cancel{kl^2\frac{1}{2}} + klL\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) + mgl\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) + u = 0$$

$$-J\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} - klL\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y} - mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y} + u = 0$$

$$\left(Js^2 + bs + (kL + mg)\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)\tilde{Y}(s) = U(s)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{Js^2 + bs + (kL + mg)\frac{\sqrt{2}}{2}l}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

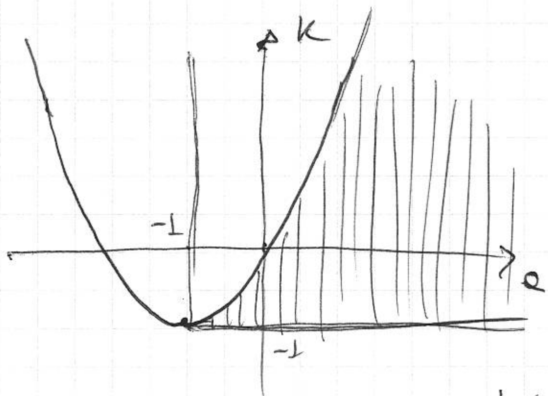
1) $T_{ry}(s) = \dfrac{k}{(s^2+as+1)(s+1)+k}$ $\qquad T_{dy}(s) = \dfrac{s+1}{(s^2+as+1)(s+1)+k}$

Stabilità di $(s^2+as+1)(s+1)+k = s^3+(a+1)s^2+(a+1)s+k+1$

$k > -1$

$a > -1$

$k < a^2+2a$



3	1	$a+1$
2	$a+1$	$k+1$
1	$\dfrac{a^2+2a-k}{a+1}$	
0	$k+1$	

2) $$S_a^{T_{ry}} = \frac{a}{T_{ry}}\frac{\partial T_{ry}}{\partial a} = a\,\frac{\cancel{(s^2+as+1)(s+1)+k}}{\cancel{k}}\;\frac{-\cancel{k}s(s+1)}{[(s^2+as+1)(s+1)+k]^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-as(s+1)}{(s^2+as+1)(s+1)+k}$$

3) $r(t) = \cos(t)$, $d(t) = 0$ $\qquad y(t) \simeq |T_{ry}(j)|\cos(t + \angle T_{ry}(j))$

$$T_{ry}(j) = \frac{k}{(-\cancel{1}+aj+\cancel{1})(1+j)+k} = \frac{k}{k-a+ja}$$

$$|T_{ry}(j)| = \frac{|k|}{\sqrt{(k-a)^2+a^2}} \qquad \angle T_{ry}(j) = -\angle k-a+ja = -\arctg\frac{a}{k-a}$$

$r(t) = 0$

$d(t) = 3$ $\qquad y(t) \simeq T_{dy}(0)\,3 = \dfrac{1}{1+k}\,3$

Globalmente $\quad y(t) \simeq \dfrac{|k|}{\sqrt{(k-a)^2+a^2}}\cos\left(t - \arctg\dfrac{a}{k-a}\right) + \dfrac{3}{1+k}$

4) La risposta impulsiva associata al sistema con fdt $G(s) = \dfrac{1}{s^2+as+1}$ è $A e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right)$ a cui corrispondono poli $-\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{4}}$

Quindi $\left(s+\frac{1}{2}+j\sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}-j\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = s^2+as+1 \Rightarrow a = 1$

$\boxed{\text{Es.3}}$ $s(s^2+4s+a)+k=0$

1) $\begin{cases} s(s^2+4s+a)+k=0 \\ (s^2+4s+a)+s(2s+4)=0 \end{cases} \xRightarrow{s=-1} \begin{cases} -1(-3+a)+k=0 \\ -3+a-1(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=5 \end{cases}$

2) Altri punti doppi

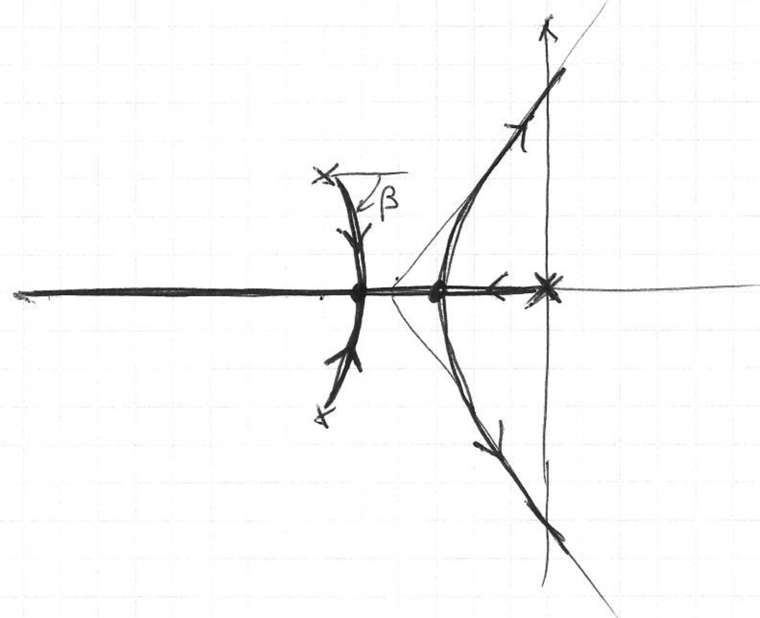
$\begin{cases} s(s^2+4s+5)+k=0 \\ s^2+4s+5+2s^2+4s=0 \end{cases} \rightarrow 3s^2+8s+5=0 \Rightarrow s_{12}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-15}}{3} \begin{cases} -1 \\ -\frac{5}{3} \end{cases}$

Asintoti $\bar{z}_i = 0, -2\pm j$

$\sigma = -\frac{4}{3}$ centro

angoli $\pm\frac{\pi}{3}, \pi$

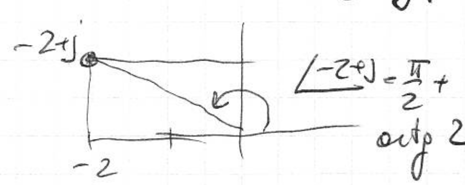
Tabella Routh



3	1	5
2	4	k
1	$\frac{20-k}{4}$	
0	k	

$k=20$ si annulla riga $\rightarrow 4s^2+k\big|_{k=20} = 4s^2+20 \quad s_{12}=\pm j\sqrt{5}$

Angolo uscita da $\bar{z}_1 = -2+j$



$-\beta - \underline{\angle(\cancel{-2}+j-(\cancel{-2}-j))} - \underline{\angle(-2+j-(0))} = -\pi$

$-\beta - \angle 2j - \angle(-2+j) = -\pi \qquad \beta = \pi - \frac{\pi}{2} - \angle(-2+j) = -\text{artg}\,2$

3) Modi puramente oscillatori per $k=20$

I modi sono

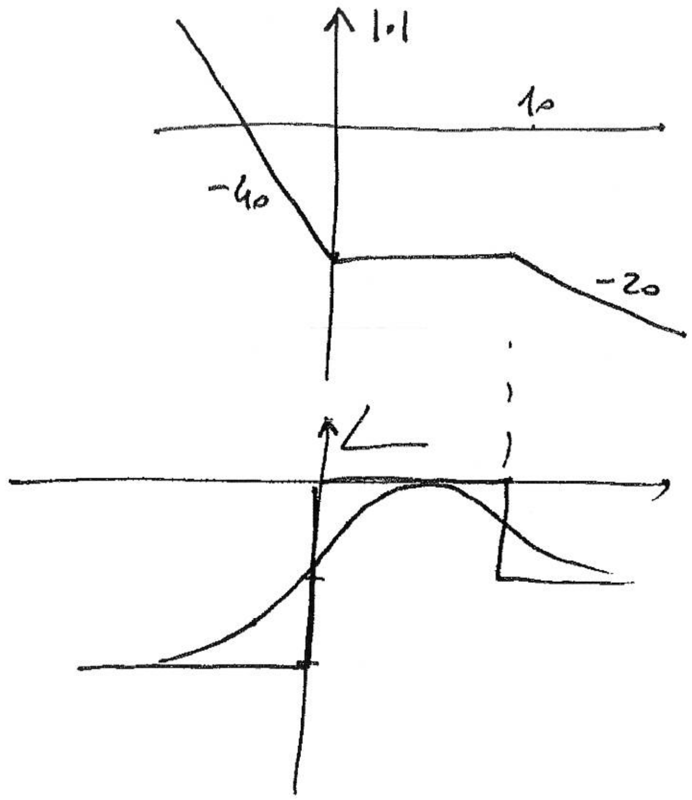
$\cos(\sqrt{5}t)$ e e^{-4t}

$$\begin{array}{rr|l} s^3+4s^2+5s+20 & & s^2+5 \\ s^3+5s & & \hline s+4 \\ \hline 4s^2+20 & & \\ 4s^2+20 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

$\boxed{\text{Es. } 4}$

1) Bode

$$G(S) = \frac{1}{10}\,\frac{1+S+S^2}{(1+S/10)S^2}$$



2) Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{1-\omega^2+j\omega}{-\omega^2(10+j\omega)} = \frac{(1-\omega^2+j\omega)(10-j\omega)}{-\omega^2(100+\omega^2)}$$

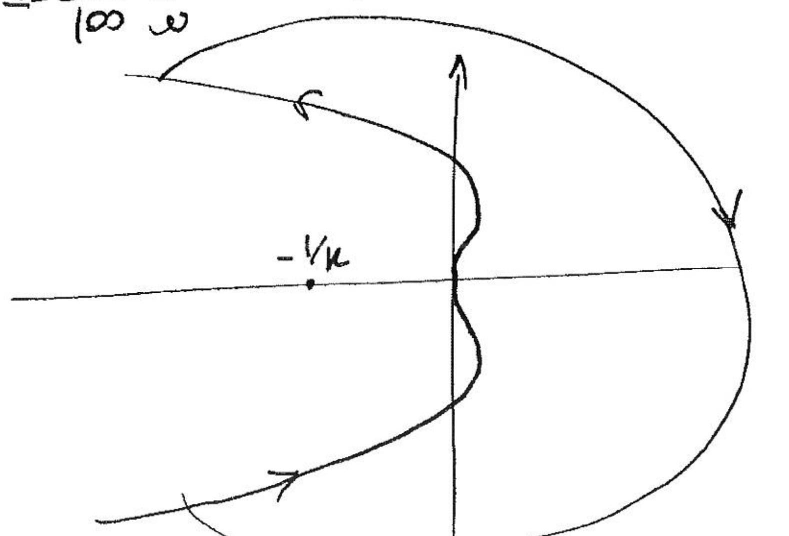
$$Re = \frac{10-10\omega^2+\omega^2}{-\omega^2(100+\omega^2)} = \frac{10-9\omega^2}{-\omega^2(100+\omega^2)} \qquad Re = 0 \quad \omega = \sqrt{\frac{10}{9}}$$

$$\Downarrow$$

$$Im = \frac{10\omega-\omega+\omega^3}{-\omega^2(100+\omega^2)} = \frac{\omega^2+9}{-\omega(100+\omega^2)} \qquad Im = \frac{\frac{10}{9}+9}{-\sqrt{\frac{10}{9}}\left(100+\frac{10}{9}\right)} = -\frac{9}{10\sqrt{10}}$$

$$\omega \approx 0^+ \qquad Re \approx \frac{10}{-100\omega^2} = -\frac{1}{10}\,\frac{1}{\omega^2}$$

$$Im \simeq -\frac{9}{100}\,\frac{1}{\omega}$$ andamento parabolico



3) Criterio di Nyquist

$P = 0 \qquad Z = P - N = -N$

per $k > 0 \iff -\frac{1}{k} < 0 \iff N = 0 \iff Z = 0$ stabile

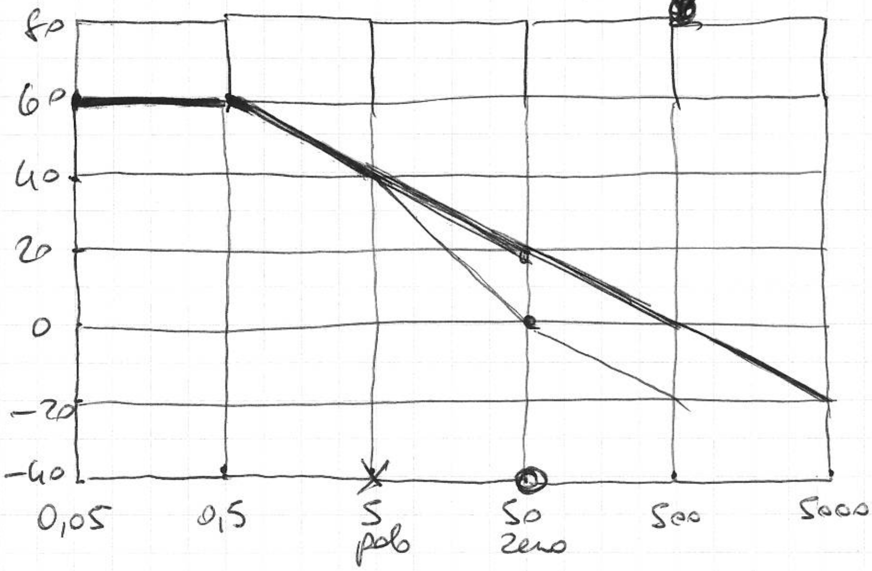
per $k < 0 \iff -\frac{1}{k} > 0 \iff N = 1 \iff Z = 1$ ciclo instabile

ES 5

$$G(S) = \frac{1}{4S+2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+2S}$$

errore alla risposta al gradino $\simeq \frac{1}{1000}$ $\Rightarrow$ $K_c = \frac{1000}{K_G} = 2000$

$$\hat{W}(S) = 2000\,G(S) = \frac{1000}{1+2S}$$



rete ritardatrice $\qquad \bar{C}(S) = \frac{1+0{,}02\,S}{1+0{,}2\,S}$

$$C(S) = 2000\,\frac{1+0{,}02\,S}{1+0{,}2\,S}$$