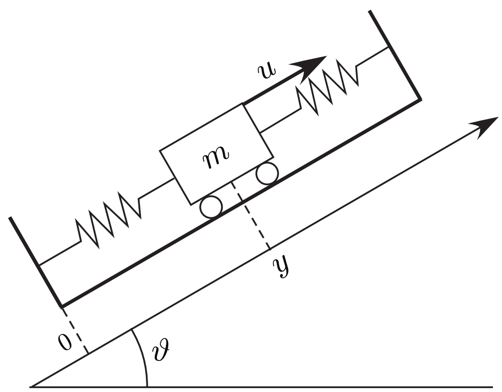
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - I Compitino di Fondamenti di Controlli Automatici del 3/4/2017

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non é ammessa la consultazione di libri o quaderni, ne' l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Si tratta di un carrello di massa m che si muove su di un piano inclinato sul quale agisce una forza u, attaccato alle pareti con due molle.

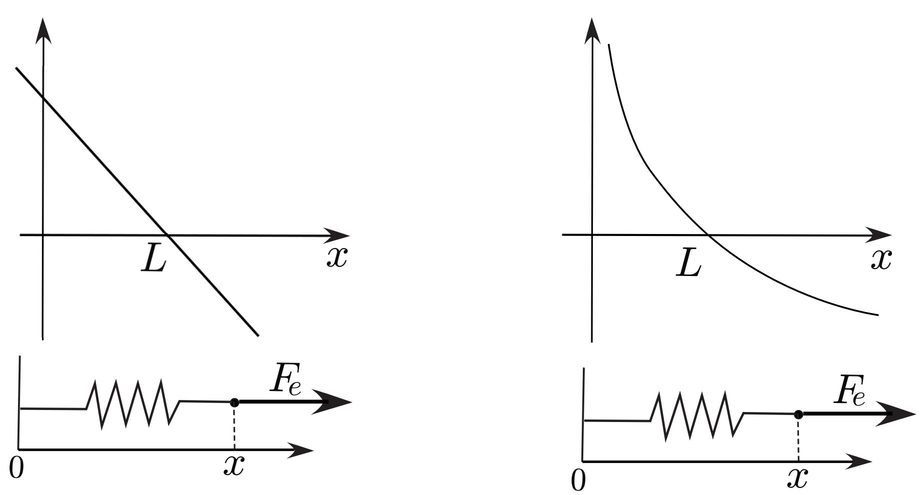
1. Determinare le equazioni del moto supponendo che entrambe le molle sono ideali con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L.

2. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$.

3. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

4. Trovare la risposta impulsiva.

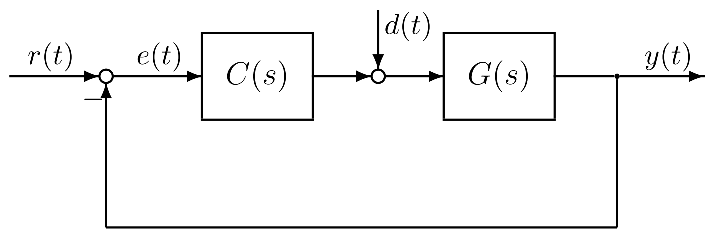
5. (Caso Nonlineare) Supponiamo ora di togliere la molla destra mentre supponiamo che quella sinistra generi una forza elastica non lineare secondo la legge mostrata nella parte destra della figura seguente (per confronto la parte sinistra mostra il caso ideale)



$$F_e = -k(x - L) \qquad\qquad F_e = k\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{L}\right)$$

dove x e' la lunghezza della molla e L e' la lunghezza a riposo della molla. Determinare le equazioni del moto. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



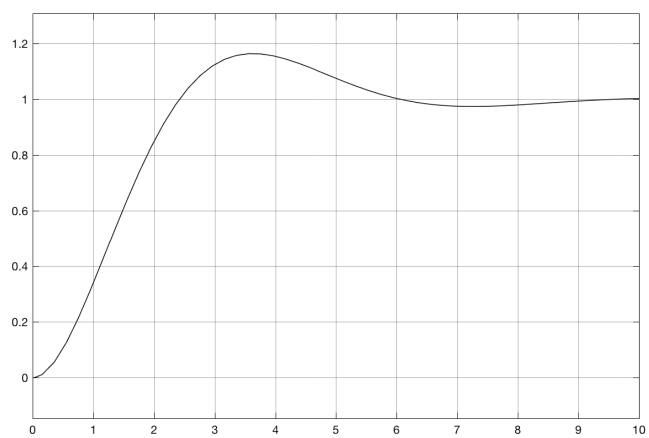
Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{b}{s^2 + s + a}$$

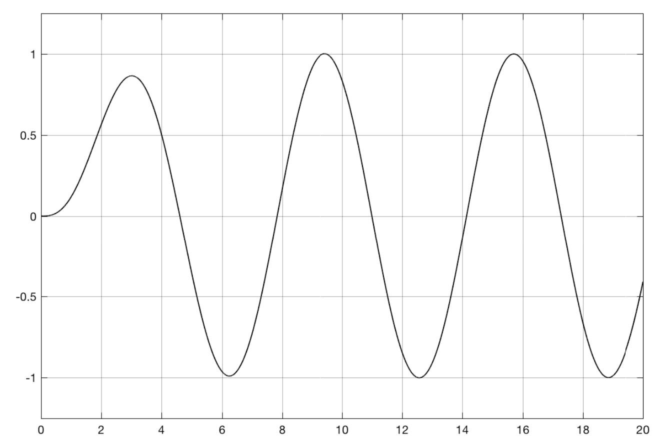
dove $a, b > 0$.

1. Determinare i valori di K e a, b che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.

2. Determinare a, b sapendo che con $K = 0$ e $d_1(t) = \delta^{(-1)}(t)$ si osserva l'uscita $y_1(t)$ mostrata in figura e invece con $K = 0$ e $d_2(t) = \sin(t)\delta^{(-1)}(t)$ si osserva l'uscita $y_2(t)$.



$y_1(t)$



$y_2(t)$

3. Supponiamo ora che $a = 4, b = 1$ e che $r(t) = \sin(2t)\delta^{(-1)}(t)$ e $d(t) = \delta^{(-1)}(t)$. Determinare l'uscita a regime $y(t)$ al variare di K.

ES. 1

1) $-m\ddot{y} - k(y-L) - k(y-Y_0+L) + u - mg\sin\theta = 0$

2) $y(t) = \bar{y} \qquad u(t) = 0$

$$-k(\bar{y}-\cancel{L}) - k(\bar{y}-Y_0+\cancel{L}) - mg\sin\theta = 0$$

$$\bar{y} = \frac{kY_0 - mg\sin\theta}{2k}$$

3) $\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y} \qquad \ddot{\tilde{y}} = \ddot{y} \qquad y = \bar{y} + \tilde{y}$

$$-m\ddot{\tilde{y}} - k(\bar{y}+\tilde{y}-L) - k(\bar{y}+\tilde{y}-Y_0+L) + u - mg\sin\theta = 0$$

$$-m\ddot{\tilde{y}} - 2k\tilde{y} + u \cancel{- k(\bar{y}-L) - k(\bar{y}-Y_0+L) - mg\sin\theta} = 0$$

$\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}] \qquad U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$

$(-ms^2 - 2k)\tilde{Y}(s) + U(s) = 0 \qquad \tilde{Y}(s) = \dfrac{1}{ms^2+2k}\,U(s)$

4) $-m\ddot{y} + k\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{L}\right) + u - mg\sin\theta = 0$

$y(t) = \bar{y} \qquad u(t) = 0$

$$k\left(\frac{1}{\bar{y}} - \frac{1}{L}\right) - mg\sin\theta = 0$$

$$\frac{k}{\bar{y}} = \frac{k}{L} + mg\sin\theta \qquad \bar{y} = \frac{k}{\frac{k}{L} + mg\sin\theta} = \frac{L}{1 + \frac{L}{k}mg\sin\theta}$$

$$k\left(\frac{1}{\bar{y}+\tilde{y}} - \frac{1}{L}\right) \simeq k\left(\frac{1}{\bar{y}} - \frac{1}{L}\right) + \left(-\frac{k}{\bar{y}^2}\right)\tilde{y}$$

$$-m\ddot{\tilde{y}} + \cancel{k\left(\frac{1}{\bar{y}} - \frac{1}{L}\right)} - \frac{k}{\bar{y}^2}\tilde{y} + u \cancel{- mg\sin\theta} = 0$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{ms^2 + \frac{k}{\bar{y}^2}}\,U(s) = \frac{1}{ms^2 + \frac{\left(\frac{k}{L} + mg\sin\theta\right)^2}{k}}\,U(s)$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) $$T_{zy}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{kb}{s(s^2+s+a)}}{1+\frac{kb}{s(s^2+s+a)}} = \frac{kb}{s(s^2+s+a)+kb}$$

Tabella di Routh $\qquad a, b > 0$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & kb \\ 1 & a-kb & \\ 0 & kb & \end{array}$$

Stabilità $\iff 0 < k < \frac{a}{b}$

2) Dai grafici desumiamo che $G(0)=1$ e $|G(j)|=1$

$$G(0) = \frac{b}{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = a$$

$$|G(j)| = \frac{b}{|-1+j+a|} = 1 \iff \frac{b^2}{(a-1)^2+1} = 1 \Rightarrow (a=b) \Rightarrow a^2 = (a-1)^2+1$$

$$\iff \cancel{a^2} = \cancel{a^2} - 2a+1+1 \iff a = 1 \Rightarrow b = 1$$

3) Supponiamo che $a=4$ e $b=1$. Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

i) $r(t) = \sin(2t)$ e $d(t) = 0$

$$y(t) \simeq |T_{zy}(2j)| \sin(2t + \angle T_{zy}(2j))$$

$$T_{zy}(2j) = \frac{k}{-\cancel{8j}-4+\cancel{8j}+k} = \frac{k}{k-4}$$ che è reale negativo per i k che stabilizzano $\Rightarrow |T_{zy}(2j)| = \frac{k}{4-k}$

$\angle T_{zy}(2j) = \pi$

ii) $r(t) = 0$ e $d(t) = 1$

$$y(t) \simeq T_{dy}(0) \qquad T_{dy}(s) = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{1}{s^2+s+4}}{1+\frac{k}{s(s^2+s+4)}} = \frac{s}{s(s^2+s+4)+k}$$

quindi $y(t) \simeq 0$

Sommando i due contributi otteniamo che la risposta a regime è

$$y(t) \simeq \frac{k}{4-k} \sin(2t+\pi) = \frac{k}{k-4} \sin(2t)$$