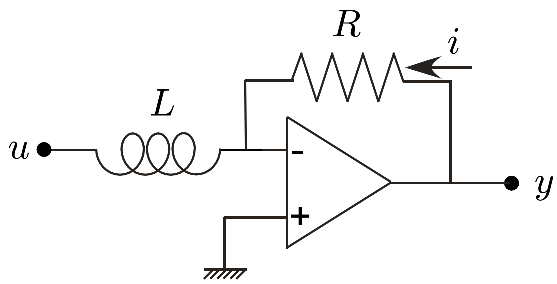
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 17/7/2017

Cognome e nome: ____________________________________ Matr.: ____________

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettrico



Si tratta di un circuito con un amplificatore operazionale con impedenze di ingresso infinite ai morsetti $+$ e $-$ e tale che

$$v_o = A(v_+ - v_-)$$

dove v_+, v_- sono le tensioni agli ingressi $+$ e $-$ dell'amplificatore e v_o e' la tensione di uscita dell'amplificatore.

1. Si supponga ora che la resistenza e l'induttanza siano ideali. Determinare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $u(t)$ (tensione) e l'uscita $y(t)$ (tensione). Determinare la risposta impulsiva.

Supponiamo ora che la resistenza R sia sostituita con un componente non lineare tale che lega la tensione e corrente attraverso la relazione

$$v_R = f(i_R)$$

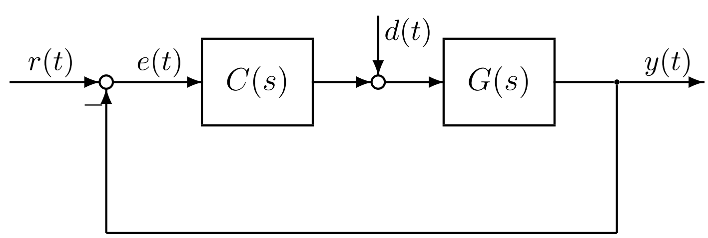
dove $f(x) = x^3$.

2. Trovare le equazioni che legano le variabili $u(t), y(t), i(t)$.

3. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \bar{u}$.

4. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

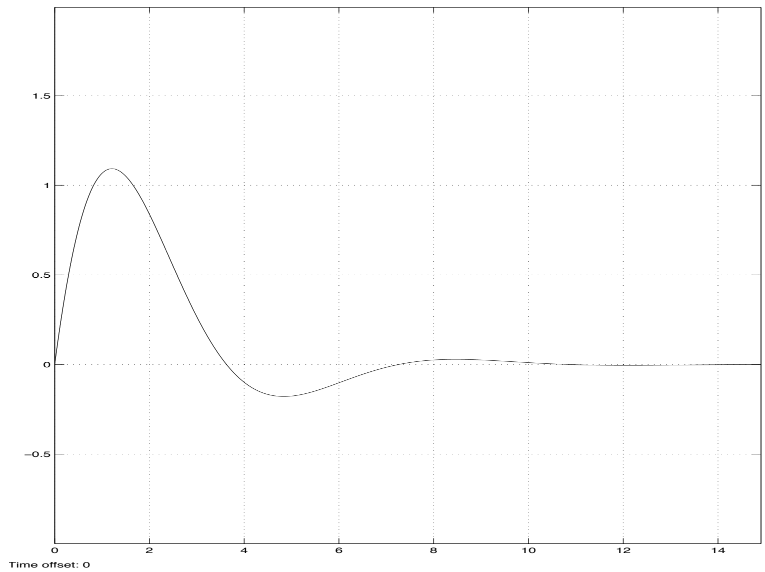
$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s^2 + a}{s^2 + s + 1}$$

con $a > 0$.

1. Studiare la stabilita' del sistema in catena chiuso al variare di K e a. Determinare la funzione sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.

2. Supponiamo che $a = 1, K = 1$ e che $r(t) = \cos(t)$ e che $d(t) = 5$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

3. Supponiamo che $K = 0$ e che a un ingresso di disturbo a gradino unitario $d(t) = \sin(2t)$ si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura. Determinare il valore di a.



Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(s^2 + as + 13)}{s(s+4)^2}$$

dove a e' un parametro reale.

1. Determinare a, sapendo che $s = -1$ é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si fissi a pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, punti doppi e gli angoli di uscita dai poli e dagli zeri.
3. Si trovino i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa contiene modi puramente oscillatori. Determinare gli altri modi del sistema in corrispondenza a tale valore di K

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{(1-s)^2}{s(s+1)}$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{10s + 5}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino $\simeq 0,001$;
2. margine di fase circa uguale a $m_\phi \geq 45^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 50$.

Esercizio 5. Dare la definizione di poli dominanti e il loro significato nella descrizione del comportamento in transitorio di un sistema.

ES. 1

1. $$\begin{cases} y = u + Ri + L i^{(1)} \\ y = -A(u + L i^{(1)}) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}\text{-trasformata}} \begin{cases} Y = U + RI + LsI \\ Y = -A(U + LsI) \end{cases} \quad (*)$$

Dalla prima equazione ricavo $I = \dfrac{Y-U}{Ls+R}$ e sostituisco nella seconda

$$Y = -A\left(U + \frac{Ls}{Ls+R}(Y-U)\right) = -AU - \frac{ALs}{Ls+R}Y + \frac{ALs}{Ls+R}U$$

$$\left(1 + \frac{ALs}{Ls+R}\right)Y = A\left(\frac{Ls}{Ls+R} - 1\right)U$$

$$(Ls + R + ALs)Y = A(\cancel{Ls} - \cancel{Ls} - R)U \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{-AR}{(A+1)Ls+R}$$ funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{-AR}{(A+1)Ls+R} = \frac{-AR/(A+1)L}{s + \frac{R}{(A+1)L}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} w(t) = -\frac{AR}{(A+1)L} e^{-\frac{R}{(A+1)L}t}$$

2) $$\begin{cases} y = u + f(i) + L i^{(1)} \\ y = -A(u + L i^{(1)}) \end{cases} \xrightarrow{\text{equilibrio}} \begin{cases} \bar{y} = \bar{u} + f(\bar{i}) \\ \bar{y} = -A\bar{u} \end{cases} \longrightarrow f(\bar{i}) = -(A+1)\bar{u}$$

$$\bar{i} = \sqrt[3]{-(A+1)\bar{u}}$$

$y = \bar{y} + \tilde{y} \quad u = \bar{u} + \tilde{u} \quad i = \bar{i} + \tilde{i} \qquad f(i) \simeq f(\bar{i}) + f'(\bar{i})\tilde{i}$ espansione di Taylor

$$\begin{cases} \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = \cancel{\bar{u}} + \tilde{u} + \cancel{f(\bar{i})} + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + L\tilde{i}^{(1)} \\ \cancel{\bar{y}} + \tilde{y} = -\cancel{A\bar{u}} - A\tilde{u} - AL\tilde{i}^{(1)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \tilde{y} = \tilde{u} + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{i} + L\tilde{i}^{(1)} \\ \tilde{y} = -A\tilde{u} - AL\tilde{i}^{(1)} \end{cases}$$

Ponendo alle Laplace trasformate $\tilde{Y} = \mathcal{L}(\tilde{y})$, $\tilde{U} = \mathcal{L}(\tilde{u})$ e $\tilde{I} = \mathcal{L}(\tilde{i})$

$$\begin{cases} \tilde{Y}(s) = \tilde{U}(s) + f^{(1)}(\bar{i})\tilde{I}(s) + Ls\tilde{I}(s) \\ \tilde{Y}(s) = -A\tilde{U}(s) - ALs\tilde{I}(s) \end{cases}$$

Sono le stesse equazioni precedenti (*) con $f^{(1)}(\bar{i})$ al posto di R

Quindi si ottiene la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{-Af^{(1)}(\bar{i})}{(A+1)Ls + f^{(1)}(\bar{i})} = \frac{-A\bar{R}}{(A+1)Ls + \bar{R}}$$ dove $\bar{R} = 3\{(-A-1)\bar{u}\}^{2/3}$

dato che $f^{(1)} = 3x^2$ con $x = \bar{i}$

$\boxed{\text{Es. 2}}$ $$T_{ry}(s) = \frac{k(s^2+a)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)}$$

1. Denominatore è $s(s^2+s+1)+k(s^2+a) = s^3+(k+1)s^2+s+ka$

3	1	1
2	$k+1$	ka
1	$\frac{k+1-ka}{k+1}$	
0	ka	

Stabilità $\Leftrightarrow \begin{cases} ka>0 \Leftrightarrow k>0 \\ k>-1 \\ \cancel{\ldots} \end{cases}$

$$S_a^{T_{ry}} = \frac{a}{T_{ry}} \frac{\partial T_{ry}}{\partial a} = a \frac{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)}{k(s^2+a)} \frac{k[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]-k(s^2+a)k}{[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]^2}$$

$$= \frac{a}{k(s^2+a)} \frac{k[s(s^2+s+1)+\cancel{k(s^2+a)}-\cancel{k(s^2+a)}]}{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)} = \frac{as(s^2+s+1)}{(s^2+a)[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]}$$

2. Se $r(t)=0$ e $d(t)=5$ allora

$y(t) \simeq T_{dy}(0)\,5 = 0$ dato che $T_{dy}(s) = \frac{s(s^2+1)}{s(s^2+s+1)+(s^2+1)}$

Se $r(t)=\cos(t)$ e $d(t)=0$ allora

$y(t) \simeq |T_{ry}(j)| \cos(t + \angle T_{ry}(j))$

$T_{ry}(j) = \frac{(j^2+1)}{j(j^2+j+1)+(j^2+1)} = 0 \Rightarrow y(t) \simeq 0$

Quindi complessivamente $y(t) \simeq 0$

3. Dalle figure risulta che $y(t)$ è asintoticamente nulla.

La teoria mi dice che

$y(t) \simeq |G(2j)| \sin(2t + \angle G(2j))$

Quindi devo avere che $|G(2j)|=0$ e quindi

$$\frac{(2j)^2+a}{(2j)^2+2j+1} = 0 \Rightarrow a=4$$

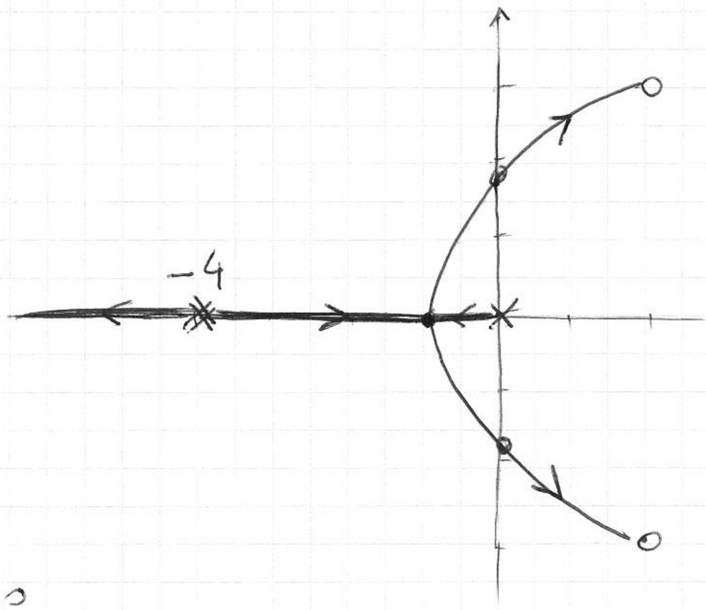
ES 3

$$s(s+4)^2 + k(s^2 + as + 13) = 0$$

1) $\begin{cases} s(s+4)^2 + k(s^2+as+13) = 0 \\ (s+4)^2 + 2s(s+4) + k(2s+a) = 0 \end{cases} \xrightarrow{s=-1} \begin{cases} -9 + k(14-a) = 0 \\ 9 - 6 + k(-2+a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k = \frac{1}{2} \\ a = -4 \end{matrix}$

2) poli $s=0$, $s=-4$, $s=-4$

zeri $s_{1,2} = 2 \pm j3$



Altri punti doppi

$$\begin{cases} s(s+4)^2 + k(s^2-4s+13) = 0 \\ (s+4)^2 + 2s(s+4) + k(2s-4) = 0 \end{cases}$$

$$k = -\frac{(3s+4)(s+4)}{2s-4}$$

$$s(s+4)^{\cancel{2}} - \frac{(3s+4)\cancel{(s+4)}}{2s-4}(s^2-4s+13) = 0$$

$$s(s+4)(2s-4) - (3s+4)(s^2-4s+13) = 0$$

$s^3 - 12s^2 + 39s + 52 = 0$ divido per $s+1$

$$\begin{array}{l|l} s^3 - 12s^2 + 39s + 52 & s+1 \\ \hline s^3 + s^2 & s^2 - 13s \\ \hline -13s^2 + 39s + 52 & +52 \\ -13s^2 - 13s & \\ \hline 52s + 52 & \\ 52s + 52 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

il risultato della divisione è $s^2 - 13s + 52$

che ha radici non reali e quindi non consideriamo (pertinentemente) o punti doppi

Intersezione asse immaginario

$$s^3 + (8+k)s^2 + (16-4k)s + 13k = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16-4k \\ 2 & k+8 & 13k \\ 1 & \frac{-4k^2-29k+128}{k+8} & \\ 0 & 13k & \end{array}$$

La riga 1 si annulla quando si annulla $4k^2 + 29k - 128 = 0$

$k_{1,2} = 3.1$ e -10.34

Per $k = 3.1$ la riga 2 diventa associabile al polinomio

$11.1\, s^2 + 40.3$ che ha radici $s_{1,2} = \pm j\, 1.9$

3) I modi sono puramente oscillatori per K corrispondente alla intersezione con l'asse immaginario cioè per $K = 3,1$. Per tale valore il polinomio è divisibile per $(K+8)s^2 + 13K = 11,1\, s^2 + 40,3$

Quindi due radici sono $s_{1,2} = \pm j\,1,9$ e due modi sono

$$\cos(1,9t) \quad , \quad \sin(1,9t)$$

Per trovare il rimanente modo dobbiamo dividere il polinomio

$$s^3 + (k+8)s^2 + (-4k+16)s + 13k \quad \Big| \quad (k+8)s^2 + 13k$$

$$s^3 \quad + \frac{13k}{k+8} s \qquad \Big| \quad \frac{1}{k+8} s + 1$$

$$(K+8)s^2 + \left(-4k+16 - \frac{13k}{k+8}\right)s + 13k$$

$$(k+8)s^2 \qquad + 13$$

$$\left(-4k+16 - \frac{13k}{k+8}\right)s$$

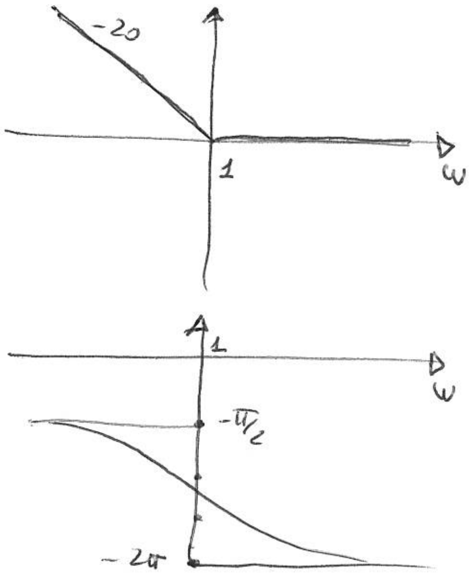
per $K = 3,1$ il resto è zero e la radice di

$\frac{1}{k+8} s + 1$ mi dà l'ultimo modo che è

$$s_3 = -11,1 \Rightarrow e^{-11,1t}$$

ES. 4

1) BODE



2) NYQUIST

$$G(j\omega) = \frac{1-2j\omega-\omega^2}{j\omega(1+j\omega)} \quad 1-j\omega$$

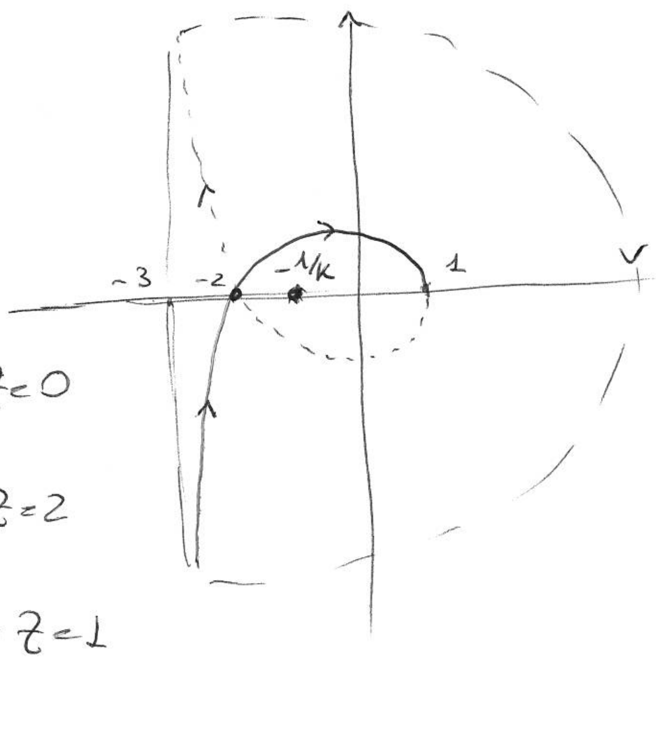
$$= \frac{(1-2j\omega-\omega^2)(1-j\omega)}{j\omega(1+\omega^2)} = \frac{1-\omega^2-j\omega(1-\omega^2)-2j\omega-2\omega^2}{j\omega(1+\omega^2)}$$

$$= \frac{1-3\omega^2-j\omega(3-\omega^2)}{j\omega(1+\omega^2)}$$

$$\mathrm{Re}\,G = \frac{\omega^2-3}{\omega^2+1}$$

$$\mathrm{Im}\,G = \frac{3\omega^2-1}{\omega(1+\omega^2)}$$

$\omega = 0^+$	$\mathrm{Re} = -3$	$\mathrm{Im} = -\infty$
$\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\mathrm{Re} = -2$	$\mathrm{Im} = 0$
$\omega = \sqrt{3}$	$\mathrm{Re} = 0$	$\mathrm{Im} = 2/\sqrt{3}$
$\omega = +\infty$	$\mathrm{Re} = 1$	$\mathrm{Im} = 0$



3) $P = 0$

$-\frac{1}{k} < -2 \quad (0 < k < \frac{1}{2}) \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$

$-2 < -\frac{1}{k} < 1 \quad (k < -1 \text{ o } k > \frac{1}{2}) \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2$

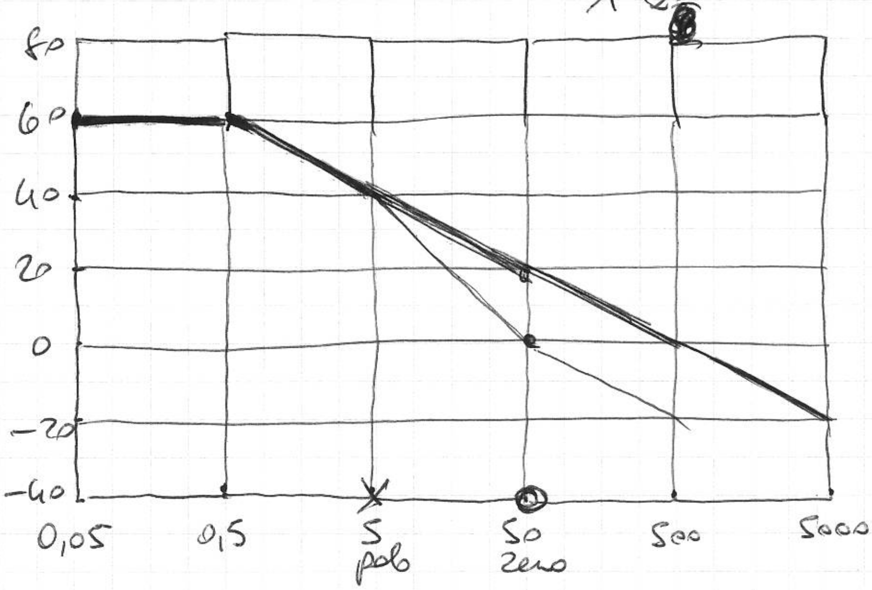
$-\frac{1}{k} > 1 \quad (-1 < k < 0) \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 1$

$\boxed{ES\ 5}$

$$G(s) = \frac{1}{5}\,\frac{1}{1+2s}$$

errore alla risposta al gradino $\simeq \frac{1}{1000} \Rightarrow K_c = \frac{1000}{K_G} = 5000$

$$\hat{W}(s) = 2000\,G(s) = \frac{1000}{1+2s}$$



rete ritardatrice $\bar{C}(s) = \frac{1+0,02\,s}{1+0,2\,s}$

$$C(s) = 5000\,\frac{1+0,02\,s}{1+0,2\,s}$$