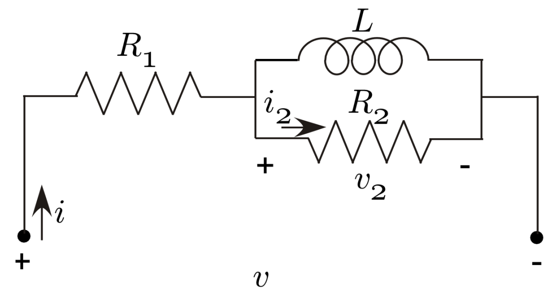
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 3/2/2021

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico



dove $R_1 = 2, R_2 = 1, L = 1$.

1. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $i(t)$ (corrente) e l'uscita $v(t)$ (tensione). Determinare la risposta impulsiva.

Supponiamo ora che la resistenza R_2 sia sostituita con un componente non lineare tale che lega la tensione e corrente attraverso la relazione

$$v_2 = f(i_2)$$

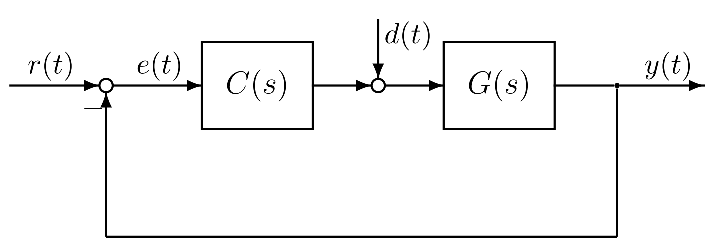
dove $f(x) = C\ln(x)$, con $C > 0$.

2. Trovare le equazioni che legano le variabili $v(t), i(t), i_2(t)$.

3. Determinare l'evoluzione di equilibrio $v(t) = \bar{v}$ in corrispondenza all'ingresso $i(t) = \bar{i}$.

4. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}$ e l'uscita $\tilde{v}(t) := v(t) - \bar{v}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

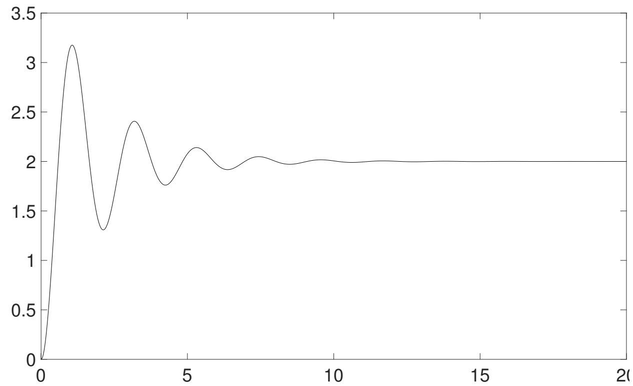


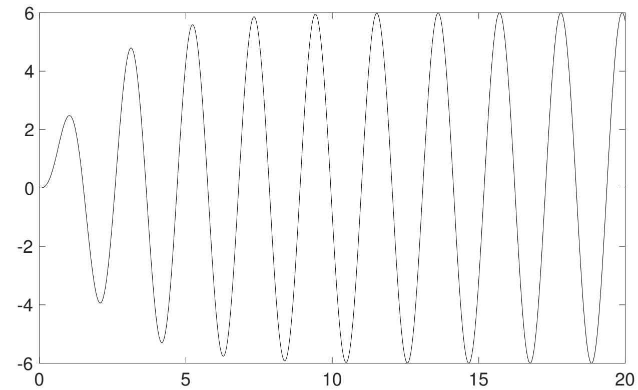
Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{b}{s^2 + s + a}$$

1. Determinare i valori di K e a, b che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.

2. Determinare $a, b \geq 0$ sapendo che con $K = 0$, se $d(t) = 1$ (gradino) si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura 1 e mentre se $d(t) = \sin(3t)$ e si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura 2.





3. Supponiamo ora che $a = 9, b = 1$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ sapendo che $r(t) = 1$ (gradino) e $d(t) = \sin(3t)$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s+6}{(s+3)^2(s-2)}$$

1. Si verifichi che $s = 0$ é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ sapendo che esistono due punti doppi, uno in $s = -3$, che si ottiene per $K = 0$, e un altro in $s = 0$, che si ottiene per $K = 3$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale la risposta impulsiva in catena chiusa contiene il modo costante 1. Determinare tutti i modi corrispondenti a tale valore di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)^2} \, .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{3}{s+10}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino $\simeq 0,01$;

2. margine di fase $m_\varphi \simeq 90^0$;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 10$.

ES. 1

1) $\begin{cases} v = R_1 i + R_2 i_2 \\ R_2 i_2 = L(i - i_2)^{(1)} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} V = R_1 I + R_2 I_2 \\ R_2 I_2 = sL(I - I_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V = 2I + I_2 \\ I_2 = s(I - I_2) \end{cases}$

$$V = 2I + \frac{s}{s+1} I = \left(2 + \frac{s}{s+1}\right) I = \frac{2s+2+s}{s+1} I = \frac{3s+2}{s+1} I \qquad I_2 = \frac{s}{s+1} I$$

$$W(s) = \frac{3s+2}{s+1} = \frac{3s+3-1}{s+1} = 3 - \frac{1}{s+1}$$

$$w(t) = 3\delta(t) - e^{-t} \quad t > 0$$

2) $\begin{cases} v = 2i + f(i_2) \\ f(i_2) = (i - i_2)^{(1)} \end{cases}$

3) Equilibrio $\Rightarrow$ $i(t) = \bar{i}$ $v(t) = \bar{v}$ $i_2(t) = \bar{i}_2$ costanti

$\begin{cases} \bar{v} = 2\bar{i} + f(\bar{i}_2) \\ f(\bar{i}_2) = (\bar{i} - \bar{i}_2)^{(1)} = 0 \end{cases} \qquad f(\bar{i}_2) = C\ln(\bar{i}_2) = 0 \qquad \begin{matrix} \bar{v} = 2\bar{i} + \cancel{f(\bar{i}_2)} \\ \bar{i}_2 = 1 \end{matrix}$

4) $\tilde{v}(t) = v(t) - \bar{v}$ $\tilde{i}(t) = i(t) - \bar{i}$ $\tilde{i}_2(t) = i_2(t) - \bar{i}_2$

$\begin{cases} \cancel{\bar{v}} + \tilde{v} = 2(\bar{i} + \tilde{i}) + f(\bar{i}_2 + \tilde{i}_2) \simeq \cancel{2\bar{i}} + 2\tilde{i} + \cancel{f(\bar{i}_2)} + f'(\bar{i}_2)\tilde{i}_2 \\ f(\bar{i}_2 + \tilde{i}_2) \simeq \cancel{f(\bar{i}_2)} + f^{(1)}(\bar{i}_2)\tilde{i}_2 = (\cancel{\bar{i}} + \tilde{i} - \cancel{\bar{i}_2} - \tilde{i}_2)^{(1)} = \tilde{i}^{(1)} - \tilde{i}_2^{(1)} \end{cases}$

$\begin{cases} \tilde{v} = 2\tilde{i} + f'(\bar{i}_2)\tilde{i}_2 \\ f^{(1)}(\bar{i}_2)\tilde{i}_2 = \tilde{i}^{(1)} - \tilde{i}_2^{(1)} \end{cases} \qquad f'(x) = \frac{C}{x} \Rightarrow f'(\bar{i}_2) = \frac{C}{\bar{i}_2} = \frac{C}{1} = C$

$\begin{cases} \tilde{v} = 2\tilde{i} + C\tilde{i}_2 \\ C\tilde{i}_2 = \tilde{i}^{(1)} - \tilde{i}_2^{(1)} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} \tilde{V} = 2\tilde{I} + C\tilde{I}_2 \\ C\tilde{I}_2 = s\tilde{I} - s\tilde{I}_2 \end{cases} \rightarrow \tilde{I}_2 = \frac{s}{s+C}\tilde{I}$

$$V = 2\tilde{I} + C\frac{s}{s+C}\tilde{I} = \left[2 + \frac{sC}{s+C}\right]\tilde{I} = \frac{2s+2C+sC}{s+C}\tilde{I}$$

$$W(s) = \frac{(C+2)s + 2C}{s+C}$$

ES. 2

1. $T_{zy}(s) = \dfrac{CG}{1+CG} = \dfrac{kb}{s(s^2+s+a)+kb}$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a \\ 2 & 1 & kb \\ 1 & a-kb & \\ 0 & kb & \end{array}$$

$T_{dy}(s) = \dfrac{G}{1+CG} = \dfrac{sb}{s(s^2+s+a)+kb}$

2. Dalla figura si nota che

$$\begin{cases} G(0) = 2 \\ |G(3j)| = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b/a = 2 \\ \left|\dfrac{b}{-9+3j+a}\right|^2 = 36 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2a \\ \dfrac{4a^2}{(a-9)^2+9} = \cancel{36}\ 9 \end{cases}$$

$a^2 = 9(a-9)^2 + 81$ equazione di 2° grado $a_{12} \begin{cases} 9 \\ 45/4 \end{cases}$ $b_{12} = \begin{cases} 18 \\ \frac{45}{2} \end{cases}$

3) $a = 9$ $b = 1$

$T_{zy}(s) = \dfrac{k}{s(s^2+s+9)+k}$ $T_{dy}(s) = \dfrac{s}{s(s^2+s+9)+k}$

$T_{zy}(1) = 1$

$T_{dy}(3j) = \dfrac{3j}{3j(\cancel{-9}+3j+\cancel{9})+k} = \dfrac{3j}{k-9}$ $\begin{cases} |T_{dy}(3j)| = \dfrac{3}{9-k} \\ \angle T_{dy}(3j) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$y(t) \simeq 1 + \dfrac{3}{9-k} \sin\left(3t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

1) punti doppi

$$\begin{cases} (s+3)^2(s-2)+k(s+6)=0 \\ 2(s+3)(s-2)+(s+3)^2+k=0 \end{cases} \rightarrow K = -(s+3)(2s-4+s+3)$$

$$= -(s+3)(3s-1)$$

$$(s+3)^2(s-2)-(s+3)(3s-1)(s+6)=0$$

$$(s+3)\left[s^2+3s-2s\cancel{-6}-3s^2-18s+s\cancel{+6}\right]=0$$

$$-(s+3)s(2s+16)=0 \qquad s_1=-3 \qquad s_2=0 \qquad s_3=-8$$

luogo negativo

$$K_1=0 \qquad K_2=3$$

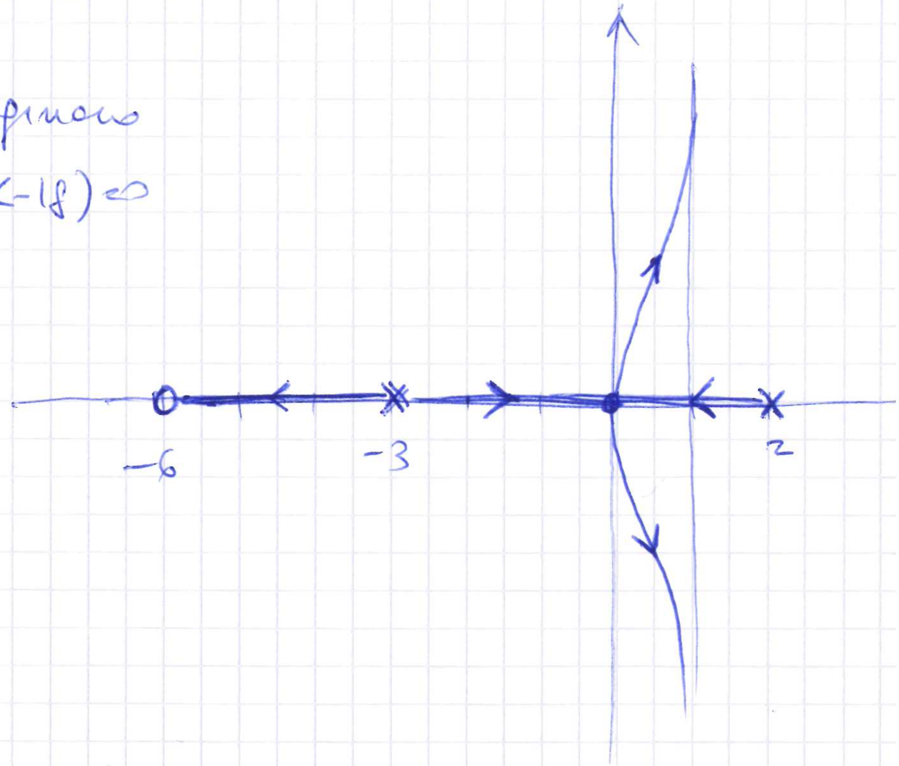
2) Asintoti

$$\sigma_a = \frac{-3-3+2-(-6)}{2} = 1$$

Intersezione asse immaginario

$$s^3+4s^2+(k-3)s+(6k-18)=0$$

3	1	$k-3$
2	4	$6k-18$
1	$\frac{6-2k}{4}$	
0	$6k-18$	



$K=3$ si annulla la riga

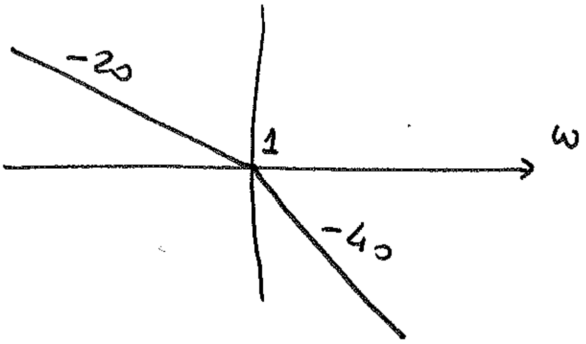
$$4s^2+(6k-18) = 4s^2+0$$

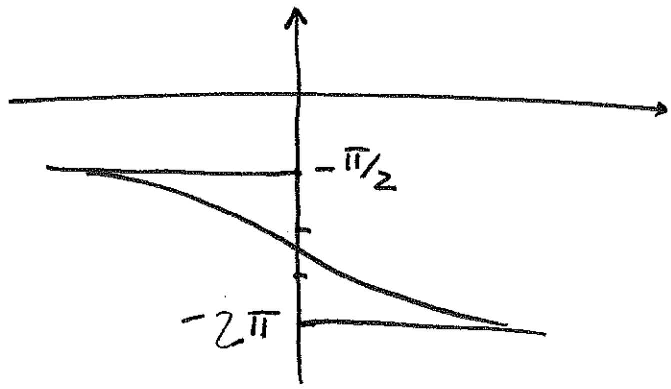
intersezione per $s=0$

3) Il modo 1 è associato al polo nell'origine che si ottiene per $K=3$. Per tale K il polinomio diventa s^3+4s^2 e quindi il polo $s=0$ è doppio e l'ultimo polo è in $s=-4$ $\Rightarrow$ modi sono $1, t, e^{-4t}$

ES.4

1. $G(s)$ è già in forma di Bode



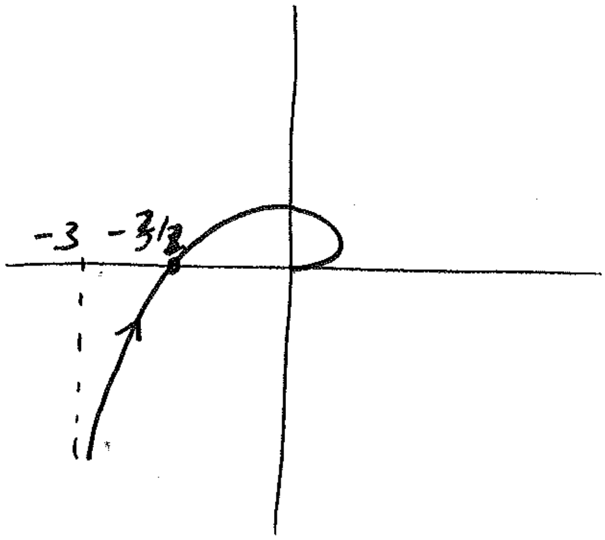


2. $G(j\omega) = \dfrac{1 - j\omega}{j\omega(1+j\omega)^2}$

$$Re = \frac{\omega^2 - 3}{(1+\omega^2)^2}$$

$$Im = \frac{3\omega^2 - 1}{\omega(1+\omega^2)}$$

ω	Re	Im
0^+	-3	$-\infty$
$1/\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}$	0
$\sqrt{3}$	0	$1/2\sqrt{3}$



3. Criterio di Nyquist

$P=0$

$-\frac{1}{k} < -\frac{3}{2}$ $\left(0<k<\frac{2}{3}\right)$ $N=0$

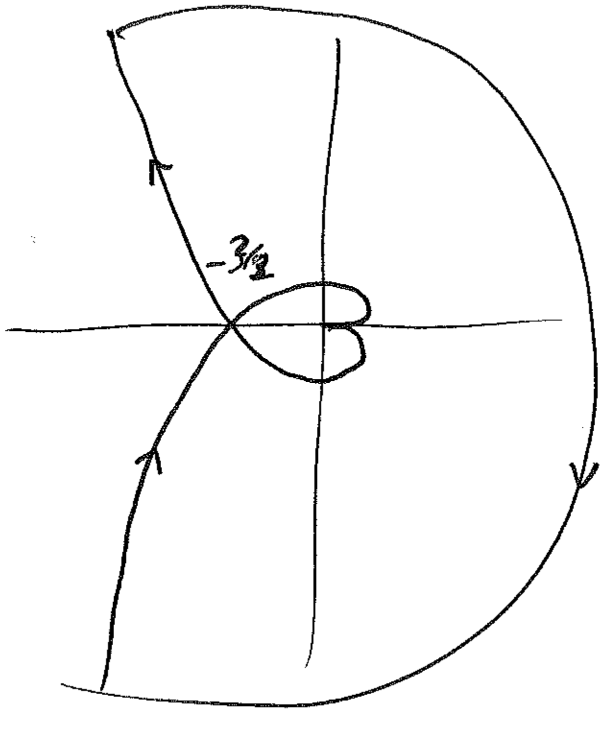
0 poli instabili in catena chiuso

$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{k} < 0$ $\left(k>\frac{2}{3}\right)$ $N=-2$

2 poli instabili in catena chiuso

$-\frac{1}{k} > 0$ $(k<0)$ $N=-1$

1 polo instabile in catena chiuso



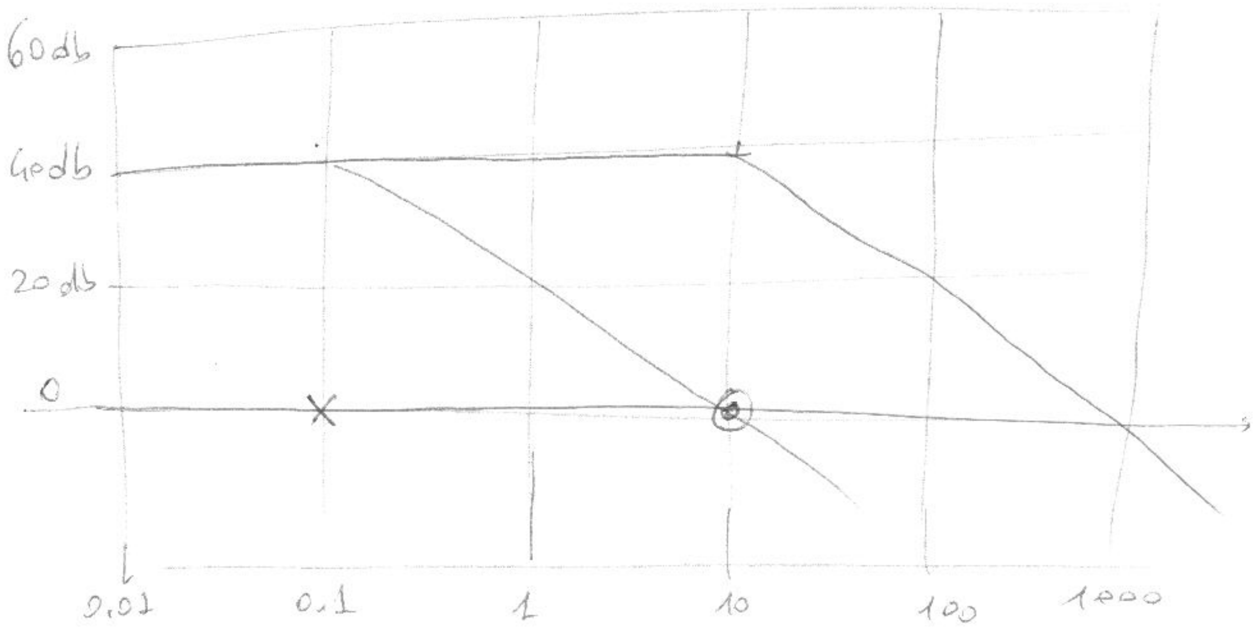
ES. 5

$$G(s) = \frac{3/10}{1+s/10}$$

$$h_w = 0 \qquad K_w = \frac{1}{0{,}01} - 1 = 99 \simeq 100$$

$$h_c = h_G - h_w = 0 - 0 = 0 \qquad K_c = \frac{K_w}{K_G} = \frac{100}{3/10} = \frac{1000}{3}$$

$$\hat{W}(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} G(s) = \frac{1000}{3} \frac{3/10}{1+s/10} = \frac{100}{1+s/10}$$



$$\bar{C}(s) = \frac{1+\frac{s}{10}}{1+\frac{s}{0.1}} = \frac{1+\frac{s}{10}}{1+s \cdot 10}$$

$$C(s) = \frac{1000}{3} \frac{1+s/10}{1+s \cdot 10}$$