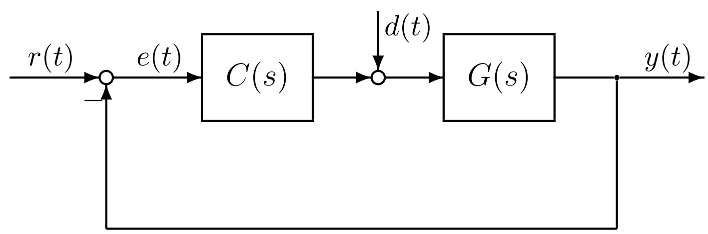
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - II Compitino di Fondamenti di Controlli Automatici del 23/4/2018

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non é ammessa la consultazione di libri o quaderni, ne' l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Tempo a disposizione: 90 minuti

Esercizio 1. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

dove $a, b > 0$.

1. Determinare a, b in maniera tale che la risposta impulsiva associata a $G(s)$ sia $Ae^{-t}\cos(2t + \phi)$ dove A, ϕ sono opportuni numeri reali.

2. Sia $T_{ry}(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$. Determinare i valori di K, a, b che rendono BIBO stabile $T_{ry}(s)$.

3. Determinare la funzione sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.

4. Supponiamo che $r(t) = 10$ e che $d(t) = t$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(s+4)^2}{s(s+1)(s+a)}$$

1. Si determini a sapendo che $s = -1/2$ e' punto doppio del luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K \geq 0$.

2. Si supponga che a coincida col valore calcolato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K \geq 0$. Si determinino eventuali asintoti, punti doppi e intersezioni con l'asse immaginario.

3. Si trovino i valori di $K \geq 0$ per cui i modi della funzione di trasferimento in catena chiusa sono tutti non oscillatori.

4. Determinare il valore di K tale che tra i modi della funzione di trasferimento in catena chiusa vi sia il modo $e^{-\frac{1}{2}t}$. Determinare tutti i modi del sistema in corrispondenza a questo valore di K.

Esercizio 3 (teorico). Dare la definizione della funzione sensibilita' di una funzione di trasferimento rispetto alle variazioni di un parametro e spiegarne il significato e lutilizzo nella valutazione delle proprieta di un sistema. Spiegare infine l'effetto della retroazione sulla funzione sensibilita'.

ES. 1

1) la risposta è del tipo $Ae^{-t}\cos(2t+\phi)$ se e solo se $-1 \pm 2j$ sono poli di $G(s)$ e quindi sono zeri del suo denominatore s^2+as+b. Quindi

$$(s+1-2j)(s+1+2j) = s^2+as+b$$

$$= s^2+2s+5$$

Quindi $a=2$ e $b=5$

2) $$T_{ry}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{\frac{k}{s}\frac{1}{s^2+as+b}}{1+\frac{k}{s}\frac{1}{s^2+as+b}} = \frac{k}{s(s^2+as+b)+k} = \frac{k}{s^3+as^2+bs+k}$$

Tabella di Routh

3	1	b
2	a	k
1	$\frac{ab-k}{a}$	
0	k	

Stabilità per $0<k<ab$

3) $$S_a^{T_{ry}} = \frac{a}{T_{ry}}\frac{\partial T_{ry}}{\partial a} = a\,\frac{\cancel{s^3+as^2+bs+k}}{\cancel{k}}\,\frac{-\cancel{k}s^2}{[s^3+as^2+bs+k]^{\cancel{2}}} = \frac{-as^2}{s^3+as^2+bs+k}$$

4) $$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{\frac{1}{s^2+as+b}}{1+\frac{k}{s}\frac{1}{s^2+as+b}} = \frac{s}{s(s^2+as+b)+k}$$

Se $d(t)=0$ e $r(t)=10$ allora

$$y(t) \simeq T_{ry}(0)\cdot 10 = \frac{k}{k}10 = 10$$

Se $r(t)=0$ e $d(t)=t$ allora $D(s)=\frac{1}{s^2}$

$$Y(s) = T_{dy}(s)D(s) = \frac{s}{s(s^2+as+b)+k}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{[s(s^2+as+b)+k]s}$$

Svolgendo i fratti semplici

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \sum_{ij}\frac{c_{ij}}{(s-p_i)^j}$$ dove p_i sono radici di $s(s^2+as+b)+k$

$$y(t) = A + \sum_{ij}\frac{c_{ij}}{(j-1)!}t^{j-1}e^{p_it} \simeq A$$ perché i rimanenti termini convergono a zero per la stabilità del sistema

$$y(t) \simeq A \quad \text{dove } A = Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{s(s^2+as+b)+k}\Big|_{s=0} = \frac{1}{k}$$ formula dei residui

$\boxed{ES.2}$

1) $\begin{cases} s(s+1)(s+a)+k(s+4)^2=0 \\ 3s^2+2(a+1)s+a+2k(s+4)=0 \end{cases} \xrightarrow{s=-\frac{1}{2}} \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)+k\left(\frac{7}{2}\right)^2=0 \\ \frac{3}{4}+2(a+1)\left(-\frac{1}{2}\right)+a+2k\frac{7}{2}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}+k\frac{49}{4}=0 & a=\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4}\cancel{-a}-1\cancel{+a}+7k=0 & \rightarrow k=\frac{1}{28} \end{cases}$

2) Altri punti doppi

$\begin{cases} s(s+1)(s+\frac{9}{4})+k(s+4)^2=0 \\ 3s^2+\frac{13}{2}s+\frac{9}{4}+2k(s+4)=0 \end{cases} \qquad k=-\frac{3s^2+13/2\,s+9/4}{2(s+4)}$

$s(s+1)(s+\frac{9}{4})-\frac{3s^2+13/2\,s+9/4}{2\cancel{(s+4)}}(s+4)^{\cancel{2}}=0 \Rightarrow s^3+12s^2+\frac{95}{4}s+9=0$

Quest'ultimo polinomio è divisibile per $s+\frac{1}{2}$

Dalla divisione ricavo il fattore $s^2+\frac{23}{2}s+18$ che ha

radici reali $s_1=-9,631$ e $s_2=-1,869$

Quindi i punti doppi sono

$s_1=-1,869 \qquad k_1=-0,13 \quad \in$ luogo negativo

$s_2=-\frac{1}{2} \qquad k_2=\frac{1}{28}=0,0357$

$s_3=-9,631 \quad k_3=19,4$

$s_4=-4 \qquad k_4=+\infty$

Intersezione asse immaginario

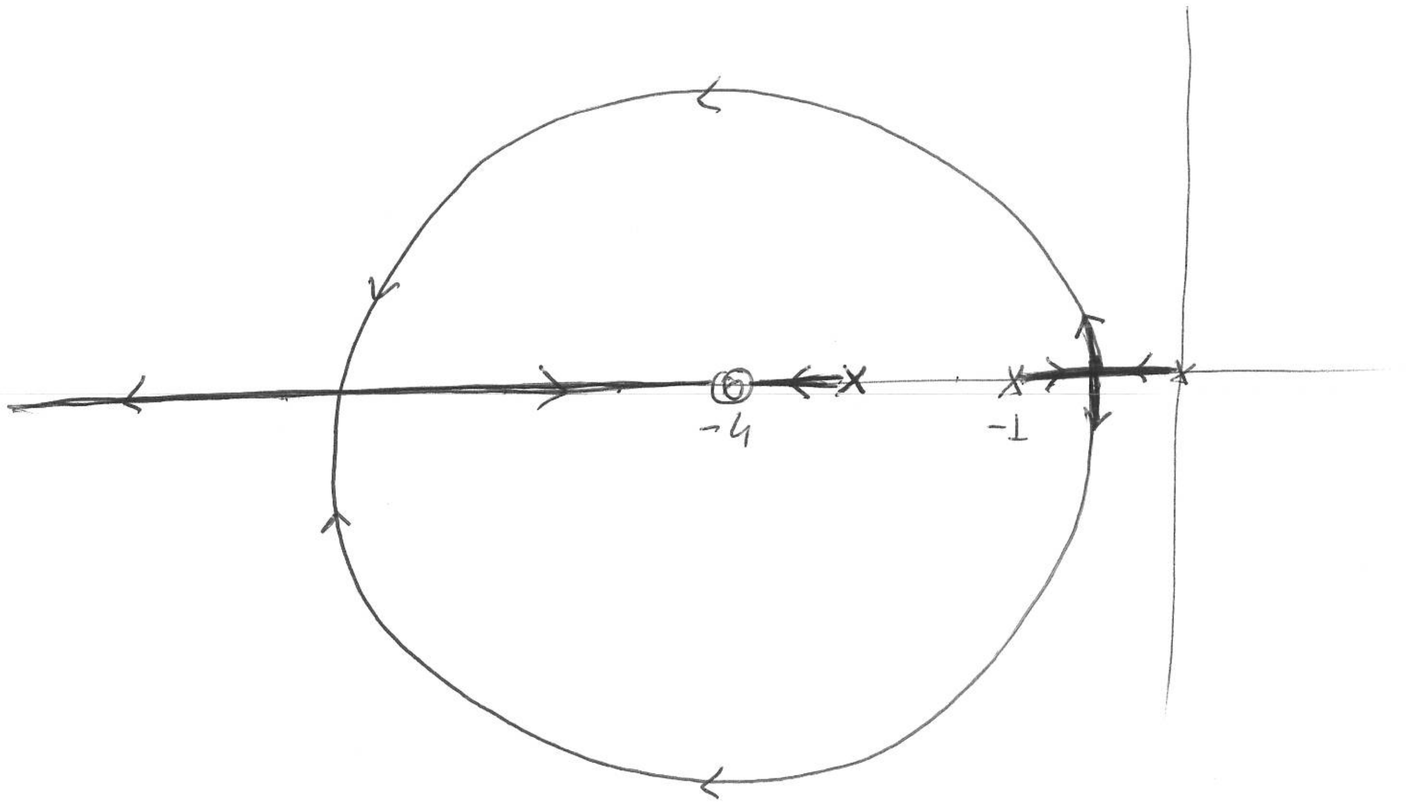
$s^3+\frac{13}{4}s^2+\frac{9}{4}s+k(s^2+8s+16)=0$

Tabella di Routh

3	1	$8k+\frac{9}{4}$
2	$k+\frac{13}{4}$	$16k$
1	$\frac{8k^2+49/4\,k+117/16}{k+13/4}$	
0	$16k$	

Noto che tutti gli elementi della prima colonna della tabella di Routh sono >0 per $\forall k>0$

e quindi il luogo non attraversa l'asse immaginario perché il sistema è stabile per $\forall k>0$



2) Per $0 \le K \le \frac{1}{28} = K_2$ e per $K \geq K_3 = 19,4$
le tre radici del luogo sono tutte reali
e quindi i modi associati sono tutti non oscillatori

3) Perché $e^{-\frac{1}{2}t}$ sia uno dei 3 modi, deve essere che $-\frac{1}{2}$ appartiene al luogo. Questo avviene in corrispondenza del punto doppio e cioè per $K = \frac{1}{28}$. Il terzo modo si ottiene dividendo il polinomio per $\left(s+\frac{1}{2}\right)^2$

$$s^3 + \frac{13}{4}s^2 + \frac{9}{4}s + \frac{1}{28}\left(s^2+8s+16\right) = s^3 + \frac{23}{7}s^2 + \frac{71}{28}s + \frac{4}{7}$$

$$\begin{array}{l|l}
s^3 + \frac{23}{7}s^2 + \frac{71}{28}s + \frac{4}{7} & s^2+s+\frac{1}{4} \\
\hline
s^3 + s^2 + \frac{1}{4}s & s + \frac{16}{7} \\
\hline
\frac{16}{7}s^2 + \cancel{\frac{64}{28}}\frac{16}{7}s + \frac{4}{7} & \\
\frac{16}{7}s^2 + \frac{16}{7}s + \frac{4}{7} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

I modi sono

$e^{-\frac{1}{2}t}$

$te^{-\frac{1}{2}t}$

$e^{-\frac{16}{7}t}$