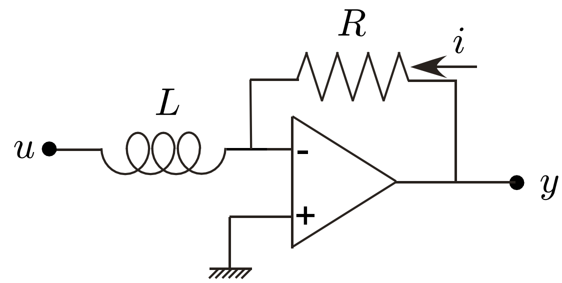
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 18/9/2019

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico



Si tratta di un circuito con un amplificatore operazionale con impedenze di ingresso infinite tra i morsetti $+$ e $-$ e tale che

$$v_o = A(v_+ - v_-)$$

dove v_+, v_- sono le tensioni agli ingressi $+$ e $-$ dell'amplificatore e v_o e' la tensione di uscita dell'amplificatore.

1. Si supponga ora che la resistenza e l'induttanza siano ideali. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ (tensione) e l'uscita $y(t)$ (tensione). Determinare la risposta impulsiva.

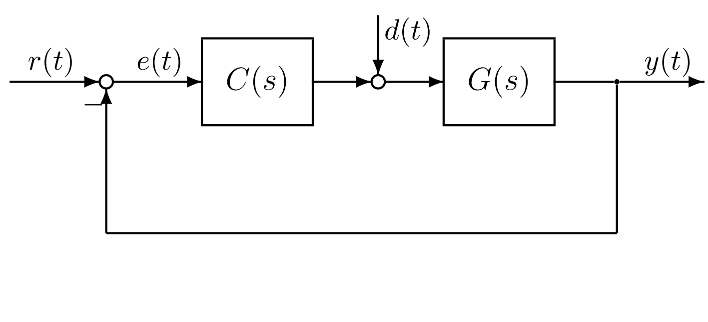
Supponiamo ora che la resistenza R sia sostituita con un componente non lineare tale che lega la tensione e corrente attraverso la relazione

$$v_R = f(i_R)$$

dove $f(x) = x^3$.

2. Trovare le equazioni che legano le variabili $u(t), y(t), i(t)$.
3. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \bar{u}$.
4. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s+1} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}$$

con $a > 0$.

1. Determinare la funzione di trasferimento $T_{ry}(s)$ del sistema in catena chiusa dall'ingresso $r(t)$ all'uscita $y(t)$ e studiarnee la stabilita' al variare dei parametri a e K.

2. Determinare la funzioni sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.

3. Supponiamo che $a = 0, K = 1$ e che $r(t) = \cos(t)$ e che $d(t) = 3$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

4. Supponiamo che $K = 0$. Determinare il valore di a sapendo che a un ingresso di disturbo impulsivo $d(t) = \delta(t)$ si osserva un'uscita $y(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\ t\right)$ dove A e' una costante opportuna.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(s^2 + as + 13)}{s(s + 4)^2}$$

dove a e' un parametro reale.

1. Determinare a, sapendo che $s = -1$ é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si fissi a pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, punti doppi e gli angoli di uscita dai poli e dagli zeri.

3. Si trovino i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa contiene modi puramente oscillatori. Determinare gli altri modi del sistema in corrispondenza a tale valore di K.

4. Si trovino i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa ammette il modo e^{-t}. Determinare gli altri modi del sistema in corrispondenza a tale valore di K.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{(1 - s)^2}{s(s + 1)}$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove $G(s) = \frac{3}{s+10}$. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta alla rampa circa uguale a $0,01$;

2. margine di fase circa $m_\phi \simeq 90^0$;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 10$.

Esercizio 6 (Teorico). Spiegare i principi su cui si fonda la modellizzazione del motore in continua e come si ottiene il modello basato sullo schema a blocchi e infine come da questo di ottengono le funzioni di trasferimento.

ES. 1

1. $\begin{cases} y = u + Ri + L i^{(1)} \\ y = -A(u + L i^{(1)}) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}\text{-trasformata}} \begin{cases} Y = U + RI + LsI \\ Y = -A(U + LsI) \end{cases}$ ✱

Dalla prima equazione ricavo $I = \dfrac{Y-U}{Ls+R}$ e sostituisco nella seconda

$$Y = -A\left(U + \frac{Ls}{Ls+R}(Y-U)\right) = -AU - \frac{ALs}{Ls+R}Y + \frac{ALs}{Ls+R}U$$

$$\left(1 + \frac{ALs}{Ls+R}\right)Y = A\left(\frac{Ls}{Ls+R} - 1\right)U$$

$$(Ls+R+ALs)Y = A(\cancel{Ls} - \cancel{Ls} - R)U \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{-AR}{(A+1)Ls+R}$$ funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{-AR}{(A+1)Ls+R} = \frac{-AR/(A+1)L}{s + \frac{R}{(A+1)L}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} w(t) = -\frac{AR}{(A+1)L} e^{-\frac{R}{(A+1)L}t}$$

2) $\begin{cases} y = u + f(i) + L i^{(1)} \\ y = -A(u + L i^{(1)}) \end{cases} \xrightarrow{\text{equilibrio}} \begin{cases} \bar{y} = \bar{u} + f(\bar{i}) \longrightarrow f(\bar{i}) = -(A+1)\bar{u} \\ \bar{y} = -A\bar{u} \end{cases}$

$\bar{i} = \sqrt[3]{-(A+1)\bar{u}}$

$y = \bar{y} + \tilde{y} \quad u = \bar{u} + \tilde{u} \quad i = \bar{i} + \tilde{i} \qquad f(i) \simeq f(\bar{i}) + f'(\bar{i})\tilde{i}$ espansione di Taylor

$$\begin{cases} \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} + \cancel{f(\bar{i})} + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + L\tilde{i}^{(1)} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = -\cancel{A\bar{u}} - A\tilde{u} - AL\tilde{i}^{(1)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tilde{y} = \tilde{u} + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + L\tilde{i}^{(1)} \\ \tilde{y} = -A\tilde{u} - AL\tilde{i}^{(1)} \end{cases}$$

Passando alle Laplace trasformate $\tilde{Y} = \mathcal{L}(\tilde{y})$, $\tilde{U} = \mathcal{L}(\tilde{u})$ e $\tilde{I} = \mathcal{L}(\tilde{i})$

$$\begin{cases} \tilde{Y}(s) = \tilde{U}(s) + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{I}(s) + Ls\tilde{I}(s) \\ \tilde{Y}(s) = -A\tilde{U}(s) - ALs\tilde{I}(s) \end{cases}$$

Sono le stesse equazioni precedenti ✱ con $f^{(1)}(\bar{i})$ al posto di R

Quindi si ottiene la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{-Af^{(1)}(\bar{i})}{(A+1)Ls + f^{(1)}(\bar{i})} = \frac{-A\bar{R}}{(A+1)Ls + \bar{R}}$$ dove $\bar{R} = 3\{(-A-1)\bar{u}\}^{2/3}$

dato che $f^{(1)} = 3x^2$ con $x = \bar{i}$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

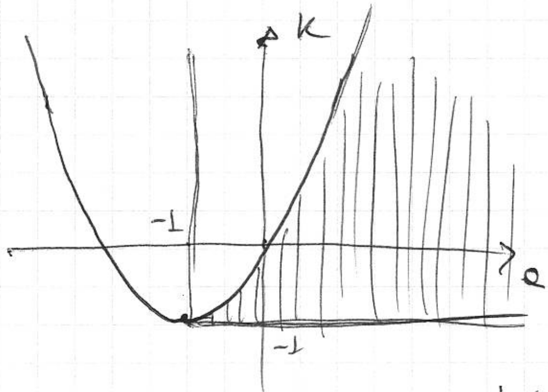
1) $T_{ry}(s) = \dfrac{k}{(s^2+as+1)(s+1)+k}$ $\qquad T_{dy}(s) = \dfrac{s+1}{(s^2+as+1)(s+1)+k}$

Stabilità di $(s^2+as+1)(s+1)+k = s^3+(a+1)s^2+(a+1)s+k+1$

$k > -1$

$a > -1$

$k < a^2+2a$



3	1	$a+1$
2	$a+1$	$k+1$
1	$\dfrac{a^2+2a-k}{a+1}$	
0	$k+1$	

2) $$S_a^{T_{ry}} = \frac{a}{T_{ry}}\frac{\partial T_{ry}}{\partial a} = a\,\frac{\cancel{(s^2+as+1)(s+1)+k}}{\cancel{k}}\;\frac{-\cancel{k}\,s(s+1)}{[(s^2+as+1)(s+1)+k]^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-a\,s(s+1)}{(s^2+as+1)(s+1)+k}$$

3) $r(t) = \cos(t)$, $d(t) = 0$ $\qquad y(t) \simeq |T_{ry}(j)|\cos(t + \angle T_{ry}(j))$

$$T_{ry}(j) = \frac{k}{(-\cancel{1}+aj+\cancel{1})(1+j)+k} = \frac{k}{k-a+ja}$$

$$|T_{ry}(j)| = \frac{|k|}{\sqrt{(k-a)^2+a^2}} \qquad \angle T_{ry}(j) = -\angle k-a+ja = -\arctan\frac{a}{k-a}$$

per k=1 e a=0 allora T=1 e quindi modulo=1 e fase =0

$r(t) = 0$, $d(t) = 3$ $\qquad y(t) \simeq T_{dy}(0)\,3 = \dfrac{1}{1+k}\,3$

Globalmente $$y(t) \simeq \frac{|k|}{\sqrt{(k-a)^2+a^2}}\cos\left(t - \arctan\frac{a}{k-a}\right) + \frac{3}{1+k}$$

4) La risposta impulsiva associata al sistema con fdt $G(s) = \dfrac{1}{s^2+as+1}$ è $A e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\,t\right)$ a cui corrispondono poli $-\frac{1}{2} \pm j\sqrt{\frac{3}{4}}$

Quindi $\left(s+\frac{1}{2}+j\sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(s+\frac{1}{2}-j\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = s^2+as+1 \Rightarrow a=1$

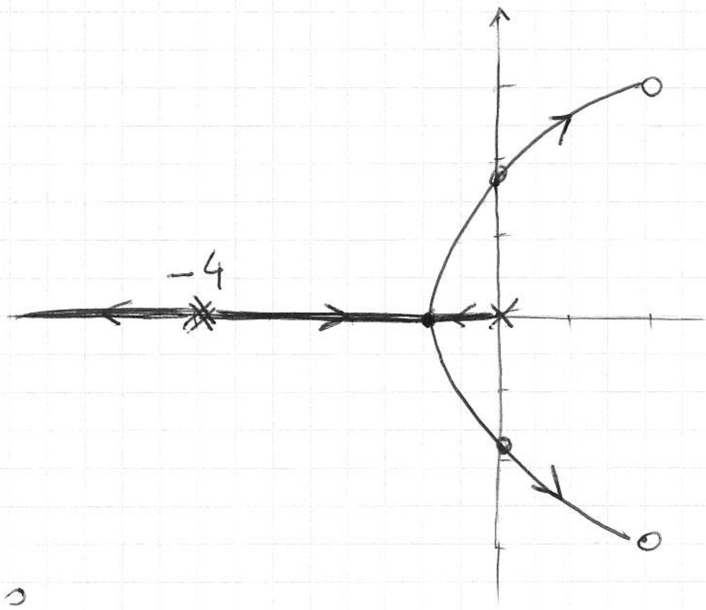
ES 3

$$s(s+4)^2 + k(s^2 + as + 13) = 0$$

1) $\begin{cases} s(s+4)^2 + k(s^2 + as + 13) = 0 \\ (s+4)^2 + 2s(s+4) + k(2s + a) = 0 \end{cases} \xRightarrow{s=-1} \begin{cases} -9 + k(14 - a) = 0 \\ 9 + 6 + k(-2 + a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k = \frac{1}{2} \\ a = -4 \end{matrix}$

2) poli $s = 0$, $s = -4$, $s = -4$

zeri $s_{1,2} = 2 \pm j3$



Altri punti doppi

$$\begin{cases} s(s+4)^2 + k(s^2 - 4s + 13) = 0 \\ (s+4)^2 + 2s(s+4) + k(2s - 4) = 0 \end{cases}$$

$$k = -\frac{(3s+4)(s+4)}{2s-4}$$

$$s(s+4)^{\cancel{2}} - \frac{(3s+4)\cancel{(s+4)}}{2s-4}(s^2 - 4s + 13) = 0$$

$$s(s+4)(2s-4) - (3s+4)(s^2 - 4s + 13) = 0$$

$s^3 - 12s^2 + 39s + 52 = 0$ divido per $s+1$

$$\begin{array}{rr|l} s^3 - 12s^2 + 39s + 52 & & s+1 \\ \hline s^3 + s^2 & & s^2 - 13s + 52 \\ \hline -13s^2 + 39s + 52 & & \\ -13s^2 - 13s & & \\ \hline 52s + 52 & & \\ 52s + 52 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

il risultato della divisione è $s^2 - 13s + 52$

che ha radici non reali e quindi

non considerando (generalmente) i punti doppi

Intersezione asse immaginario

$$s^3 + (8 + k)s^2 + (16 - 4k)s + 13k = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16 - 4k \\ 2 & k + 8 & 13k \\ 1 & \frac{-4k^2 - 29k + 128}{k+8} & \\ 0 & 13k & \end{array}$$

La riga (1) si annulla quando

si annulla $4k^2 + 29k - 128 = 0$

$K_{1,2} = 3.1$ e -10.34

Per $k = 3.1$ la riga (2) diventa associabile al polinomio

$11.1\, s^2 + 40.3$ che ha radici $s_{1,2} = \pm j\, 1.9$

3) I modi sono puramente oscillatori per K corrispondente alla intersezione con l'asse immaginario cioè per $K = 3,1$. Per tale valore il polinomio è divisibile per $(K+8)s^2 + 13K = 11,1\, s^2 + 40,3$

Quindi due radici sono $s_{12} = \pm j1,9$ e due modi sono

$$\cos(1,9t) \quad , \quad \sin(1,9t)$$

Per trovare il rimanente modo dobbiamo dividere il polinomio

$$
\begin{array}{l|l}
s^3 + (k+8)s^2 + (-4k+16)s + 13k & (k+8)s^2 + 13k \\
\hline
s^3 \qquad + \dfrac{13k}{k+8}s & \dfrac{1}{k+8}s + 1 \\
\hline
(k+8)s^2 + \left(-4k+16-\dfrac{13k}{k+8}\right)s + 13k & \\
(k+8)s^2 \qquad\qquad + 13 & \\
\hline
\left(-4k+16-\dfrac{13k}{k+8}\right)s &
\end{array}
$$

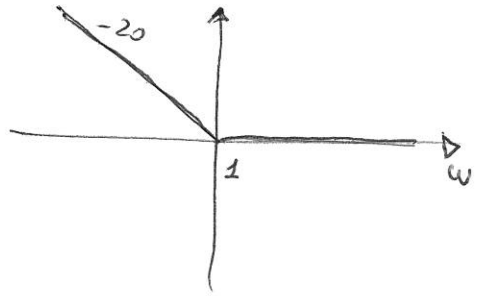
per $K = 3,1$ il resto è zero e la radice di

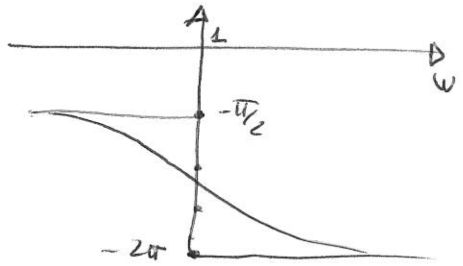
$\dfrac{1}{k+8}s + 1$ mi dà l'ultimo modo che è

$$s_3 = -11,1 \quad \Rightarrow \quad e^{-11,1t}$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

1) BODE





2) NYQUIST

$$G(j\omega) = \frac{1-2j\omega-\omega^2}{j\omega(1+j\omega)} \quad 1-j\omega$$

$$= \frac{(1-2j\omega-\omega^2)(1-j\omega)}{j\omega(1+\omega^2)} = \frac{1-\omega^2-j\omega(1-\omega^2)-2j\omega-2\omega^2}{j\omega(1+\omega^2)}$$

$$= \frac{1-3\omega^2-j\omega(3-\omega^2)}{j\omega(1+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Re}\, G = \frac{\omega^2-3}{\omega^2+1}$$

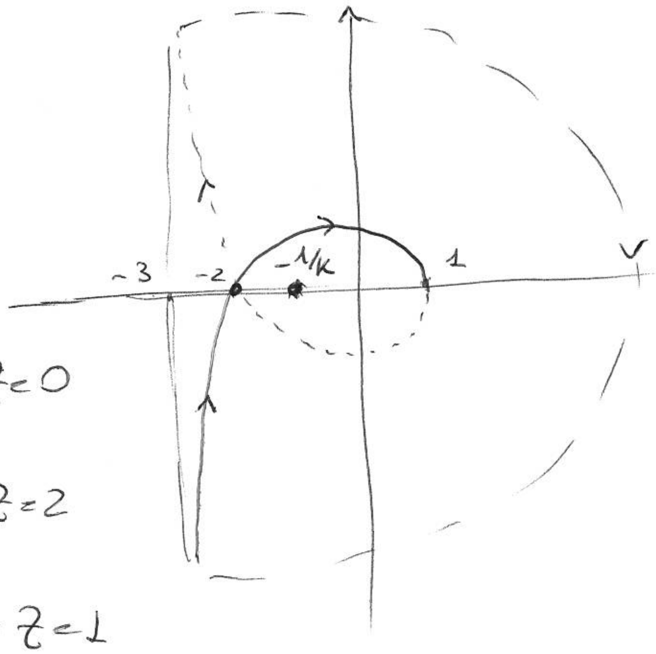
$$\mathrm{Im}\, G = \frac{3\omega^2-1}{\omega(1+\omega^2)}$$

$\omega = 0^+$ $\quad \mathrm{Re} = -3$ $\quad \mathrm{Im} = -\infty$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \mathrm{Re} = -2$ $\quad \mathrm{Im} = 0$

$\omega = \sqrt{3}$ $\quad \mathrm{Re} = 0$ $\quad \mathrm{Im} = 2/\sqrt{3}$

$\omega = +\infty$ $\quad \mathrm{Re} = 1$ $\quad \mathrm{Im} = 0$



3) $P = 0$

$-\frac{1}{k} < -2$ $\quad \left(0 < k < \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$

$-2 < -\frac{1}{k} < 1$ $\quad \left(k < -1 \text{ o } k > \frac{1}{2}\right) \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2$

$-\frac{1}{k} > 1$ $\quad (-1 < k < 0) \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 1$

$\boxed{ES.5}$

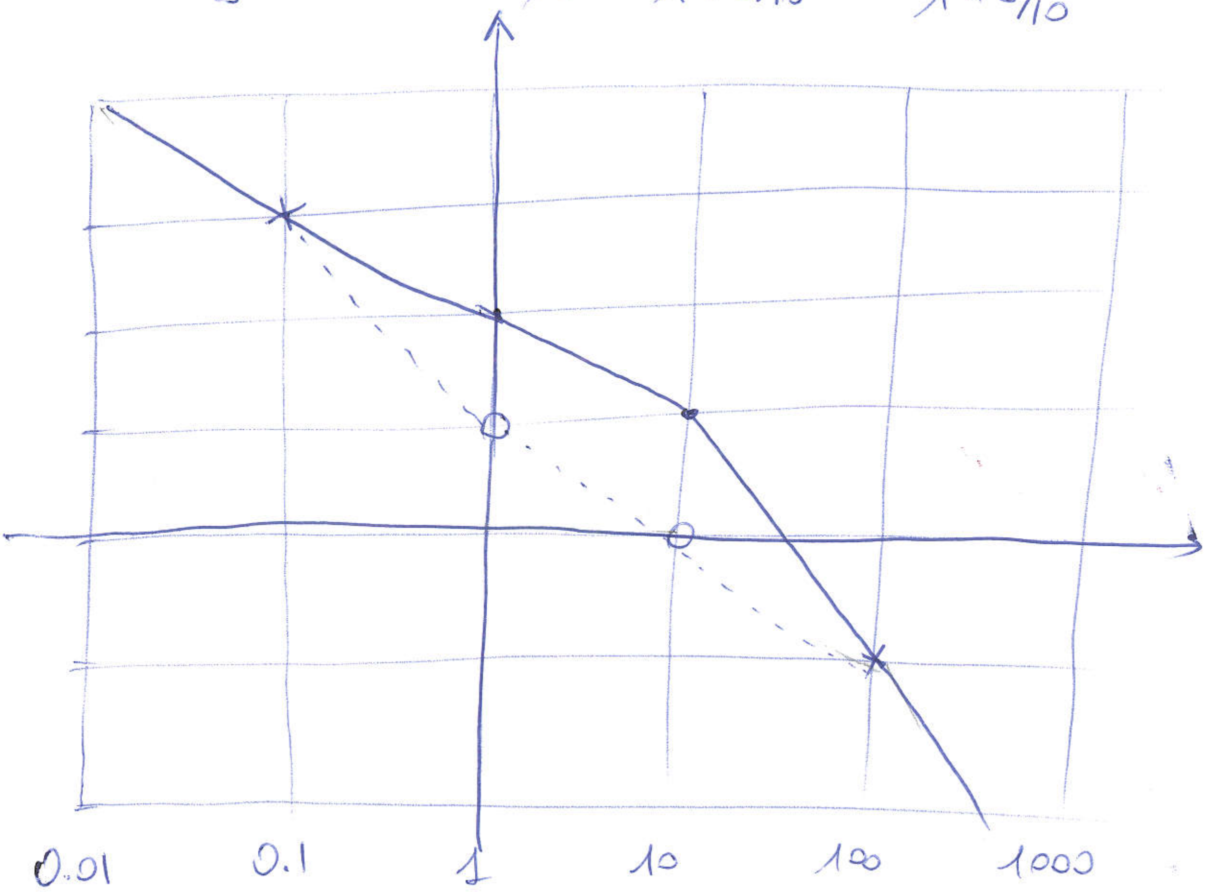
$C(s) = \frac{k_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s)$ $\qquad G(s) = \frac{3/10}{1+s/10}$ $\qquad h_c = 0$

$k_c = \frac{3}{10}$

$h_c = h - h_G = 1 - 0 = 1$

$k_c = \frac{100}{k_G} = \frac{1000}{3}$

$\hat{W}(s) = \frac{k_c}{s^{h_c}} G(s) = \frac{\cancel{1000}^{100}}{3s} \frac{\cancel{3/10}}{1+s/10} = \frac{100}{1+s/10}$



$\bar{C}(s) = \frac{1+s}{1+10s} \frac{1+s/10}{1+s/100}$