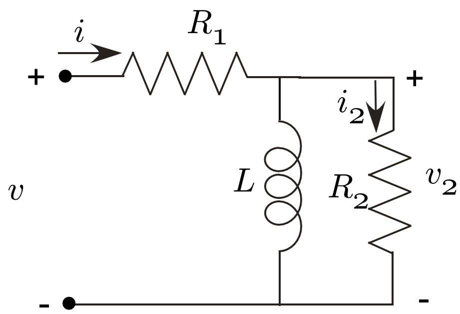
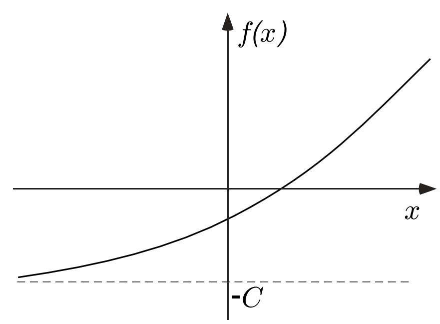
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 22/6/2017

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Per l'appello : Esercizio 1, Esercizio 2, Esercizio 3, Esercizio 4 senza punto 4 ed Esercizio 5.
Per terzo compitino : Esercizi 4, 5, 6.
Per il primo appello 3 ore. Per il terzo compitino 1 ora e 20 minuti.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico





1. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $i(t)$ (corrente) e l'uscita $v(t)$ (tensione). Determinare la risposta impulsiva.

Supponiamo ora che la resistenza R_2 sia sostituita con un componente non lineare tale che lega la tensione e corrente attraverso la relazione

$$v_2 = f(i_2)$$

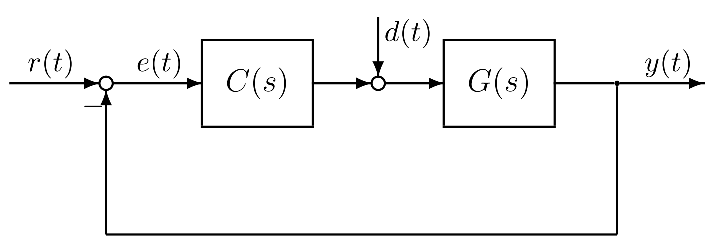
dove $f(x) = e^x - C$ con $C > 0$ (vedi grafico a destra dello schema).

2. Trovare le equazioni che legano le variabili $v(t), i(t), i_2(t)$.

3. Determinare l'evoluzione di equilibrio $v(t) = \bar{v}$ in corrispondenza all'ingresso $i(t) = \bar{i}$.

4. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}$ e l'uscita $\tilde{v}(t) := v(t) - \bar{v}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

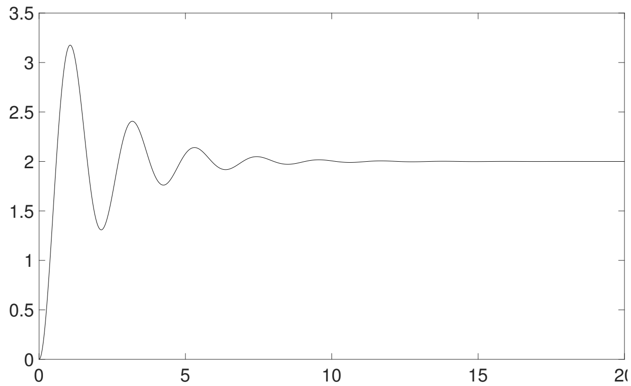


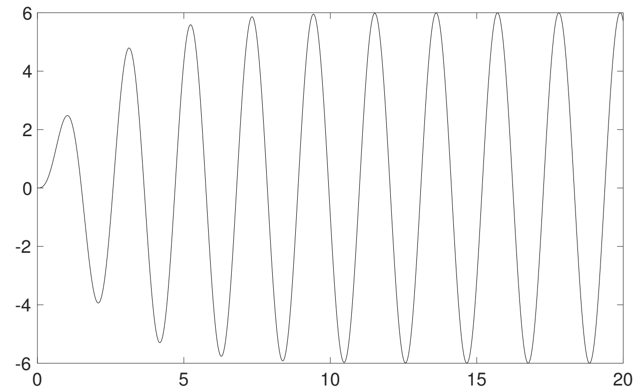
Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{b}{s^2 + s + a}$$

1. Determinare i valori di K e a, b che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.

2. Determinare $a, b \geq 0$ sapendo che con $K = 0$, se $d(t) = 1$ (gradino) si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura 1 e mentre se $d(t) = \sin(3t)$ e si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura 2.





3. Supponiamo ora che $a = 9, b = 1$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ sapendo che $r(t) = 1$ (gradino) e $d(t) = \sin(3t)$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s}{(s+10)(s-1)^2}$$

1. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e punti doppi .

2. Determinare i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa ha modi oscillatori puramente oscillatori. Determinate tutti i modo in corrispondenza a tale valore di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K, \qquad G(s) = \frac{(s-1)^2}{s(s+1)^2}.$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K.

4. Determinare il margine di fase al variare di $K > 0$. Supponiamo di inserire nella catena un ritardo. Determinare per quale valore del ritardo in sistema retroazionato rimane stabile.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove $G(s) = \frac{3}{s+10}$. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta alla rampa circa uguale a $0,01$;

2. margine di fase circa $m_\phi \simeq 90^0$;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 10$.

Esercizio 6 (Teorico) Spiegare i principi su cui si basa la sintesi di Bode, cioe' le specifiche che si intende soddisfare, come queste siano tradotte in specifiche in frequenza e come venga infine scelto il controllore.

Es. 1

1. $\begin{cases} v = R_1 i + R_2 i_2 \\ R_2 i_2 = L(i - i_2)^{(1)} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}\text{-trasformata}} \begin{cases} V = R_1 I + R_2 I_2 \\ R_2 I_2 = sL(I - I_2) \end{cases}$

$\hookrightarrow I_2 = \dfrac{Ls}{Ls + R_2} I$

$$V = R_1 I + \frac{R_2 L s}{Ls + R_2} I = \left(R_1 + \frac{R_2 L s}{Ls + R_2} \right) I$$

f.d.t. $\boxed{W(s) = \dfrac{R_1(Ls + R_2) + R_2 L s}{Ls + R_2} = \dfrac{L(R_1 + R_2)s + R_1 R_2}{Ls + R_2}}$

Antitrasformata

$$W(\infty) = R_1 + R_2$$

$$W(s) - W(\infty) = \frac{\cancel{LR_1 s} + \cancel{LR_2 s} + \cancel{R_1 R_2} - \cancel{R_1 L s} - \cancel{R_2 L s} - \cancel{R_1 R_2} - R_2^2}{Ls + R_2} = \frac{-R_2^2}{Ls + R_2}$$

$$W(s) = R_1 + R_2 + \frac{-R_2^2/L}{s + R_2/L}$$

Antitrasformata

$$\boxed{w(t) = (R_1 + R_2)\delta(t) - \frac{R_2^2}{L} e^{-\frac{R_2}{L}t}}$$

2. $\begin{cases} v = R_1 i + f(i_2) \\ f(i_2) = L(i - i_2)^{(1)} \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(i_2) = \bar{v} - R_1 \bar{i} \\ f(i_2) = L\bar{i}^{(1)} - L i_2^{(1)} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $i_2 = \bar{i}_2$ costante

perché entrambe $\bar{i}, i_2$ sono costanti

$0 = f(\bar{i}_2) = e^{\bar{i}_2} - c \Rightarrow e^{\bar{i}_2} = c \Rightarrow \boxed{\bar{i}_2 = \ln c \quad \bar{v} = R_1 \bar{i}}$

4. $\tilde{v} = v - \bar{v}$

$\tilde{i} = i - \bar{i}$

$\tilde{i}_2 = i_2 - \bar{i}_2$

$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v} + \tilde{v} = \cancel{R_1 \bar{i}} + R_1 \tilde{i} + f(\bar{i}_2 + \tilde{i}_2) \\ f(\bar{i}_2 + \tilde{i}_2) = L(\tilde{i}^{(1)} - \tilde{i}_2^{(1)}) \end{cases}$

$\to f^{(1)}(x) = e^x$

Espansione di Taylor di $f(\bar{i}_2 + \tilde{i}_2) \simeq f(\bar{i}_2) + f^{(1)}(\bar{i}_2)\tilde{i}_2$

$$= 0 + c\tilde{i}_2 = c\tilde{i}_2$$

$$\begin{cases} \tilde{v} = R_1 \tilde{i} + \cancel{f(\bar{i}_2)} + e^{\bar{i}_2} \tilde{i}_2 \\ \cancel{f(\bar{i}_2)} + e^{\bar{i}_2} \tilde{i}_2 = L \tilde{i}^{(1)} - L \tilde{i}_2^{(1)} \end{cases} \qquad \begin{aligned} f(\bar{i}_2) &= 0 \\ e^{\bar{i}_2} &= C \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \tilde{v} = R_1 \tilde{i} + C \tilde{i}_2 \\ C \tilde{i}_2 = L \tilde{i}^{(1)} - L \tilde{i}_2^{(1)} \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \ \mathcal{L} \text{ trasformata} \qquad \hat{\tilde{V}} = \mathcal{L}(\tilde{v}) \quad \hat{\tilde{I}} = \mathcal{L}(\tilde{i}) \quad \hat{\tilde{I}}_2 = \mathcal{L}(\tilde{i}_2)$$

$$\begin{cases} \hat{\tilde{V}} = R_1 \hat{\tilde{I}} + C \hat{\tilde{I}}_2 \\ C \hat{\tilde{I}}_2 = sL \hat{\tilde{I}} - sL \hat{\tilde{I}}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{\tilde{I}}_2 = \frac{sL}{sL + C} \hat{\tilde{I}}$$

$$\hat{\tilde{V}} = R_1 \hat{\tilde{I}} + C \frac{sL}{sL + C} \hat{\tilde{I}} = \underbrace{\left(R_1 + \frac{sLC}{sL + C} \right)}_{\text{f di t.}} \hat{\tilde{I}}$$

$\boxed{ES. 2}$

1. $T_{zy}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{kb}{s(s^2+s+e)+kb}$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & e \\ 2 & 1 & kb \\ 1 & e-kb & \\ 0 & kb & \end{array}$$

$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{sb}{s(s^2+s+e)+kb}$

2. Dalle figure si nota che

$\begin{cases} G(0) = 2 \\ |G(3j)| = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} b/a = 2 \\ \left|\frac{b}{-9+3j+a}\right|^2 = 36 \end{cases}$ $\begin{cases} b = 2a \\ \frac{4a^2}{(a-9)^2+9} = 36^{\,9} \end{cases}$

$a^2 = 9(a-9)^2 + 81$ equazione di 2° grado $a_{12} \begin{cases} 9 \\ 45/4 \end{cases}$ $b_{12} = \begin{cases} 18 \\ \frac{45}{2} \end{cases}$

3) $a = 9$ $b = 1$

$T_{zy}(s) = \frac{k}{s(s^2+s+9)+k}$ $T_{dy}(s) = \frac{s}{s(s^2+s+9)+k}$

$T_{zy}(1) = 1$

$T_{dy}(3j) = \frac{3j}{3j(\cancel{-9}+3j+\cancel{9})+k} = \frac{3j}{k-9}$

$|T_{dy}(3j)| = \frac{3}{9-k}$

$\angle T_{dy}(3j) = -\frac{\pi}{2}$

$y(t) \simeq 1 + \frac{3}{9-k}\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{ES. 3}$

$$(s+10)(s-1)^2+ks=0$$

Punti doppi

$$\begin{cases}(s+10)(s-1)^2+ks=0\\ (s-1)^2+2(s+10)(s-1)+k=0\end{cases}\qquad \begin{aligned}k&=-(s-1)(s-1+2s+20)\\&=-(s-1)(3s+19)\end{aligned}$$

$$(s+10)(s-1)^{\cancel{2}}-\cancel{(s-1)}(3s+19)s=0$$ equazione di 3° grado con una soluzione $s_1=1$

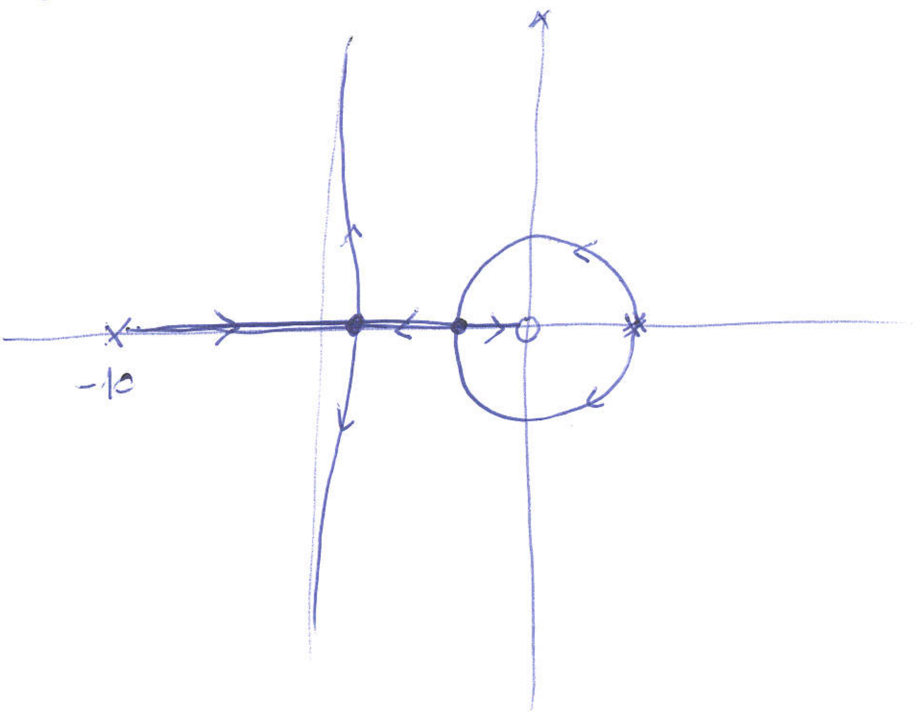
$$(s+10)(s-1)-(3s+19)s=0$$

$$-2s^2-10s-10=0 \qquad s_{2,3}=-1{,}4 \text{ e } -3{,}6$$

Asintoti

$$\sigma_a=\frac{-10+1+1}{2}=-4$$

$$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$$



Intersezione asse immaginario

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k-19\\ 2 & 8 & 10\\ 1 & k-\frac{81}{4} & \\ 0 & 10 & \end{array}$$

$$k=\frac{81}{4}\ \rightarrow\ 8s^2+10=0$$

$$s_{12}=\pm j\sqrt{\frac{10}{8}}$$

2. $k=\frac{81}{4}$

$$\begin{array}{l|l} s^3+8s^2+\frac{5}{4}s+10 & s^2+5/4\\ \hline s^3\qquad\quad +\frac{5}{4}s & s+8\\ \hline 8s^2\qquad\quad +10 & \\ 8s^2\qquad\quad +10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

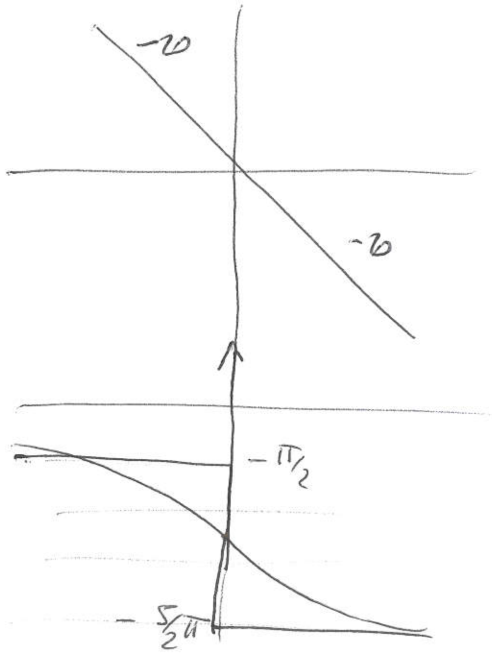
$\sin\left(\sqrt{\frac{5}{4}}\,t\right)$

e^{-8t}

Es. 4

Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{1-\omega^2-2j\omega}{j\omega(1-\omega^2+2j\omega)} = \frac{(1-\omega^2-2j\omega)(1-\omega^2-2j\omega)}{j\omega((1-\omega^2)^2+4\omega^2)}$$



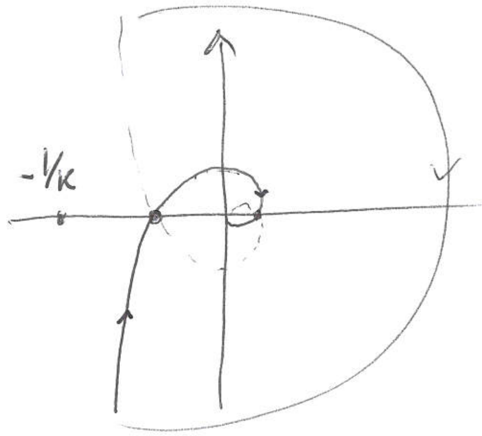
$$= \frac{(1-\omega^2)^2-4\omega^2-4j\omega(1-\omega^2)}{j\omega((1-\omega^2)^2+4\omega^2)}$$

$$Re = \frac{-4(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$Im = -\frac{(1-\omega^2)^2-4\omega^2}{\omega((1-\omega^2)^2+4\omega^2)}$$

$\omega = 0^+$ $\quad Re = -4$

$\quad\quad Im = -\infty$



$\omega = 1$ $\quad Re = 0$

$\quad\quad Im = -1$

$Im = 0 \iff (1-\omega^2)^2-4\omega^2 = 0$

$\omega^4-6\omega^2+1=0 \quad \omega^2 = 3\pm\sqrt{9-1} \quad\quad \omega_{12}^2 = 5,8$ e 0.17

$\omega_{12} = 2.41$ e $0,41$

$Re_1 = 0.41 \quad Re_2 = -2.41$

$-\frac{1}{k} < -2,41$	$N=0$	$Z=0$	$0<k<0,41$
$-2.41 < -\frac{1}{k} < 0$	$N=-2$	$Z=2$	$k>0,41$
$0 < -\frac{1}{k} < 0.41$	$N=-3$	$Z=3$	$k<-2,41$
$-\frac{1}{k} > 0.41$	$N=-1$	$Z=1$	$-2,41<k<0$

$P=0$

ω	Re	Im
0	-4	$-\infty$
0,414	-2,41	0
1	0	-1
2,41	0.414	0
$+\infty$	0	0

4. Determino la pulsazione di attraversamento

$$|k\,G(j\omega_A)| = 1$$

$$k\left|\frac{1-\omega_A^2-2j\omega_A}{j\omega_A(1-\omega_A^2+2j\omega_A)}\right| = k\,\frac{\cancel{\sqrt{(1-\omega_A^2)^2+4\omega_A^2}}}{\omega_A\cancel{\sqrt{(1-\omega_A^2)^2+4\omega_A^2}}} = \frac{k}{\omega_A}$$

$$\frac{k}{\omega_A} = 1 \rightarrow \boxed{\omega_A = k}$$

$$m_\varphi = \pi + \angle k\,G(j\omega_A) = \pi + 2\angle(1-j\omega_A) - \angle j\omega_A - 2\angle(1+j\omega_A)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{artg}\,\omega_A = \frac{\pi}{2} - 4\,\mathrm{artg}\,k$$

Il ritardo massimo ammissibile è

$$T < \frac{m_\varphi}{\omega_A} = \frac{\pi/2 - 4\,\mathrm{artg}\,k}{k}$$

$\boxed{ES.5}$

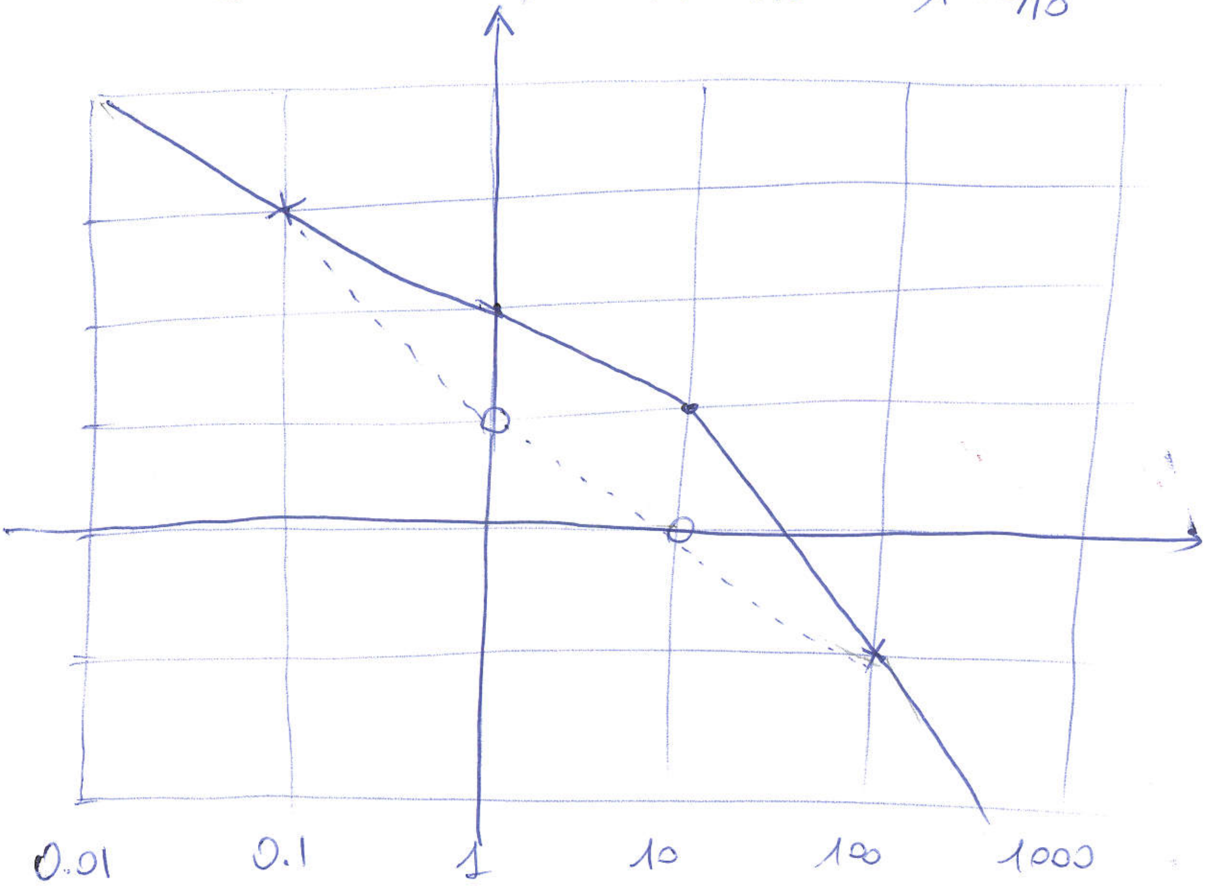
$C(s) = \dfrac{k_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s)$ $\qquad G(s) = \dfrac{3/10}{1 + s/10}$ $\qquad h_G = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k_G = \dfrac{3}{10}$

$h_c = h - h_G = 1 - 0 = 1$

$k_c = \dfrac{100}{k_G} = \dfrac{1000}{3}$

$\hat{W}(s) = \dfrac{k_c}{s^{h_c}} G(s) = \dfrac{\cancel{1000}^{100}}{\cancel{3}s} \dfrac{\cancel{3}/10}{1 + s/10} = \dfrac{100}{1 + s/10}$



$\bar{C}(s) = \dfrac{1 + s}{1 + 10s} \dfrac{1 + s/10}{1 + s/100}$