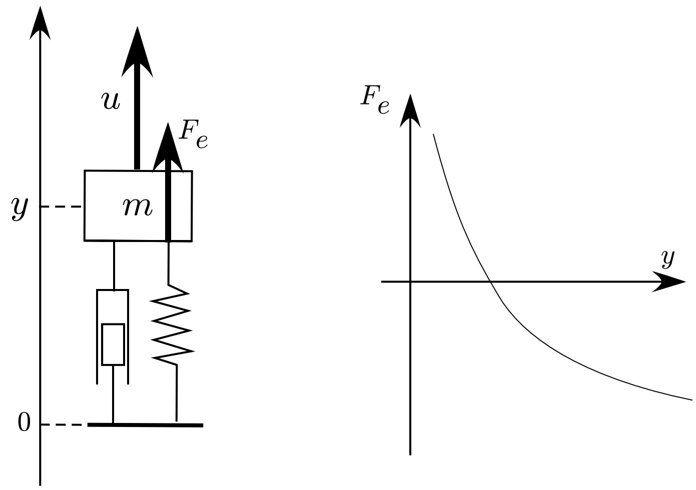
Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Si tratta di una massa appoggiata al suolo tramite una molla e uno smorzatore. Sulla massa agisce la forza di gravita' e una forza esterna u. Supponiamo che la forza elastica F_e generata dalla molla dipenda dalla sua lunghezza y secondo la funzione

$$F_e = k\left(\frac{L}{y} - 1\right)$$

dove k, L sono costanti positive.

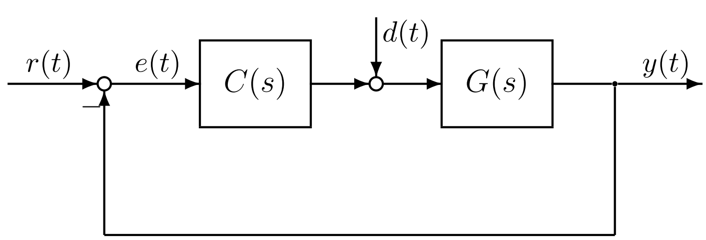
1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = \bar{u}$.
3. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{(2)} = u^{(1)} + 2u$$

1. Determinare la funzione di trasferimento.
2. Determinare la risposta libera supponendo che le condizioni iniziali siano $y^{(1)}(0^-) = 1$ e $y(0^-) = -1$.
3. Determinare la risposta forzata supponendo che l'ingresso e' $u(t) = e^{-t}$ per $t \geq 0$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2+8s+25)}$$

1. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ sapendo che esistono due punti doppi, uno in $s = -3$, che si ottiene per $K = 50$, e un altro in $s = -1$, che si ottiene per $K = 54$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.

2. Determinare i valori di K in corrispondenza dei quali la risposta impulsiva del sistema in catena chiusa contiene dei modi puramente oscillatori. Determinare tutti i modi corrispondenti a tale valore di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s-2)} \, .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa, al variare del parametro reale K (negativo e positivo).

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{10}{1+10s}$$

Attraverso la sintesi di Bode (o sintesi in frequenza) si determini il compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta alla rampa di circa $\simeq 0,01$;

2. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 10$;

3. margine di fase $m_\varphi \simeq 90^0$.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) $-m y^{(2)} - b y^{(1)} + k\left(\frac{L}{y} - 1\right) + u - mg = 0$

2) $y(t) = \bar{y}$ $\quad u(t) = \bar{u}$ $\qquad y^{(1)} = y^{(2)} = 0 \Rightarrow k\left(\frac{L}{\bar{y}} - 1\right) + \bar{u} - mg = 0$

$$k\left(\frac{L}{\bar{y}} - 1\right) = mg - \bar{u}$$

$$\frac{L}{\bar{y}} - 1 = \frac{mg - \bar{u}}{k} \Rightarrow \frac{L}{\bar{y}} = \frac{mg - \bar{u}}{k} + 1 \Rightarrow \bar{y} = \frac{L}{\frac{mg - \bar{u}}{k} + 1}$$

$$= \frac{kL}{mg - \bar{u} + k}$$

3) $\tilde{y}(t) \triangleq y(t) - \bar{y}$ $\qquad \hat{u}(t) = u(t) - \bar{u}$

$\tilde{y}^{(1)} = y^{(1)}$ $\qquad \tilde{y}^{(2)} = y^{(2)}$

$$-m\tilde{y}^{(2)} - b\tilde{y}^{(1)} + k\left(\frac{L}{\bar{y} + \tilde{y}} - 1\right) + \bar{u} + \tilde{u} - mg = 0$$

Sia $f(y) = \frac{1}{y}$ $\qquad \underset{\frac{1}{\bar{y}+\tilde{y}}}{\underset{\shortparallel}{f(\bar{y}+\tilde{y})}} \simeq f(\bar{y}) + f'(\bar{y})\tilde{y} = \frac{1}{\bar{y}} - \frac{1}{\bar{y}^2}\tilde{y}$

$$-m y^{(2)} - b\tilde{y}^{(1)} + k\left(\frac{L}{\bar{y}} - \frac{L}{\bar{y}^2}\tilde{y} - 1\right) + \bar{u} + \hat{u} - mg = 0$$

$$-m y^{(2)} - b\hat{y}^{(1)} - \frac{kL}{\bar{y}^2}\tilde{y} + \hat{u} + \underbrace{k\left(\frac{L}{\bar{y}} - 1\right) + u - mg}_{=0} = 0$$

$\downarrow$ Laplace

$$-\left(ms^2 + bs + \frac{kL}{\bar{y}^2}\right)\tilde{Y}(s) = \tilde{U}(s)$$

$$\tilde{Y}(s) = \underbrace{\frac{1}{ms^2 + bs + \frac{kL}{\bar{y}^2}}}_{\text{funzione di trasferimento}} \tilde{U}(s)$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) $W(s) = \dfrac{s+2}{s^2}$

2) $\mathcal{L}[y^{(2)}] = \mathcal{L}[u^{(1)} + 2u]$

$$s^2 Y(s) - s y(0^-) - y^{(1)}(0^-) = (s+2) U(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s y(0^-) + y^{(1)}(0^-)}{s^2}}_{Y_e(s)} + \underbrace{\frac{s+2}{s^2} U(s)}_{Y_f(s)}$$

$$Y_e(s) = \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \qquad \mathcal{L}^{-1}[Y_e(s)] = 1 - t$$

3) $U(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$$Y_f(s) = \frac{s+2}{s^2}\frac{1}{s+1} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1} = \frac{A(s+1) + B(s^2+s) + Cs^2}{s^2(s+1)} =$$

$$= \frac{(B+C)s^2 + (A+B)s + A}{s^2(s+1)} = \frac{s+2}{s^2(s+1)}$$

$$\begin{cases} B+C=0 \\ A+B=1 \\ A=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=1 \\ B=-1 \\ A=2 \end{cases}$$

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right] = 2t - 1 + e^{-t}$$

4) Se $u(t) = 10 \sin(3t)$

$y(t)$ a regime vale $y(t) \simeq 10|G(j3)| \sin(3t + \angle G(j3))$

Dalla figura si nota che $y(t)$ a regime è regolare sinusoidale di ampiezza 2. Quindi

$$10|G(3j)| = 2$$

$$10 \frac{1}{\sqrt{|3j+a|}} = 2 \Rightarrow \frac{100}{9+a^2} = 4 \Rightarrow 100 = 36 + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a^2 = 64 \Rightarrow a = 4$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

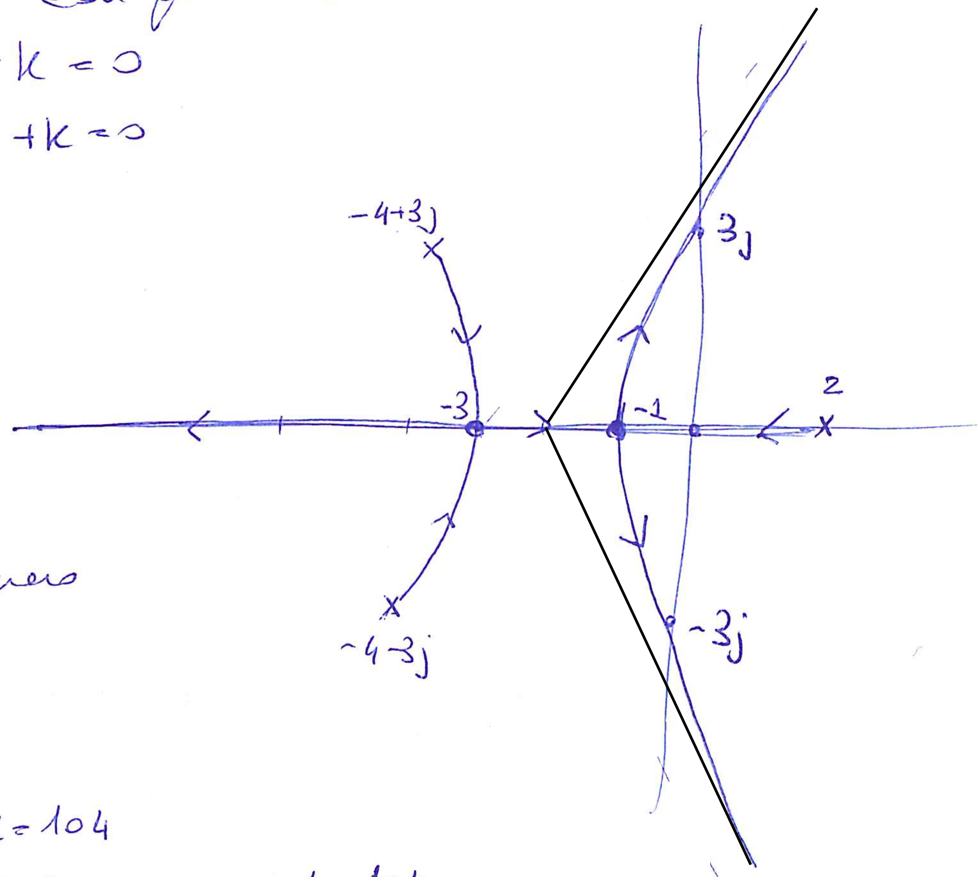
1) poli coincidono con gli zeri di

$$(s-2)(s^2+8s+25)+k=0$$

$$s^3+6s^2+9s-50+k=0$$

radici di $s^2+8s+25$

$$s_{12}=-4\pm\sqrt{16-25}=-4\pm j3$$



Asintoti

$$\sigma_e=\frac{-4+\cancel{3j}-4-\cancel{3j}+2}{3}=-2$$

Intersezione asse immaginario

3	1	9
2	6	$k-50$
1	$\frac{104-k}{6}$	
0	$k-50$	

Per $k=104$

$6s^2+k-50=0 \qquad k=104$

$6s^2+54=0 \iff s^2+9=0 \qquad s_{12}=\pm 3j$

2) $k=104$

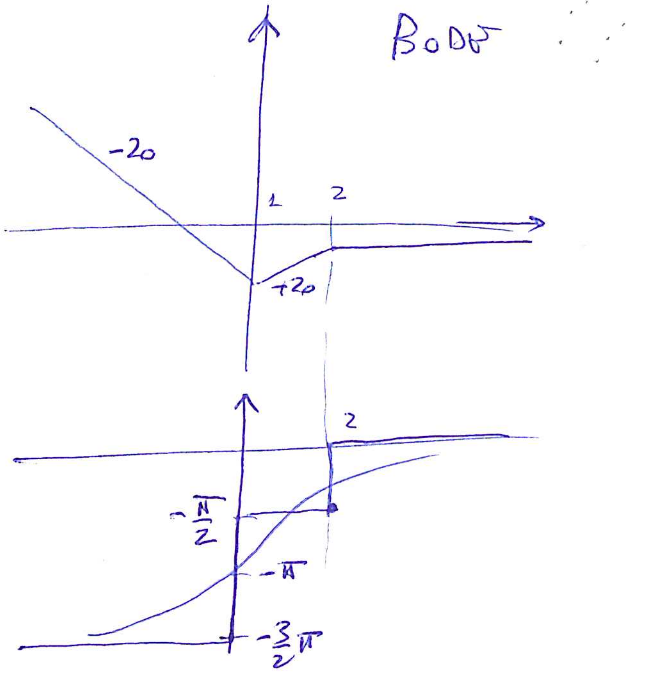
$$s^3+6s^2+9s-50+k=s^3+6s^2+9s+54$$

$s^3+6s^2+9s+54$	s^2+9
$s^3 \quad +9s$	$s+6$
$6s^2 \quad +54$	
$6s^2 \quad +54$	
0	

$\cos 3t$, $\sin 3t$, e^{-6t}

$\boxed{\text{ES 4}}$

BODE



1) $G(s) = -\frac{1}{2}\,\frac{(1+s)^2}{s(1-s/2)}$

2) $G(j\omega) = \frac{1-\omega^2+2j\omega}{j\omega(-2+j\omega)} = \frac{(1-\omega^2+2j\omega)(-2-j\omega)}{j\omega(4+\omega^2)} = \frac{-2+2\omega^2+2\omega^2+j\omega(-\omega^2-4)}{-j\omega(4+\omega^2)}$

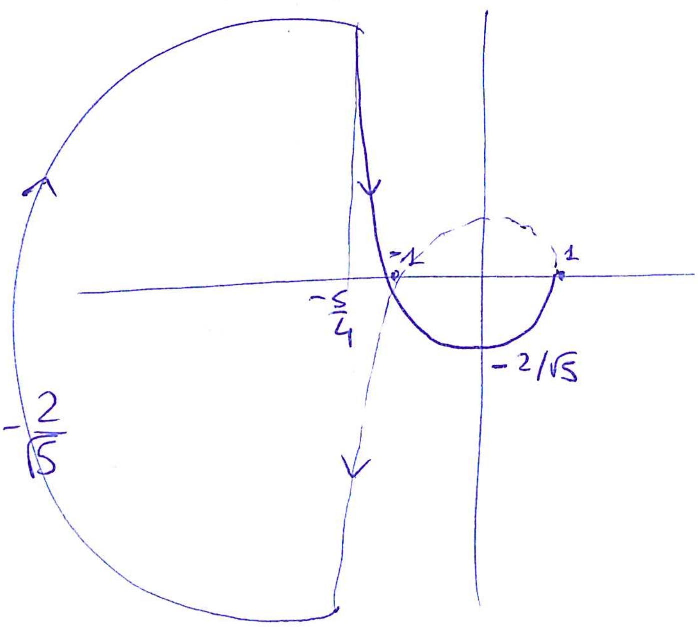
$\text{Re}\,G(j\omega) = \frac{\omega^2-5}{\omega^2+4}$

$\text{Im}\,G(j\omega) = \frac{2-4\omega^2}{\omega(\omega^2+4)}$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\quad \text{Im} = 0 \quad \text{Re} = \frac{\frac{1}{2}-5}{\frac{1}{2}+4} = \frac{-9/2}{9/2} = 1$

$\omega = \sqrt{5}$ $\quad \text{Re} = 0 \quad \text{Im} = \frac{2-4\cdot 5}{\sqrt{5}(5+4)} = \frac{-18}{\sqrt{5}\,9} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

ω	Re	Im
0^+	$-5/4$	$+\infty$
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	-1	0
$\sqrt{5}$	0	$-2/\sqrt{5}$
$+\infty$	1	0

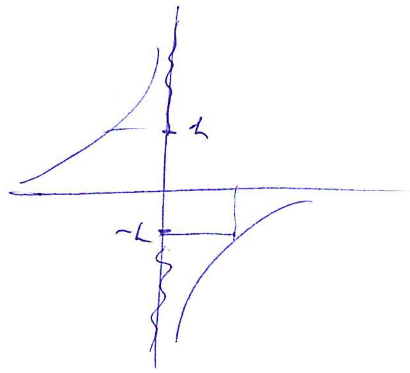


3) $P = 1 \qquad Z = 1 - N$

$-\frac{1}{k} < -1 \qquad N = -1 \qquad Z = 2 \quad (0<k<1)$

$-1 < -\frac{1}{k} < 1 \qquad N = 1 \qquad Z = 0 \quad (k<-1 \cup k>1)$

$-\frac{1}{k} > 1 \qquad N = 0 \qquad Z = 1 \quad (-1<k<0)$



ES.5

errore alla rampe $\simeq 0.01 = \frac{1}{100} = \varepsilon \Rightarrow h_W = 1 \quad k_W = 100 = \frac{1}{\varepsilon}$

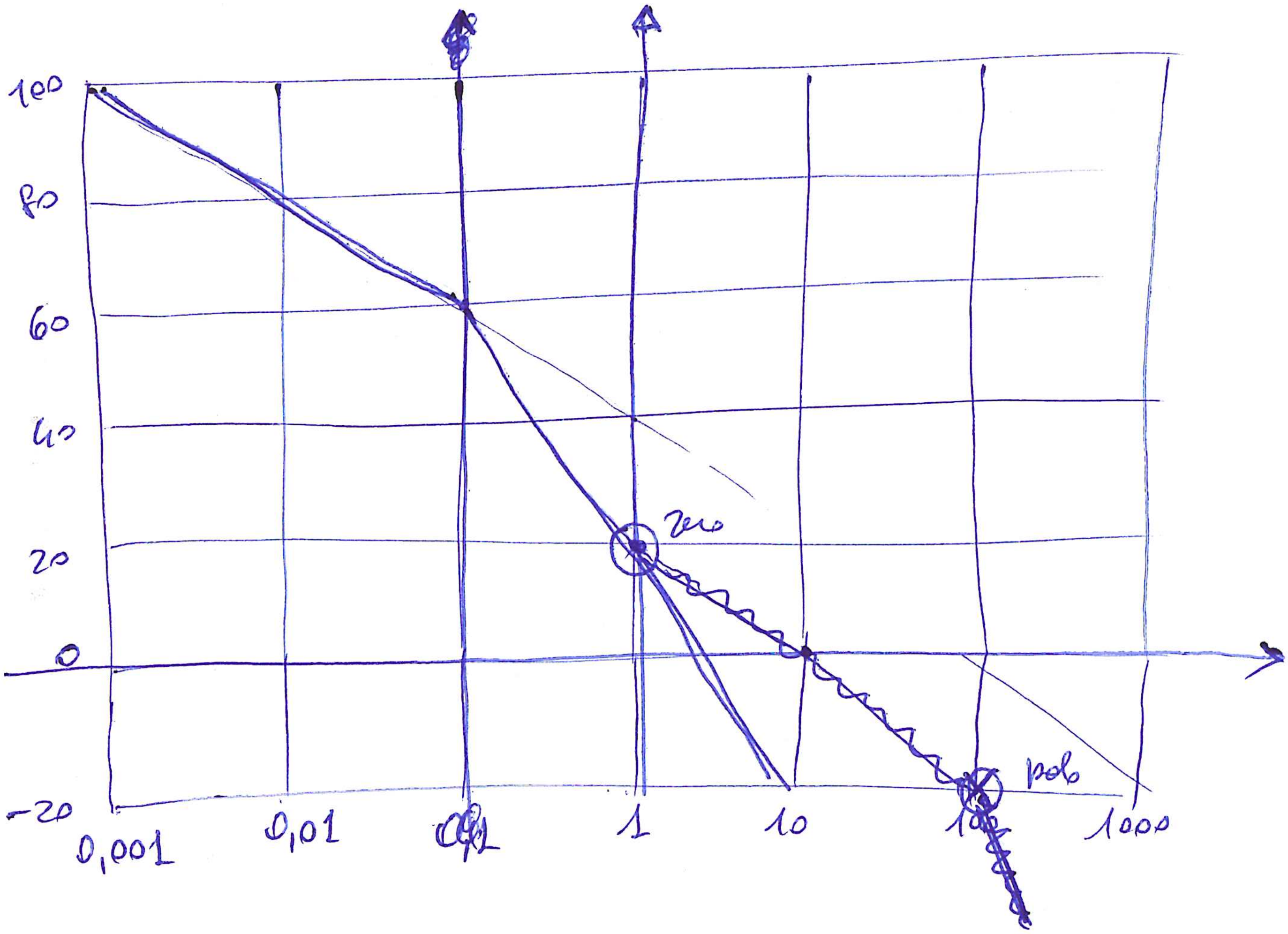
$G(s) = 10 \frac{1}{1+10s}$ forma di Bode $\Rightarrow k_G = 10$

$h_G = 0$

$h_C = h_W - h_G = 1 - 0 = 1$

$k_C = \frac{k_W}{k_G} = \frac{100}{10} = 10$

$\hat{W} = \frac{100}{s(1+10s)}$



$\bar{C}(s) = \frac{1+s}{1+\frac{s}{100}}$

$C(s) = \frac{10}{s} \frac{1+s}{1+\frac{s}{100}}$