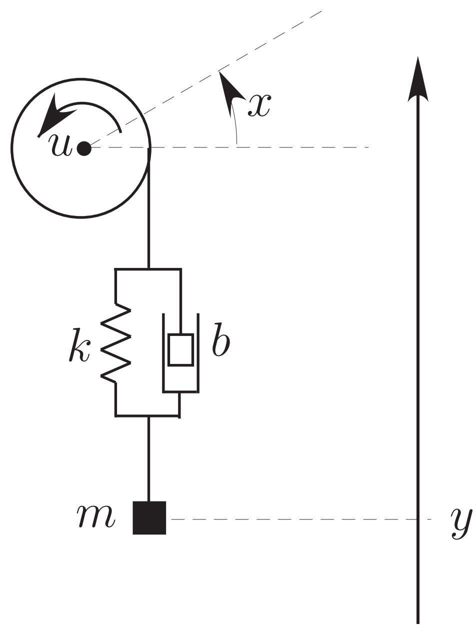
Corso di laurea in Ingegneria INFORMATICA- Compito di Fondamenti di di Controlli Automatici del 2/9/2015

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il sistema meccanico illustrato nella figura seguente

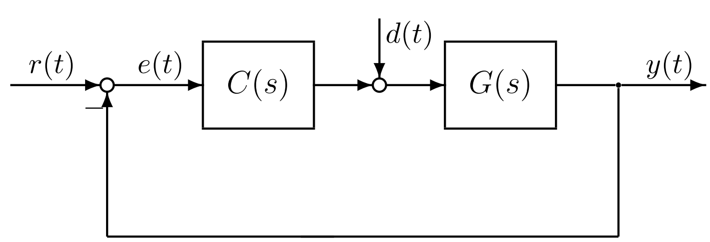


che rappresenta una carrucola di raggio R e con momento di inerzia J che ruota con attrito trascurabile alla quale e' applicata una coppia u. Questa e' collegata ad un cavo con elasticita' k e attrito b ad una massa m. La massa e' sottoposta alla forza peso (accelerazione di gravita' g) e ha posizione y.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema.

2. Determinare la coppia costante $\bar{u}$ che annulla la velocita' della massa ($\dot{y} = 0$). Sia $\tilde{u} := u - \bar{u}$. Determinare la funzione di trasferimento che lega l'ingresso $\tilde{u}$ all'uscita y.

Esercizio 2. Si consideri lo schema



Si supponga che

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(s^2 - 10s + 61)}{(s+7)^2(s-a)}$$

dove a e' un parametro reale.

1. Determinare a sapendo che -1 e' punto doppio del luogo dei poli del sistema in catena chiusa.

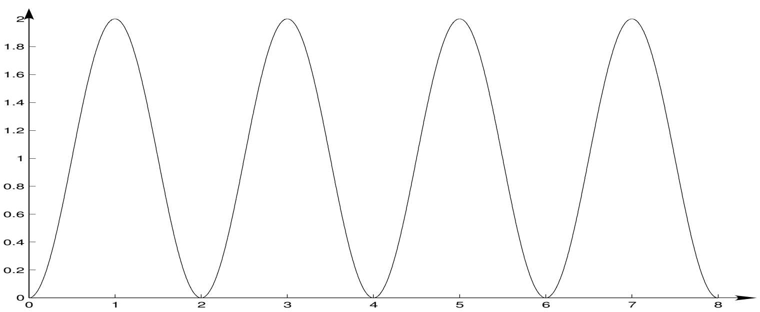
2. Supponiamo che a abbia il valor calcolato bel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e punti doppi.

3. Si trovino i valori di $K > 0$ per cui il sistema ad anello chiuso é stabile e quelli per cui tutti i modi del sistema ad anello chiuso non hanno componenti oscillatorie.

4. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-t}. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

Esercizio 3 Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $C(s) = Ks$ e $G(s) = \frac{a}{s^2+b^2}$ dove a, b, K sino numeri reali.

1. Determinare a, b sapendo che, con $K = 0$ e $d(t) = 1$ si osserva l'uscita y mostrata nella seguente figura.



2. Supponiamo che $r(t) = 5$ e $d(t) = \sin(t)$. Calcolare l'uscita a regime in funzione di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s^2+1}{(s+1)(s+4)} \qquad C(s) = K$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ determinando eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e con l'asse immaginario.

3. Tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{5}{s+1}$$

1. Si progetti un compensatore stabilizzante $C_1(s)$, in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:
   - errore a regime al gradino pari a circa 0.01;
   - pulsazione di attraversamento pari a circa 10;
   - margine di fase pari a circa 45^o.

2. Si progetti un compensatore stabilizzante $C_2(s)$, in modo da soddisfare le stesse specifiche del punto precedente eccetto il voler ottenere una pulsazione di attraversamento pari a circa 1.

ES 1

$$\begin{cases} -m\ddot{y} - b(\dot{y}-R\dot{x}) - k(y-Rx) - mg = 0 \\ -J\ddot{x} - Rb(R\dot{x}-\dot{y}) - Rk(Rx-y) + u = 0 \end{cases}$$

equazioni del moto

$\dot{y}=0 \Rightarrow \ddot{y}=0$

$\dot{x}=0 \Rightarrow \ddot{x}=0$

$\Downarrow$

$y(t)=\bar{y}$ costante

$x(t)=\bar{x}$ costante

$$\Rightarrow \begin{cases} -k(\bar{y}-R\bar{x}) - mg = 0 \\ -Rk(R\bar{x}-\bar{y}) + u = 0 \end{cases}$$

$\times R$ moltiplico sommo

$$-mgR + u = 0 \qquad \bar{u} = mgR$$

costante

Quando non si è in equilibrio

$y(t) = \bar{y} + \delta y(t) \qquad \dot{y} = \delta\dot{y} \qquad \ddot{y} = \delta\ddot{y}$

$x(t) = \bar{x} + \delta x(t) \qquad \dot{x} = \delta\dot{x} \qquad \ddot{x} = \delta\ddot{x}$

$u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$

$$-m\delta\ddot{y} - b(\delta\dot{y} - R\delta\dot{x}) - \cancel{k(\bar{y}-R\bar{x})} - k(\delta y - R\delta x) - \cancel{mg} = 0$$

$$-J\delta\ddot{x} - Rb(R\delta\dot{x} - \delta\dot{y}) - \cancel{Rk(R\bar{x}-\bar{y})} - Rk(R\delta x - \delta y) + \cancel{\bar{u}} + \delta u = 0$$

Ponendo $U(s) = \mathcal{L}[\delta u] \quad X(s) = \mathcal{L}[\delta x] \quad Y(s) = \mathcal{L}[\delta y]$

$$\begin{cases} (ms^2+bs+k)Y(s) = (bs+k)R\,X(s) \\ (Js^2+bR^2s+kR^2)X(s) = (bs+k)R\,Y(s) + U(s) \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{ms^2+bs+k}{(bs+k)R}\,Y(s)$$

$$(Js^2+bR^2s+kR^2)(ms^2+bs+k)Y(s) = (bs+k)^2R^2\,Y(s) + (bs+k)R\,U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(bs+k)R}{(Js^2+bR^2s+kR^2)(ms^2+bs+k) - (bs+k)^2R^2}$$

$\boxed{ES.2}$ Luogo delle radici di $(s+7)^2(s-a)+k(s^2-10s+61)$

1) $\begin{cases}(s+7)^2(s-a)+k(s^2-10s+61)=0\\ 2(s+7)(s-a)+(s+7)^2+k(2s-10)=0\end{cases} \xrightarrow{s=-1} \begin{cases}6^2(-1-a)+k(1+10+61)=0\\ 2\cdot 6(-1-a)+6^2+k(-2-10)=0\end{cases}$

$\begin{cases}-36-36a+72k=0\\ -12-12a+36-12k=0\end{cases}$

$a=1$

$k=1$

---

2) Altri punti doppi

$\begin{cases}(s+7)^2(s-1)+k(s^2-10s+61)=0\\ 2(s+7)(s-1)+(s+7)^2+k(2s-10)=0\end{cases} \rightarrow k=-\dfrac{(s+7)[2s-2+s+7]}{2s-10}$

$(s+7)^{\cancel{2}}(s-1)-\dfrac{\cancel{(s+7)}(3s+5)}{2(s-5)}(s^2-10s+61)=0$

$2(s-5)(s+7)(s-1)-(3s+5)(s^2-10s+61)=0$

$s^3-27s^2+207s+235=0$

$$\begin{array}{l|l} s^3-27s^2+207s+235 & s+1 \\ \hline s^3+s^2 & s^2-28s \\ \hline -28s^2+207s+235 & +235 \\ -28s^2-28s & \\ \hline 235s+235 & \end{array}$$

$s_{12}=14\pm\sqrt{196-235}$ complessi non reali

Intersezione assi ~~s^3+14s^2+49s~~ $s^3+(13+k)s^2+(35-10k)s+61k-49$

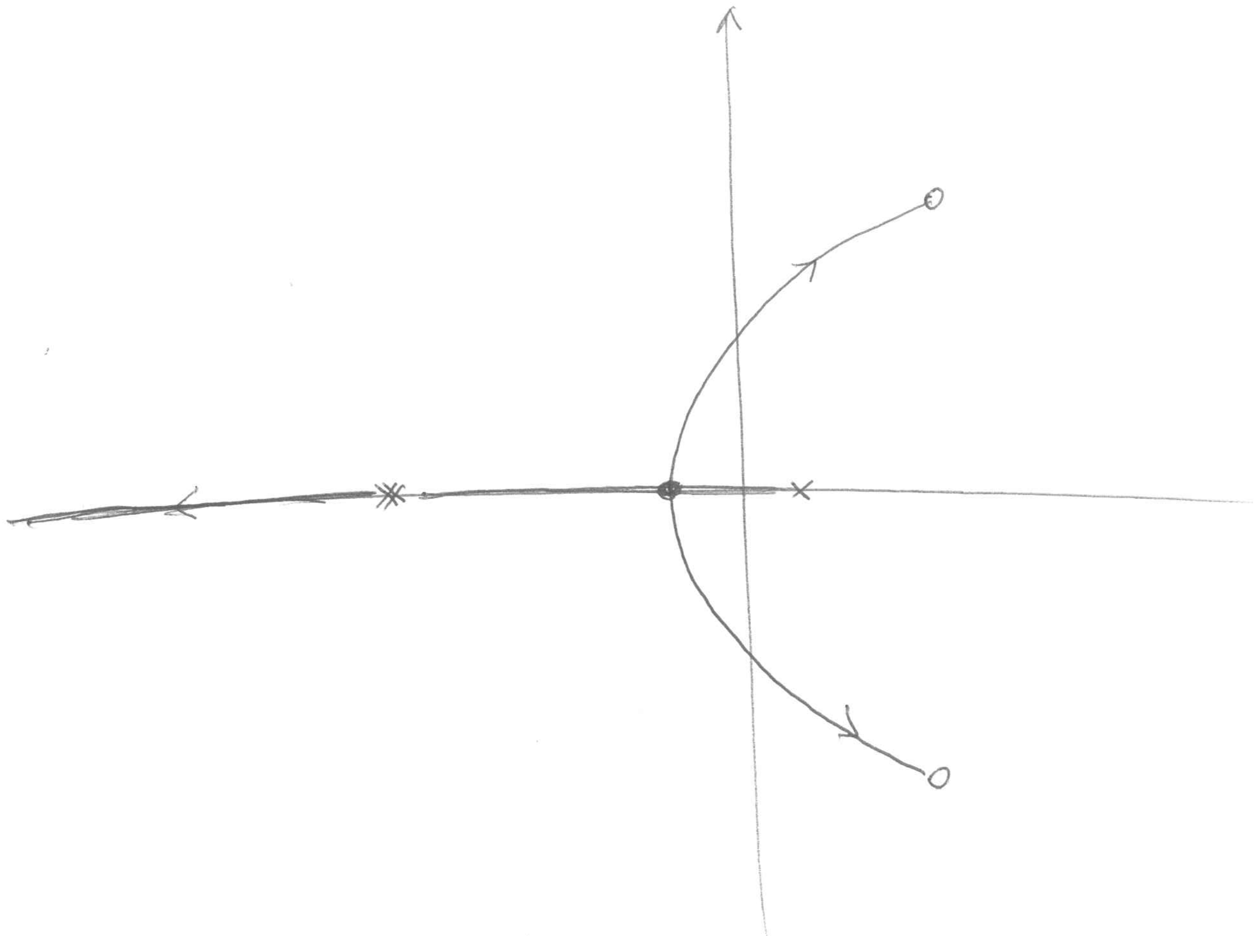
Tabella di Routh

1	1	$35-10k$
2	$13+k$	$-49+61k$
3	$-\dfrac{10k^2+156k-504}{13+k}$	
4	$-49+61k$	

$k = \begin{cases}-18,35\\ 2,75\end{cases}$

$(13+2,7)s^2+(-49+61\cdot 2,7)=0$

$s_{12}=\pm j\,2.7$



3) Stabilità per $0 \le k \le 2{,}75$

No componenti oscillatorie per $0 \le k \le 1$

4) C'è il modo e^{-t} se $s=-1$ è soluzione

di $(s+7)^2(s-1)+k(s^2-10s+61) \to$

e ciò avviene quando il luogo tocca

il punto $s=-1$ cioè per $k=-1$ (punto doppio)

quindi per $k=1$ il polinomio $(s+7)^2(s-1)+(s^2-10s+61)$

sarà divisibile per $(s+1)^2$

$$\begin{array}{l|l} s^3+14s^2+25s+12 & s^2+2s+1 \\ s^3+2s^2+s & \hline s+12 \\ \hline \quad 12s^2+24s+12 & \end{array}$$

altra soluzione è $s=-12$

Modi sono e^{-t}, te^{-t}, e^{-12t}

Es. 3

1. $D(s) = \frac{1}{s}$ $\qquad Y(s) = \frac{a}{s^2+b^2}\frac{1}{s}$

Dalla figura si nota che $y(t) = 1 - \cos\omega t$ periodica

Il periodo è $T = 2$ e quindi $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

$$y(t) = 1 - \cos\pi t = 1 - \frac{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\pi} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\pi} = \frac{2(s^2+\pi^2) - s(s+j\pi) - s(s-j\pi)}{2s(s^2+\pi^2)}$$

$$= \frac{\cancel{2s^2} + 2\pi^2 - \cancel{s^2} - \cancel{j\pi s} - \cancel{s^2} + \cancel{j\pi s}}{2s(s^2+\pi^2)} = \frac{\pi^2}{s(s^2+\pi^2)} = \frac{a}{s(s^2+b^2)}$$

$a = \pi^2 \qquad b = \pi$

2. $$T_{uy}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{ks}{s^2+b^2+kas} = \frac{ks}{s^2+k\pi^2 s+\pi^2}$$

$$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{\pi^2}{s^2+k\pi^2 s+\pi^2}$$

i) $u(t) = 5 \quad d(t) = 0 \qquad y(t) \simeq T_{uy}(0)\,5 = 0$

ii) $u(t) = 0 \quad d(t) = \sin t$

$$y(t) \simeq |T_{dy}(j)| \sin\left(t + \angle T_{dy}(j)\right)$$

$$|T_{dy}(j)| = \frac{\pi^2}{|\pi^2 - 1 + jk\pi^2|} = \frac{\pi^2}{\sqrt{k^2\pi^4 + (\pi^2-1)^2}}$$

$$\angle T_{dy}(j) = -\angle\left((\pi^2-1) - jk\pi^2\right) = -\operatorname{arctg}\frac{k\pi^2}{\pi^2-1}$$

Ciò vale quando il sistema retroazionato è <u>STABILE</u>

Per la regola di Cartesio il denominatore $s^2+k\pi^2 s+\pi^2$

è stabile $\Leftrightarrow k > 0$

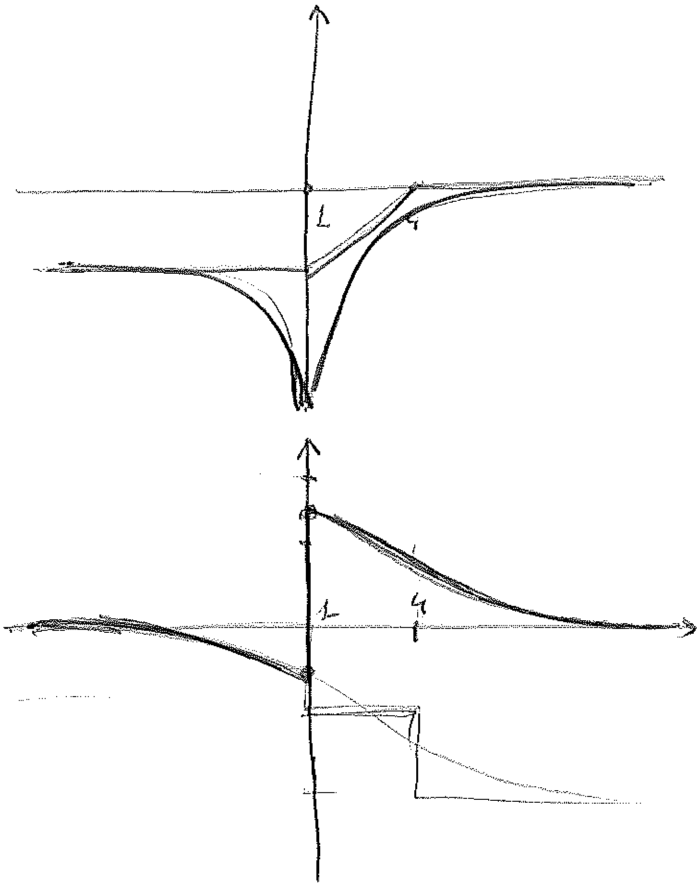
Es. 4

1) $G(s) = \frac{1}{4} \frac{1+s^2}{(1+s)(1+s/4)}$

punti spezzamento

$\omega_1 = 1$

$\omega_2 = 4$



2) $G(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$

$= \frac{(1-\omega^2)(1-j\omega)(4-j\omega)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$

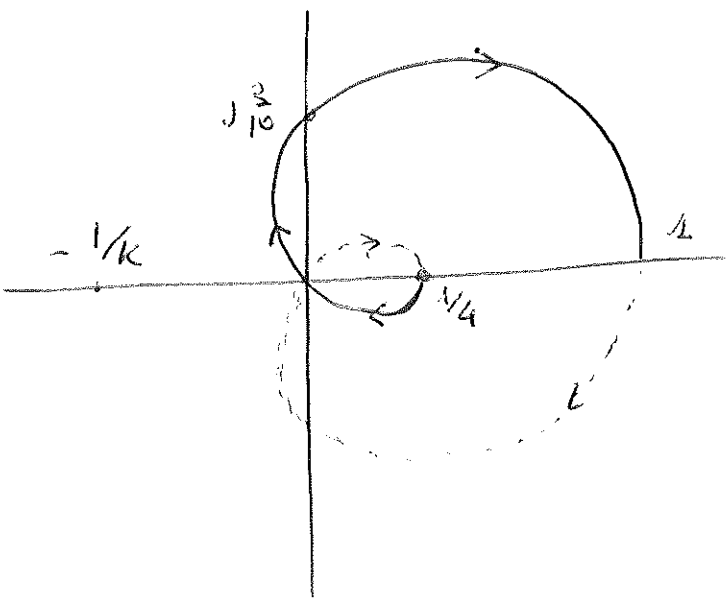
$\mathrm{Re}\ G(j\omega) = \frac{(1-\omega^2)(4-\omega^2)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$

$\mathrm{Im}\ G(j\omega) = \frac{(1-\omega^2)(-5\omega)}{(1+\omega^2)(16+\omega^2)}$

$\omega = 0 \quad G(0) = \frac{1}{4}$

$\omega = 1 \quad G(j) = 0$

$\omega = 2 \quad \mathrm{Re} = 0 \quad \mathrm{Im} = 3/10$



3) $P = 0 \qquad Z = -N$

$-\frac{1}{k} < 0 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$ stabile $k > 0$

$< -\frac{1}{k} < \frac{1}{4} \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2$ instabile $k < -4$

$< -\frac{1}{k} < 1 \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 1$ instabile $-4 < k < -1$

$-1/k > 1 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$ stabile $-1 < k < 0$

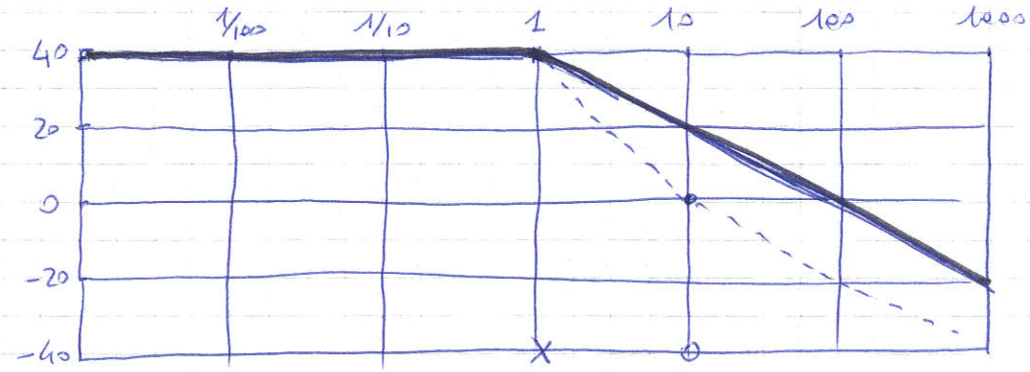
ES. 5

$$C(s) = \frac{k_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s) \quad \text{con} \quad \bar{C}(0) = 1$$

$h_c = 0 \qquad K_c = 20 \qquad \hat{W}(s) = G(s) \frac{k_c}{s^{h_c}} = \frac{100}{s+1}$

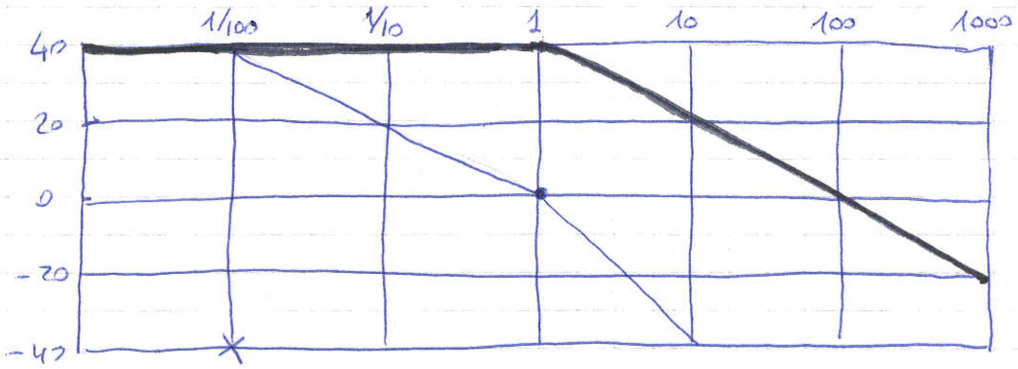
Costruiamo $\bar{C}(s)$

1) $\omega_A = 10 \qquad m_\varphi \simeq 45°$



$$\bar{C}(s) = \frac{1 + s/10}{1 + s}$$

2) $\omega_A = 1 \qquad m_\varphi \simeq 45°$



$$\bar{C}(s) = \frac{1}{1 + 100 s}$$

Soluzione alternativa $\quad \bar{C}(s) = \dfrac{(1+s)^2}{(1+10s)^2}$