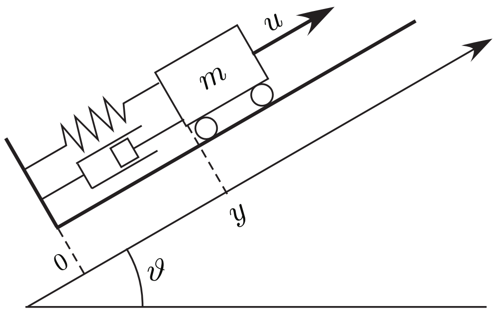
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 17/6/2016

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Per l'appello svolgere tutti gli esercizi proposti. Per terzo compitino svolgere Esercizi 4, 5, 6.
Per il terzo compitino: 1 ora e 15 minuti.
Per il primo appello 3 ore.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.



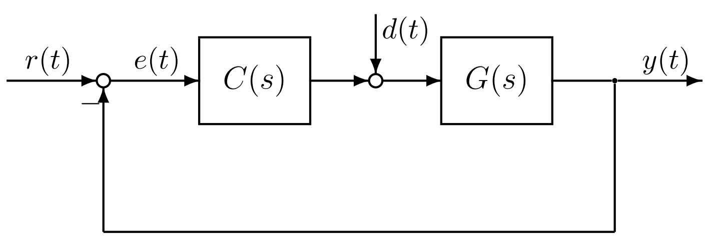
Si tratta di un carrello che si muove su di un piano inclinato sul quale agisce una coppia u, attaccato a una parete con una molla e uno smorzatore. Lo smorzatore e' ideale con costante di attrito b mentre la molla soddisfa la legge secondo cui la forza elastica generata vale $F_e = f(x)$, dove x e' la lunghezza della molla e

$$f(x) = k(x - L)^3$$

dove k e' una costante positiva e L e' la lunghezza a riposo della molla.

1. Determinare le equazioni del moto. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$.
2. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

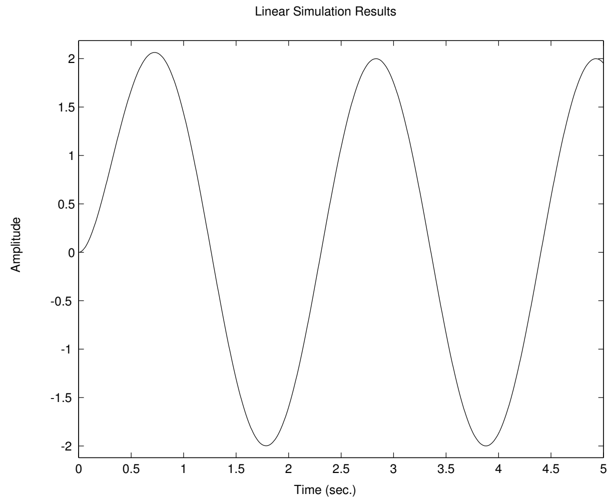
Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s+a}$$

1. Determinare i valori di K e a che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.
2. Determinare $a \geq 0$ sapendo che se $d(t) = 10sin(3t)$ e $K = 0$ si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura.



3. Supponiamo ora che a sia dato dal valore calcolato al punto precedente (altrimenti porre $a = 1$). Determinare i valori di K per i quali nel sistema in catena chiusa il segnale di disturbo $d(t) = sin(t)$ risulta attenuato in uscita di almeno 5 volte.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s^2+1}{(s+a)(s+2)^2}$$

dove a e' un parametro reale.

1. Determinare a in modo tale che -1 sia punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si fissi a pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e punti doppi (no angoli ingresso/uscita).
3. Determinare i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa ha tutti i modi non oscillatori.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K, \qquad G(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}\ .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove $G(s) = \frac{100}{(s+50)^2}$. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:
1. errore a regime in risposta al gradino circa uguale a 0.001;
2. margine di fase circa $m_\phi \simeq 90^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 500$.

Esercizio 6 (Teorico) Indicare le specificita' e le prerogative che rendono il criterio di Nyquist uno strumento utile per l'analisi della stabilita' di un sistema retroazionato rispetto ad altri metodi.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1) $-m\ddot{y} - b\dot{y} - f(x) - mg\sin\theta + u = 0$

Se $y(t) = \bar{y}$ e $u(t) = 0$ allora otteniamo

$$-f(\bar{y}) - mg\sin\theta = 0$$

$$K(\bar{y} - L)^3 = -mg\sin\theta \qquad \bar{y} = L - \left(\frac{mg\sin\theta}{K}\right)^{1/3}$$

2) Linearizziamo

$$f(y) \simeq f(\bar{y}) + \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=\bar{y}} (y - \bar{y}) = -mg\sin\theta + 3K(\bar{y} - L)^2 \tilde{y}$$

$$= -mg\sin\theta + 3K\left(\frac{mg\sin\theta}{K}\right)^{2/3} \tilde{y}$$

Sistema linearizzato

$$-m\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} + \cancel{mg\sin\theta} + 3K\left(\frac{mg\sin\theta}{K}\right)^{2/3} \tilde{y} - \cancel{mg\sin\theta} + u = 0$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + 3K\left(\frac{mg\sin\theta}{K}\right)^{2/3}}$$

ES. 2

1) Dalla figura si vede che a regime $y(t)$ è una sinusoide di ampiezza 2. Quindi

$$10|G(j3)| = 2$$

$$|G(j3)| = \frac{1}{5} \qquad |G(j3)|^2 = \frac{1}{|j3+a|^2} = \frac{1}{9+a^2}$$

quindi deve essere

$$9+a^2 = 25 \qquad a^2 = 16 \qquad a = 4$$

2) $$T_{ry}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{k}{s(s+4)+k}$$ Stabile $\Longleftrightarrow k > 0$

3) $$T_{dy}(s) = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{1}{s+4}}{1+\frac{k}{s(s+4)}} = \frac{s}{s^2+4s+k}$$

$$|T_{dy}(j)| \leq \frac{1}{5}$$

$$|T_{dy}(j)|^2 \leq \frac{1}{25} \Longleftrightarrow \left|\frac{j}{-1+j4+k}\right|^2 \leq \frac{1}{25} \Longleftrightarrow \frac{1}{(k-1)^2+16} \leq \frac{1}{25}$$

$$\Longleftrightarrow (k-1)^2+16 \geq 25 \Longleftrightarrow (k-1)^2 \geq 9$$

$$\Longleftrightarrow k \leq -2 \quad \text{o} \quad k \geq 4$$

Dobbiamo imporre $k \geq 4$ dato che per $k \leq -2$ il sistema è instabile

$\boxed{\text{ES. 3}}$

Luogo di $(s+a)(s+2)^2 + k(s^2+1) \rightsquigarrow$

1) $\begin{cases} (s+a)(s+2)^2 + k(s^2+1) = 0 \\ (s+2)^2 + 2(s+a)(s+2) + 2ks = 0 \end{cases} \xrightarrow{s=-1} \begin{cases} -1+a+2k=0 \\ 1+2(a-1)-2k=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ k = \frac{1}{6} \end{cases}$

2) Altri punti doppi

$$\begin{cases} \left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2)^2 + k(s^2+1) = 0 \\ (s+2)^2 + 2(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right) + 2ks = 0 \end{cases} \qquad K = -\frac{(s+2)(s+2+2s+4/3)}{2s} = \frac{(s+2)(3s+\frac{10}{3})}{2s}$$

Sostituendo nella prima equazione

$$\left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2)^{\cancel{2}} - \frac{\cancel{(s+2)}(3s+\frac{10}{3})(s^2+1)}{2s} = 0$$

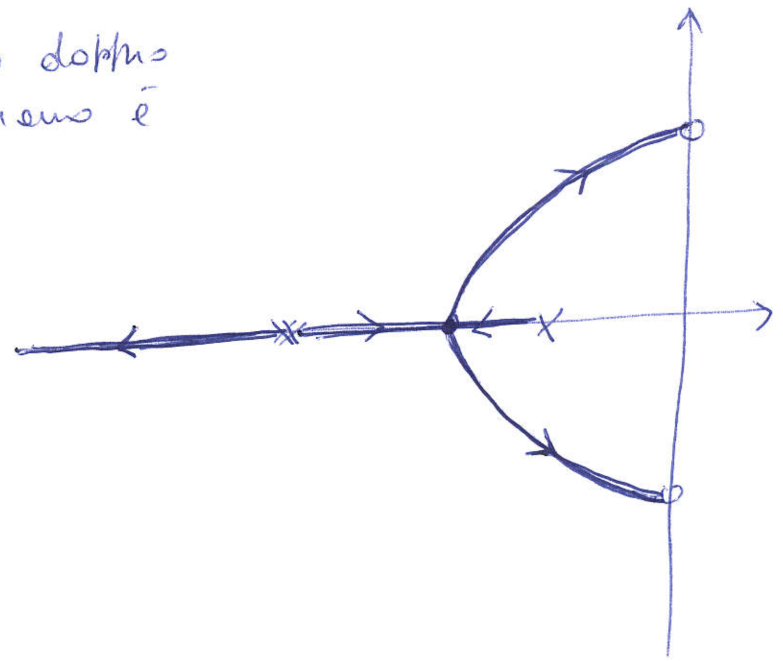
$$2s\left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2) - \left(3s+\frac{10}{3}\right)(s^2+1) = 0$$

$$2s^3 + \frac{16}{3}s^2 + \frac{8}{3}s - 3s^3 - 3s - \frac{10}{3}s^2 - \frac{10}{3} = 0$$

$$s^3 - 2s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} = 0$$

Sappiamo che $s=-1$ è punto doppio e quindi il precedente polinomio è divisibile per $s+1$

$$\begin{array}{l|l} s^3 - 2s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} & s+1 \\ \hline s^3 + s^2 & s^2 - 3s + \frac{10}{3} \\ \hline -3s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} & \\ -3s^2 - 3s & \\ \hline 0 \quad \frac{10}{3}s + \frac{10}{3} & \\ \frac{10}{3}s + \frac{10}{3} & \\ \hline 0 & \end{array}$$



Il polinomio $s^2 - 3s + \frac{10}{3}$ ha discriminante $\Delta = 9 - 4\cdot\frac{10}{3} < 0$

e quindi le rimanenti 2 radici non sono reali

Se troviamo i k corrispondenti a queste due radici non reali troveremmo dei k non reali e quindi queste due radici non sono punti doppi

Tabella di Routh

$$(s^2+4s+4)\left(s+\frac{2}{3}\right)+k(s^2+1) = s^3+4s^2+4s+\frac{2}{3}s^2+\frac{8}{3}s+\frac{8}{3}+k(s^2+1)$$

$$= s^3+\left(k+\frac{14}{3}\right)s^2+\frac{20}{3}s+\left(k+\frac{8}{3}\right)=0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 20/3 \\
2 & k+\frac{14}{3} & k+\frac{8}{3} \\
1 & \dfrac{\frac{17}{3}k+\frac{256}{9}}{k+\frac{14}{3}} & \\
0 & k+\frac{8}{3} &
\end{array}$$

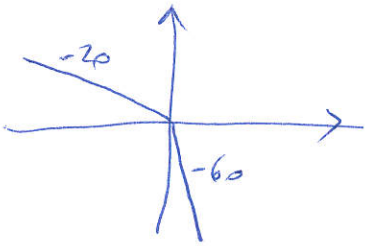
$$\frac{\frac{20}{3}\left(k+\frac{14}{3}\right)-\left(k+\frac{8}{3}\right)}{k+\frac{14}{3}} = \frac{\left(\frac{20}{3}-1\right)k+\left(\frac{280}{9}-\frac{8}{3}\right)}{k+\frac{14}{3}}$$

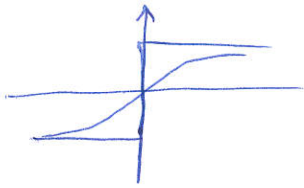
$$= \frac{\frac{17}{3}k+\frac{256}{9}}{k+\frac{14}{3}} =$$

Si vede che la riga 1 si annulla solo per k negativo e quindi non ci sono intersezioni dell'asse immaginario per $k \geq 0$

$\boxed{\text{ES.4}}$

1)





2) $G(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(-1+j\omega)^2} = \dfrac{(-1-j\omega)^2}{j\omega(1+\omega^2)^2} = \dfrac{1-\omega^2+2j\omega}{j\omega(1+\omega^2)^2}$

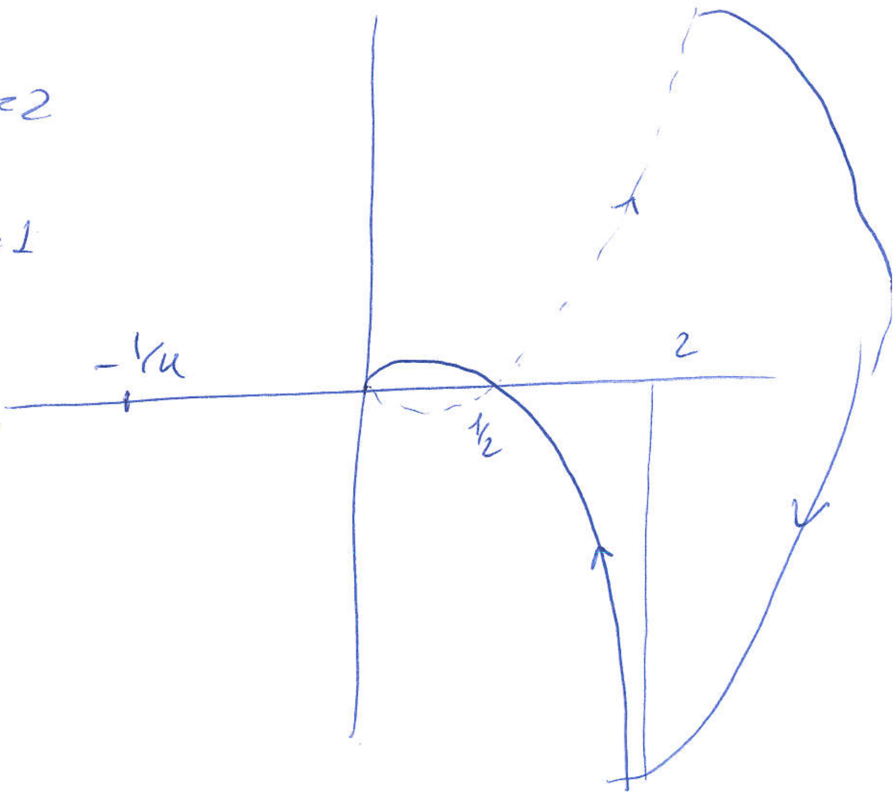
$\mathrm{Re}\, G(j\omega) = \dfrac{2}{(1+\omega^2)^2}$

$\mathrm{Im}\, G(j\omega) = \dfrac{\omega^2-1}{\omega(1+\omega^2)^2}$

ω	Re	Im
0^+	2	$-\infty$
1	1/2	0
$+\infty$	0^+	0^+

3) $P=2$ $\quad Z = P - N$

- $-\frac{1}{k} < 0 \ (k>0) \Rightarrow N=0 \Rightarrow Z=2$
- $0 < -\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \Rightarrow N=1 \Rightarrow Z=1$
- $-\frac{1}{k} > \frac{1}{2} \Rightarrow N=-1 \Rightarrow Z=2$



$-\frac{1}{k} < 0 \iff k>0$

$0 < -\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \iff k < -2$

$-\frac{1}{k} > \frac{1}{2} \iff -2 < k < 0$

ES. 5

$$G(s) = \frac{100}{(s+50)^2} = \frac{100}{50^2} \frac{1}{\left(1+\frac{s}{50}\right)^2}$$

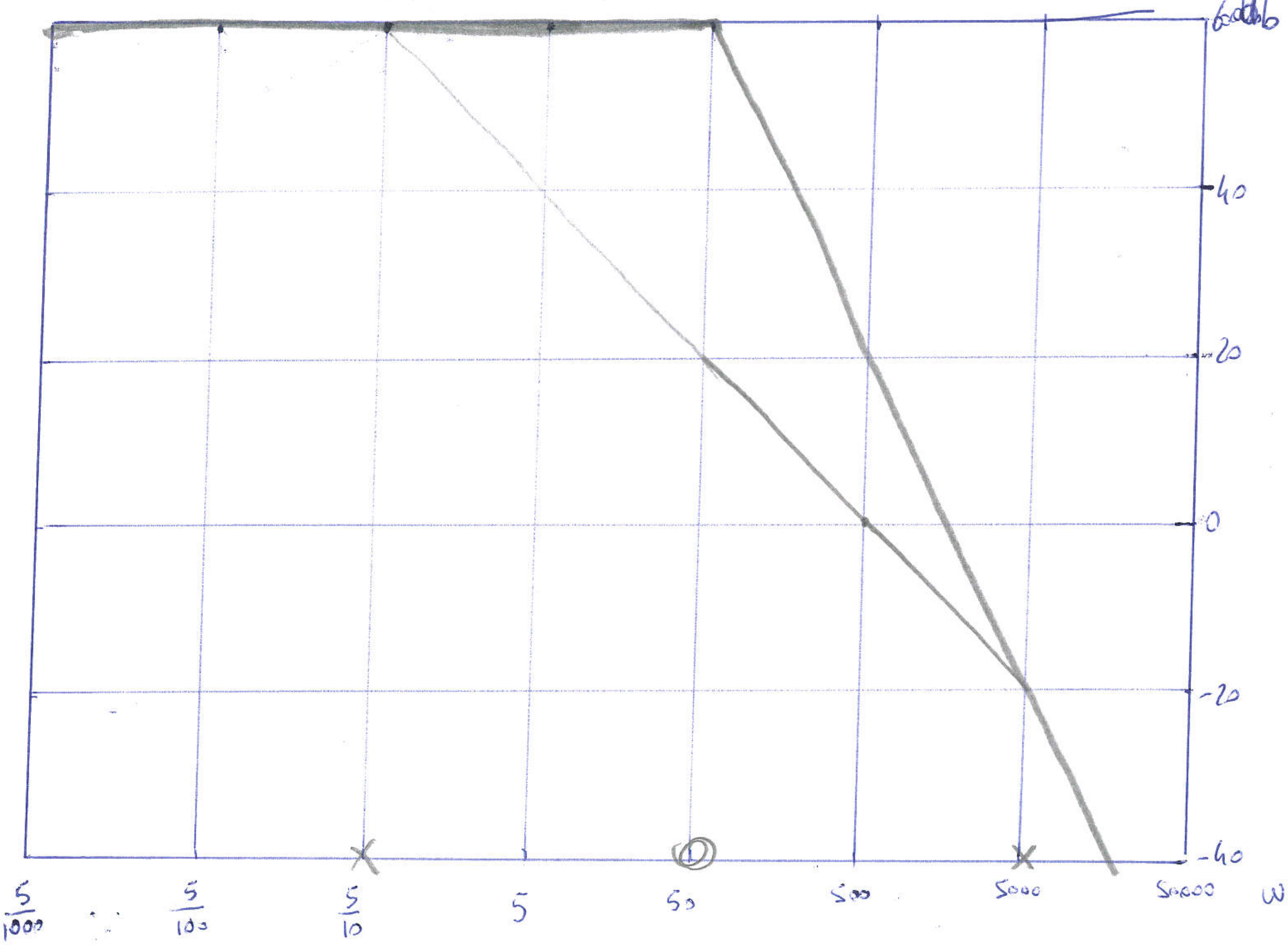
Per avere errore allo scalino al gradino $= 0{,}001 = \frac{1}{1000}$

dobbiamo avere guadagno di Bode complessivo

pari a $1000 - 1 = 999 \simeq 1000$ e non servono poli

nell'origine. Quindi

$$C(s) = \frac{1000\,\bar{C}}{100/50^2} = \frac{1000 \cdot 2500}{100}\bar{C} = 25000\,\bar{C}(s) \qquad \hat{W}(s) = \frac{1000}{\left(1+\frac{s}{50}\right)^2}$$



$$\bar{C}(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{50}\right)^2}{\left(1+s\,\frac{10}{5}\right)\left(1+s\,\frac{1}{5000}\right)}$$