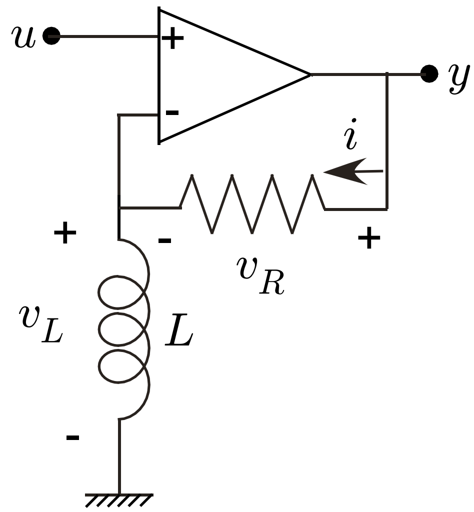
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - I Compitino di Fondamenti di Controlli Automatici del 26/3/2018

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non é ammessa la consultazione di libri o quaderni, ne' l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico.



Si tratta di in circuito con un amplificatore operazionale una resistenza e una induttanza.

1. Si supponga che l'induttanza e la resistenza siano ideali (resistenza R e induttanza L) e che l'amplificatore operazionale abbia impedenza di ingresso infinita e la sua tensione di uscita v_o sia $v_o = A(v_+ - v_-)$ con A constante positiva. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso (tensione) u e l'uscita (tensione) y.

2. Supponiamo ora che la resistenza non sia ideale e che $v_R = f(i_R)$ dove $f(x) = x^3$. Determinare le equazioni che legano le variabili $u(t), y(t), i(t), v_L(t)$.

3. Determinare l'evoluzione di equilibrio $u(t) = \bar{u}, y(t) = \bar{y}, i(t) = \bar{i}, v_L(t) = \bar{v}_L$.

4. Siano $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}, \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}, \tilde{\bar{i}}(t) = i(t) - \bar{i}, \tilde{v}_L(t) = v_L(t) - \bar{v}_L$. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $\tilde{u}(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$.

5. Si supponga infine che l'induttanza e la resistenza siano ideali (resistenza R e induttanza L) e che l'amplificatore operazionale invece abbia una relazione tra tensioni di ingresso e quella di uscita seguente

$$v_o = g(v_+ - v_-)$$

dove $g(x) = \arctan(x)$ cioe' l'arcotangente. Determinare le equazioni che legano le variabili $u(t), y(t), i(t), v_L(t)$.

6. Determinare l'evoluzione di equilibrio $u(t) = \bar{u}, y(t) = \bar{y}, i(t) = \bar{i}, v_L(t) = \bar{v}_L$.
7. Siano $\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}, \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}, \tilde{\bar{i}}(t) = i(t) - \bar{i}, \tilde{v}_L(t) = v_L(t) - \bar{v}_L$. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $\tilde{u}(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{(2)} + y = u^{(1)}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva.
2. Determinare la risposta libera supponendo che le condizioni iniziali siano $y^{(1)}(0^-) = 0$ e $y(0^-) = 2$.
3. Determinare la risposta forzata supponendo che l'ingresso e' $u(t) = \delta^{(-1)}(t)$.

Esercizio 3 (teorico). Descrivere il modello del motore elettrico in continua e spiegare i principi su cui si basa la sua derivazione.

ES. 1

1) Equazioni del circuito nelle variabili u, y, v_L e i

$$(*)\begin{cases} v_L = L i^{(1)} \\ y = v_L + R i \\ y = A(u - v_L) \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} V_L = L s I \\ Y = V_L + R I \\ Y = A(U - V_L) \end{cases} \begin{matrix} \\ \to Y = LsI + RI \to I = \frac{1}{Ls+R} Y \\ \to Y = AU - ALsI = AU - \frac{ALs}{Ls+R} Y \end{matrix}$$

Quindi

$$\left(1 + \frac{ALs}{Ls+R}\right) Y = AU \qquad Y = \frac{A}{1 + \frac{ALs}{Ls+R}} U = \frac{A(Ls+R)}{Ls+R+ALs} U$$

la funzione di trasferimento è

$$\frac{A(Ls+R)}{L(A+1)s+R}$$

2) In questo caso le equazioni diventano

$$\begin{cases} v_L = L i^{(1)} \\ y = v_L + f(i) \\ y = A(u - v_L) \end{cases}$$

3) Se v_L, y, u, i sono costanti le equazioni diventano

$$\begin{cases} \bar{v}_L = 0 \\ \bar{y} = f(\bar{i}) \\ \bar{y} = A\bar{u} \end{cases}$$

4) Sulle variabili $\tilde{v}_L, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{i}$ le equazioni diventano

$$\begin{cases} \cancel{\bar{v}_L} + \tilde{v}_L = L \tilde{i}^{(1)} \\ \bar{y} + \tilde{y} = \cancel{\bar{v}_L + \tilde{v}_L} + f(\bar{i} + \tilde{i}) \\ \bar{y} + \tilde{y} = A(\bar{u} + \tilde{u} - \cancel{\bar{v}_L} - \tilde{v}_L) \end{cases} \xrightarrow{\text{linearizzo}} \begin{cases} \tilde{v}_L = L \tilde{i}^{(1)} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} \simeq \cancel{f(\bar{i})} + f'(\bar{i})\tilde{i} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = \cancel{A\bar{u}} + A(\tilde{u} - \tilde{v}_L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}_L = L \tilde{i}^{(1)} \\ \tilde{y} = f'(\bar{i})\tilde{i} \\ \tilde{y} = A(\tilde{u} - \tilde{v}_L) \end{cases}$$

Queste equazioni sono identiche a (*) mettendo al posto di R la costante $f'(\bar{i}) = 3\bar{i}^2$

Si ottiene così la f. di t. $\dfrac{A(Ls + 3\bar{i}^2)}{L(A+1)s + 3\bar{i}^2}$

5) Le equazioni diventano

$$\begin{cases} v_L = L i^{(1)} \\ y = v_L + R i \\ y = g(u - v_L) \end{cases} \xrightarrow{\text{equilibrio}} \begin{cases} \bar{v}_L = 0 \\ \bar{y} = \bar{v}_L + R\bar{i} = R\bar{i} \\ \bar{y} = g(\bar{u} - \bar{v}_L) = g(\bar{u}) \end{cases}$$

nelle variabili $\tilde{v}_L, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{i}$ le equazioni diventano

$$\begin{cases} \cancel{\bar{v}_L} + \tilde{v}_L = L \tilde{i}^{(1)} \\ \bar{y} + \tilde{y} = \cancel{\bar{v}_L} + \tilde{v}_L + R\bar{i} + R\tilde{i} \\ \bar{y} + \tilde{y} = g(\bar{u} + \tilde{u} - \cancel{\bar{v}_L} - \tilde{v}_L) \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{v}_L = L \tilde{i}^{(1)} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = \tilde{v}_L + \cancel{R\bar{i}} + R\tilde{i} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = g(\bar{u} + \tilde{u} - \tilde{v}_L) \simeq \cancel{g(\bar{u})} + g'(\bar{u})(\tilde{u} - \tilde{v}_L) \end{cases}$$

Otteniamo le stesse equazioni (*) con $g'(\bar{u})$ al posto di A

Quindi la funzione di trasferimento è

$$\frac{g'(\bar{u})(Ls + R)}{L(g'(\bar{u}) + 1)s + R} \qquad \text{dove } g'(\bar{u}) =$$

Noto che poiché $g(x) = \arctan(x)$ allora

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e quindi la funzione di trasferimento

$$\frac{\frac{1}{1+\bar{u}^2}(Ls + R)}{L\left(\frac{1}{1+\bar{u}^2} + 1\right)s + R}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) $W(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ funzione di trasferimento

$$\frac{s}{s^2+1} = \frac{A}{s-j} + \frac{B}{s+j} \qquad A = W(s)(s-j)\Big|_{s=j} = \frac{s}{s+j}\Big|_{s=j} = \frac{j}{2j} = \frac{1}{2}$$

risposta impulsiva

$$B = W(s)(s+j)\Big|_{s=-j} = \frac{s}{s-j}\Big|_{s=-j} = \frac{-j}{-2j} = \frac{1}{2}$$

$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] =$

$$= A\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-j}\right] + B\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+j}\right] = Ae^{jt} + Be^{-jt} = \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt} = \cos(t)$$

$t \geq 0$

2) $y^{(2)} + y = 0$ risolto libera lo calcolo attraverso le trasformate di Laplace

$$0 = \mathcal{L}[y_\ell^{(2)} + y_\ell] = \mathcal{L}[y_\ell^{(2)}] + \mathcal{L}[y_\ell] = s^2 Y_\ell(s) - sy(0^-) - y^{(1)}(0^-) + Y_\ell(s) = 0$$

$$(s^2+1)Y_\ell(s) = sy(0^-) + y^{(1)}(0^-) \qquad Y_\ell(s) = \frac{sy(0^-) + y^{(1)}(0^-)}{s^2+1}$$

siccome $y^{(1)}(0^-) = 0$ e $y(0^-) = 2$ si ottiene

$$Y_\ell(s) = \frac{2}{s^2+1} = \frac{A}{s-j} + \frac{B}{s+j}$$

$$A = Y(s)(s-j)\Big|_{s=j} = \frac{2}{s+j}\Big|_{s=j} = \frac{2}{2j} = \frac{1}{j} = -j$$

$$B = Y(s)(s+j)\Big|_{s=-j} = \frac{2}{s-j}\Big|_{s=-j} = \frac{2}{-2j} = -\frac{1}{j} = j$$

$$y_\ell(t) = Ae^{jt} + Be^{-jt}$$

$$= -je^{jt} + je^{-jt} = j[\cancel{-\cos(t)} - j\sin(t) + \cancel{\cos(t)} - j\sin(t)]$$

$$= j(-2j)\sin(t) = 2\sin(t)$$ $t \geq 0$

3) $u(t) = \delta^{(-1)}(t) \qquad U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2+1}$$

Siccome nel punto 2 abbiamo visto che $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2+1}\right] = 2\sin(t)$ possiamo concludere che

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin(t)$$ $t \geq 0$