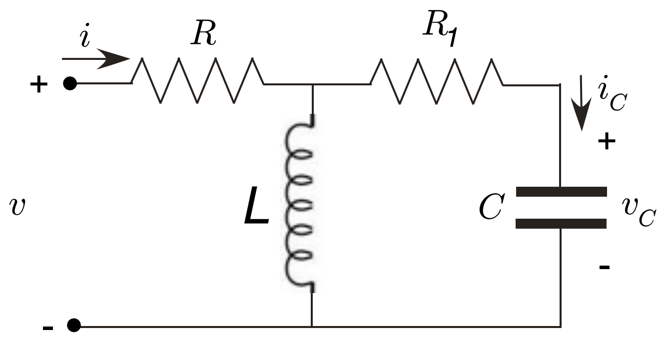
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 1/7/2019

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ______________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico



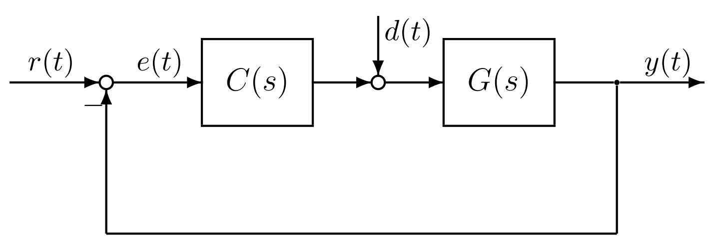
Supponiamo che la resistenza R sia non lineare e che il legame tra la tensione e corrente rispetti la relazione

$$v_R = f(i_R)$$

dove $f(x) = R_1(x + x^3)$ dove R_1 e' una costante maggiore di zero.

1. Trovare le equazioni che legano le variabili $i(t), v(t), i_C(t), v_C(t)$.
2. Determinare le evoluzioni di equilibrio $i(t) = \bar{i}, v(t) = \bar{v}, i_C(t) = \bar{i}_C, v_C(t) = \bar{v}_C$.
3. Siano ora $\tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}, \tilde{v}(t) := v(t) - \bar{v}, \tilde{i}_C(t) := i_C(t) - \bar{i}_C, \tilde{v}_C(t) := v_C(t) - \bar{v}_C$. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{i}(t) := i(t)$ e l'uscita $\tilde{v}(t) := v(t)$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+a}{s^2+s+1}$$

con $a > 0$.

1. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiuso al variare di K e a. Determinare la funzione sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.
2. Determinare a sapendo che se $K = 0$ e $d(t) = \cos(t)$, si ottiene che l'andamento a regime di $y(t)$ e' $3\cos(t + \phi)$, dove ϕ e' una costante opportuna.
3. Supponiamo ora che $a = 1$ e che $r(t) = \cos(t)$ e che $d(t) = t$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s+6}{(s+3)^2(s-2)}$$

1. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario).

2. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale la risposta impulsiva in catena chiusa contiene tutti modi non oscillatori.

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale la risposta impulsiva in catena chiusa contiene il modo costante 1. Determinare tutti i modi corrispondenti a tale valore di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s^2+1}{s(s-1)} \,.$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = 25\frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini i compensatori $C_1(s)$ e $C_2(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. per entrambi errore a regime in risposta alla rampa di circa $\simeq 0.1$;

2. per entrambi pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 1000$;

3. per $C_1(s)$ margine di fase $m_\varphi \simeq 45^0$ e per $C_2(s)$ margine di fase $m_\varphi \simeq 90^0$.

Esercizio 6 (Teorico). Si spieghi la definizione della funzione sensibilita' e a che cosa serve.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) $\begin{cases} i_c = C v_c^{(1)} \\ v = f(i) + L(i - i_c)^{(1)} \\ v = f(i) + R_1 i_c + v_c \end{cases}$

2) $i(t) = \bar{i}$, $v(t) = \bar{v}$, $i_c(t) = \bar{i}_c$, $v_c(t) = \bar{v}_c$

$\begin{cases} \bar{i}_c = 0 \\ \bar{v} = f(\bar{i}) \\ \bar{v} = f(\bar{i}) + R\bar{i}_c + \bar{v}_c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{i}_c = 0 \\ \bar{v}_c = 0 \\ \bar{v} = f(\bar{i}) = R_1(\bar{i} + \bar{i}^3) \end{cases}$

3) $f(\bar{i} + \tilde{i}) \simeq f(\bar{i}) + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} = R_1(\bar{i} + \bar{i}^3) + R_1(1 + 3\bar{i}^2)\tilde{i}$

$\begin{cases} \bar{i}_c + \tilde{i}_c = C(\bar{v}_c + \tilde{v}_c)^{(1)} \\ \bar{v} + \tilde{v} \simeq f(\bar{i}) + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + L(\bar{i} + \tilde{i} - \bar{i}_c - \tilde{i}_c)^{(1)} \\ \bar{v} + \tilde{v} \simeq f(\bar{i}) + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + R_1(\bar{i}_c + \tilde{i}_c) + \bar{v}_c + \tilde{v}_c \end{cases}$

$\begin{cases} \tilde{i}_c = C\tilde{v}_c^{(1)} \\ \tilde{v} \simeq f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + L(\tilde{i} - \tilde{i}_c)^{(1)} \\ \tilde{v} \simeq f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + R_1\tilde{i}_c + \tilde{v}_c \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} I_c = sCV_c \\ V = f^{(1)}(\bar{i})I + Ls(I - I_c) \\ V = f^{(1)}(\bar{i})I + R_1 I_c + V_c \end{cases}$

$\begin{cases} I_c = sCV_c \\ R_1 I_c + V_c = Ls(I - I_c) \\ V = f^{(1)}(\bar{i})I + R_1 I_c + V_c \end{cases}$

$\begin{cases} (1 + sR_1C + s^2LC)V_c = LsI \\ V = f^{(1)}(\bar{i})I + (1 + sCR_1)V_c \end{cases} \rightarrow V_c = \dfrac{Ls}{1 + sR_1C + s^2LC} I$

$V = f^{(1)}(\bar{i})I + \dfrac{(1 + sCR_1)Ls}{1 + sR_1C + s^2LC} I$

$(1 + sR_1C + s^2LC)V = \left(f^{(1)}(\bar{i})(1 + sR_1C + s^2LC) + Ls + s^2R_1LC\right)I$

$V =$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) $T_{zy}(s) = \dfrac{k(s+a)}{s(s^2+s+1)+k(s+a)}$

$T_{dy}(s) = \dfrac{s(s+a)}{s(s^2+s+1)+k(s+a)}$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & k+1 \\ 2 & 1 & ka \\ 1 & k+1-ka & \\ 0 & ka & \end{array}$$

Stabilità

$\begin{cases} ka > 0 \\ (a-1)k < 1 \end{cases}$ $\begin{cases} k>0 \\ (a-1)k<1 \end{cases}$

Se $a<1 \Rightarrow k>0$

Se $a=1 \Rightarrow k>0$

Se $a>1 \Rightarrow 0<k<\frac{1}{a-1}$

$$S_a^{T_{zy}} = \frac{a}{T_{zy}}\frac{\partial T_{zy}}{\partial a} = a\,\frac{s(s^2+s+1)+k(s+a)}{k(s+a)}\;\frac{k[s(s^2+s+1)+k(s+a)]-k(s+a)k}{[s(s^2+s+1)+k(s+a)]^2}$$

$$= \frac{a}{\cancel{k}(s+a)}\;\frac{ks(s^2+s+1)+\cancel{k^2(s+a)}-\cancel{k^2(s+a)}}{s(s^2+s+1)+k(s+a)} = \frac{as(s^2+s+1)}{(s+a)[s(s^2+s+1)+k(s+a)]}$$

2) Se $k=0$ allora $T_{dy}(s) = \dfrac{s+a}{s^2+s+1}$

$y(t) \simeq |T_{dy}(j)|\cos(t+\angle T_{dy}(j))$

Quindi $|T_{dy}(j)| = 3 \Rightarrow \left|\dfrac{j+a}{-1+j+1}\right| = 3 \Rightarrow |j+a| = 3 \Rightarrow a^2+1 = 9$

$a = \sqrt{8}$

3) $a=1 \Rightarrow T_{zy}(s) = \dfrac{k(s+1)}{s(s^2+s+1)+k(s+1)}$ $\quad T_{dy}(s) = \dfrac{s(s+1)}{s(s^2+s+1)+k(s+1)}$

a) $z(t) = \cos(t)$ $\quad d(t) = 0$

$y(t) \simeq |T_{zy}(j)|\cos(t+\angle T_{zy}(j))$

$T_{zy}(j) = \dfrac{k(1+j)}{j(\cancel{-1}+j\,\cancel{+1})+k(1+j)} = \dfrac{k(1+j)}{(k-1)+kj}$ $\quad |T_{zy}(j)| = k\sqrt{\dfrac{2}{(k-1)^2+k^2}}$

$\angle T_{zy}(j) = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{K}{K-1}\right)$

b) $z(t)=0$ $\quad d(t) = t$

$Y(s) = T_{dy}(s)\dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s+1}{s(s^2+s+1)+k(s+1)}\dfrac{1}{s} = \dfrac{A}{s} + \sum \dfrac{c_{ij}}{(s-p_i)^j}$

$y(t) \simeq A + (\text{termini} \to 0)$ perché p_i sono stabili essendo radici di $s(s^2+s+1)+k(s+1)$

$A = Y(s)s|_{s=0} = \dfrac{1}{k}$

Quindi $y(t) \simeq \dfrac{1}{k} + k\sqrt{\dfrac{2}{(k-1)^2+k^2}}\cos\left(t+\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{k-1}{k}\right)\right)$

ES. 3

1) punti doppi

$$\begin{cases}(s+3)^2(s-2)+k(s+6)=0\\ 2(s+3)(s-2)+(s+3)^2+k=0 \rightarrow k=-(s+3)(2s-4+s+3)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -(s+3)(3s-1)\end{cases}$$

$$(s+3)^2(s-2)-(s+3)(3s-1)(s+6)=0$$

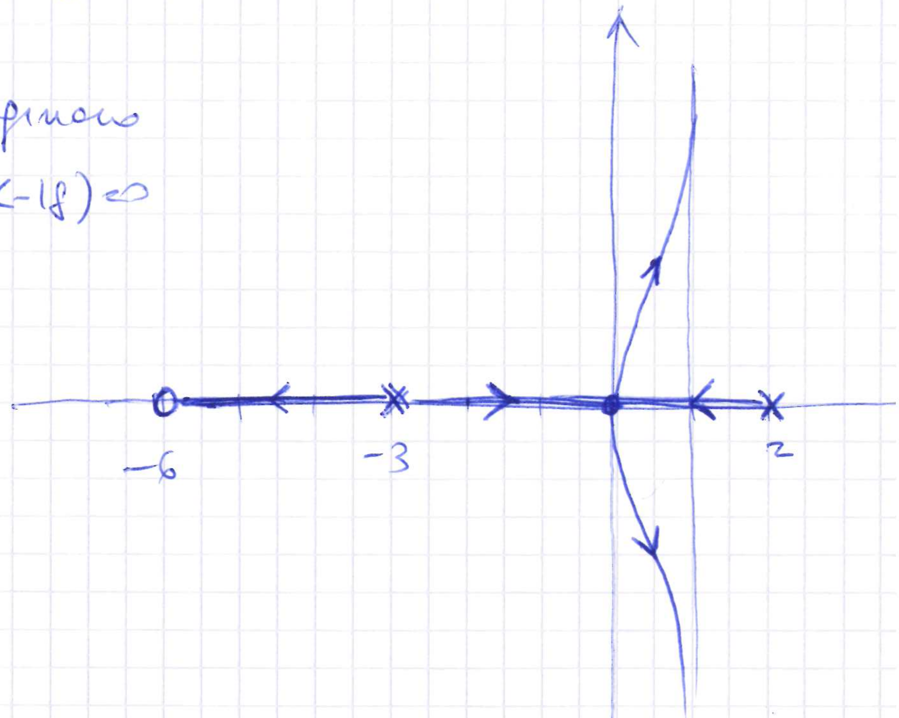
$$(s+3)\left[s^2+3s-2s\cancel{-6}-3s^2-18s+s\cancel{+6}\right]=0$$

$$-(s+3)s(2s+16)=0 \qquad s_1=-3 \qquad s_2=0 \qquad s_3=-8$$

$$k_1=0 \qquad k_2=3 \qquad \text{luogo negativo}$$

Asintoti

$$\sigma_a=\frac{-3-3+2-(-6)}{2}=1$$



Intersezione asse immaginario

$$s^3+4s^2+(k-3)s+(6k-18)=0$$

3	1	k-3
2	4	6k-18
1	$\frac{6-2k}{4}$	
0	6k-18	

$k=3$ si annulla la riga

$$4s^2+(6k-18)=4s^2+0$$

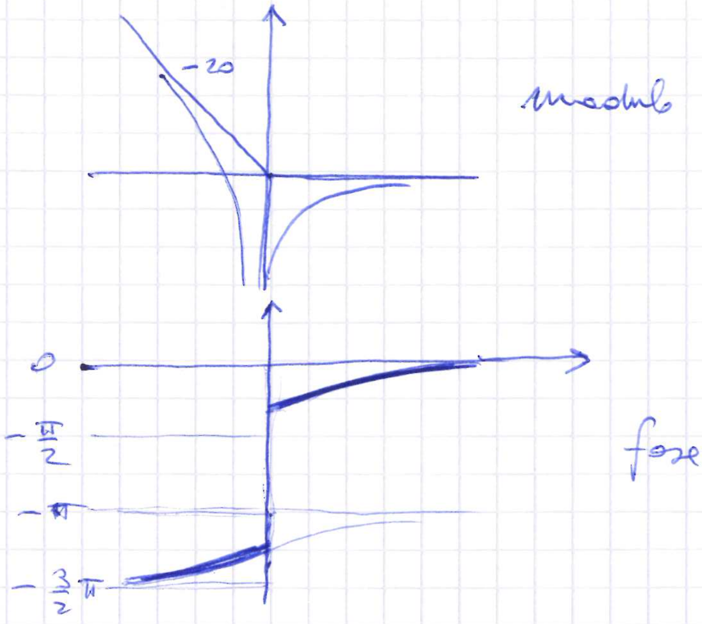
intersezione per $s=0$

2) $0 \le k \le 3$

3) Il modo 1 è associato al polo nell'origine che ottiene per $k=3$. Per tale k il polinomio diventa s^3+4s^2 e quindi il polo $s=0$ è doppio e l'ultimo polo è in $s=-4$ $\Rightarrow$ modi sono $1,\ t,\ e^{-4t}$

ES. 4

1) $G(s) = -\dfrac{1+s^2}{s(1-s)}$

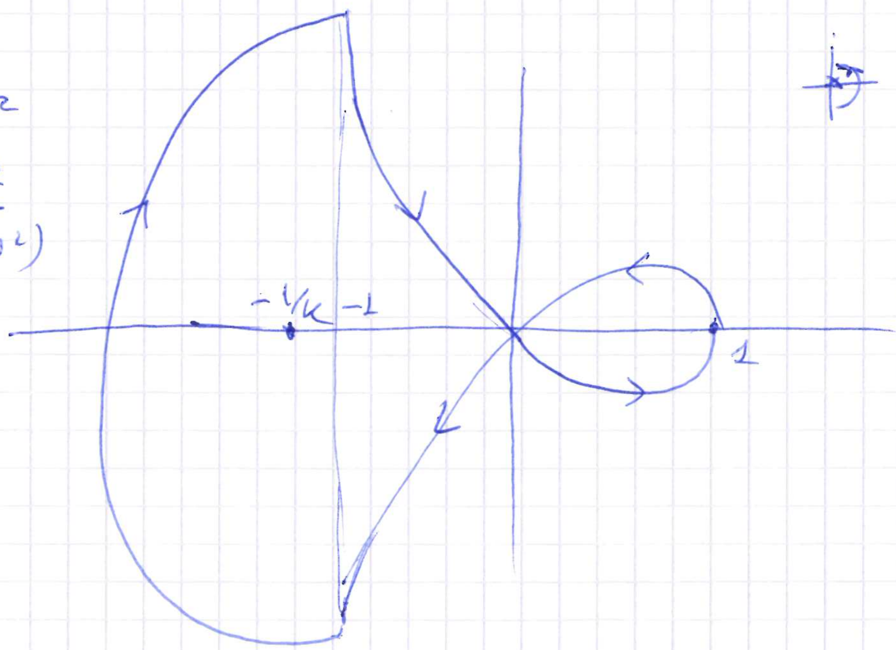


2) $G(j\omega) = \dfrac{1-\omega^2}{j\omega(-1+j\omega)} = \dfrac{(1-\omega^2)(-1-j\omega)}{j\omega(-1+j\omega)(-1-j\omega)} = \dfrac{(\omega^2-1)+j\omega(\omega^2-1)}{j\omega(1+\omega^2)}$

$\mathrm{Re}\, G(j\omega) = \dfrac{\omega^2-1}{1+\omega^2}$

$\mathrm{Im}\, G(j\omega) = \dfrac{1-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}$

ω	Re	Im
0^+	-1	$+\infty$
1	0	0
$+\infty$	1	0



3) $P = 1 \qquad Z = P - N = 1 - N$

$-\frac{1}{k} < 0 \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 2 \qquad (k > 0)$

$0 < -\frac{1}{k} < 1 \Rightarrow N = 1 \Rightarrow Z = 0 \qquad (k < -1) \quad$ Stabile

$-\frac{1}{k} > 1 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 1 \qquad (-1 < k < 0)$

$\boxed{\text{ES. 5}}$

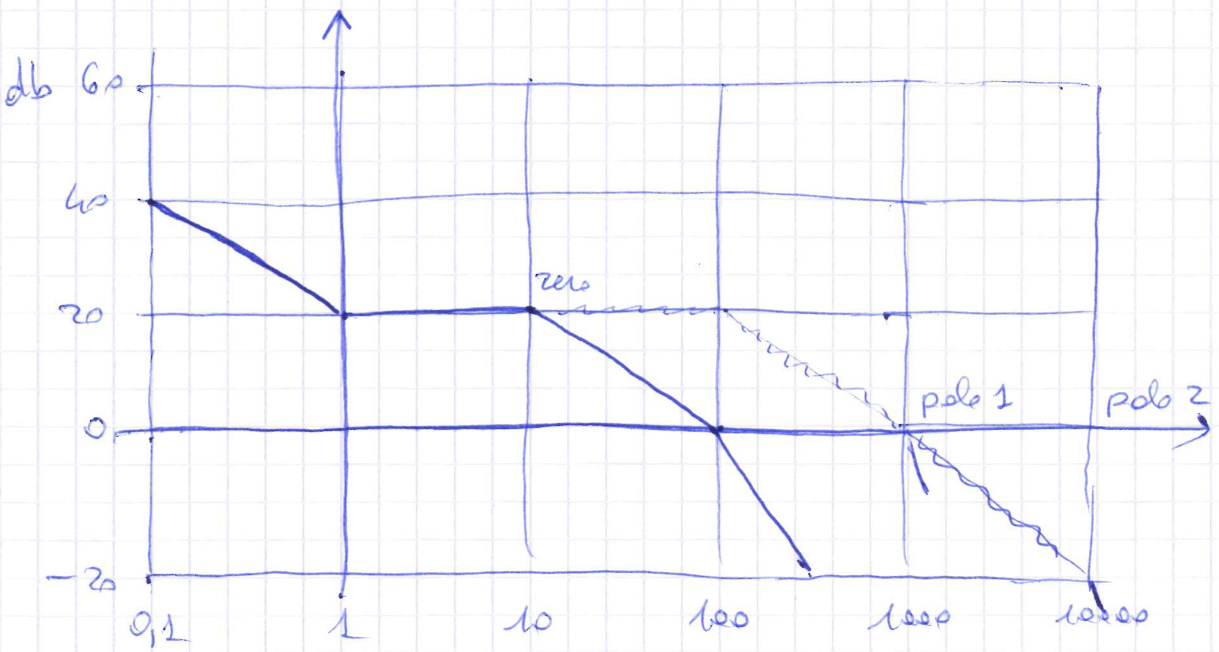
$h_G = 0 \qquad K_G = \frac{25}{10 \cdot 100} = \frac{25}{1000}$

$h = 1 \Rightarrow h_c = h - h_G = 1 - 0 = 1$

$K_W = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0.1} = 10 \Rightarrow K_c = \frac{K_W}{K_G} = 10 \cdot \frac{1000}{25} = 400$

$$G(s) = \frac{25}{1000} \frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$$\hat{W}(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} G(s) = 10 \frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$



$$\bar{C}_1(s) = \frac{1+\frac{s}{10}}{1+\frac{s}{1000}} \qquad \bar{C}_2(s) = \frac{1+\frac{s}{10}}{1+\frac{s}{10000}}$$