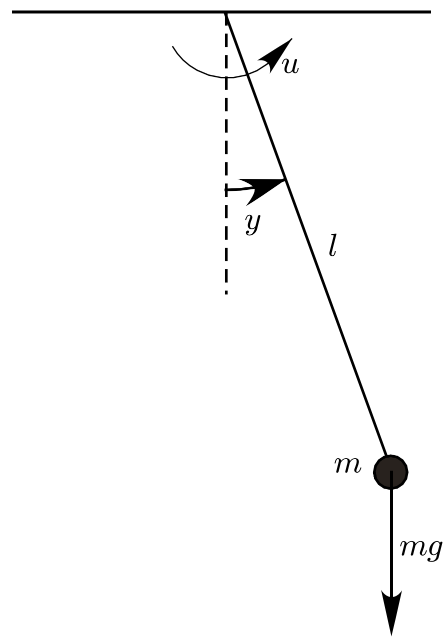
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 16/7/2019

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

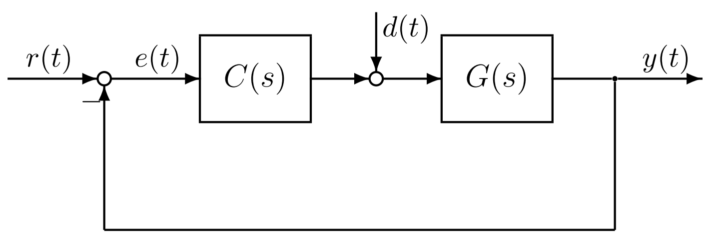
Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il sistema meccanico in figura. Si tratta di un pendolo sul quale agisce una coppia u, incernierato ad un perno sul quale ruota con costante di attrito viscoso rotazionale b. Sia y la posizione angolare, m la massa fissata all'estremita' del pendolo e l la sua lunghezza. Sia g la accelerazione di gravita'.



1. Determinare le equazioni del moto del pendolo.
2. Supponiamo ora di voler tenere bloccato il pendolo su una posizione angolare fissa $y(t) = \bar{y}$. Quale coppia $u(t) = \bar{u}$ deve essere applicata?
3. Sia ora $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$ e supponiamo che entrambi questi segnali siano piccoli. Determinare la funzione di trasferimento tra $\tilde{u}(t)$ e $\tilde{y}(t)$.
4. Per quali valori di $\bar{y}$ questa funzione di trasferimento e' BIBO stabile? Per quali valori di $\bar{y}$ la risposta al gradino ha sovraelongazione non nulla?

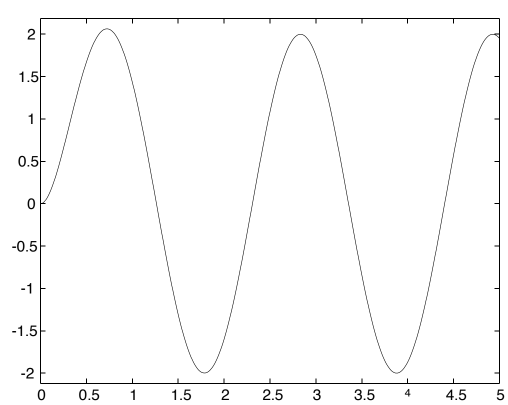
Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s+a}$$

1. Determinare a sapendo che $a > 0$ e che ponendo $K = 0$ e $d(t) = 10sin(3t)$ si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura



Supponiamo ora che a sia dato dal valore calcolato al punto precedente (altrimenti porre $a = 1$).

2. Determinare i valori di K che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa. Determinare la funzione di trasferimento $T(s)$ dall'ingresso r all'uscita y e la funzione sensibilita' di T rispetto alle variazioni del parametro a.

3. Supponiamo che $r(t) = \sin(t)$ e $d(t) = t$ (rampa). Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ in funzione di K.

Esercizio 3. Supponiamo ora che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + a}$$

1. Si determini a in modo che -1 sia punto doppio del luogo.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario).

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il modi puramente oscillatori (ne' convergenti, ne' divergenti). In corrispondenza a tale valore di K determinare i rimanenti modi del sistema.

4. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-t}. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{(s + 4)(s - 1)} .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).

3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{5}{(s + 1/2)^2}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini due compensatori $C_1(s)$ e $C_1(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino $\simeq 0.01$ per entrambi;

2. margine di fase circa uguale a 45^0 per $C_1(s)$ e circa uguale a 90^0 per $C_2(s)$;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 5$ per $C_1(s)$ e $\omega_A \simeq 0,5$ per $C_2(s)$

Esercizio 6 (Teorico) Spiegare i principi su cui si basa la sintesi di Bode (o sintesi in frequenza). Spiegare il problema che tale metodo intende risolvere e su quali argomenti si basa.

ES. 1

1) Equazioni del moto

$$-ml^2 y^{(2)} - b y^{(1)} - mgl \sin(y) + u = 0$$

2) $y(t) = \bar{y} \Rightarrow y^{(2)} = y^{(1)} = 0 \Rightarrow -ml \sin(\bar{y}) + \bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{u} = mgl \sin(\bar{y})$

3) $\sin(y) = \sin(\bar{y} + \tilde{y}) \simeq \sin(\bar{y}) + \cos(\bar{y})\tilde{y}$ Espansione di Taylor

Sostituendo nelle equazioni del moto

$$-ml^2 \tilde{y}^{(2)} - b\tilde{y}^{(1)} - mgl(\cancel{\sin(\bar{y})} + \cos(\bar{y})\tilde{y}) \cancel{+\bar{u}} + \tilde{u} = 0$$

$$-ml^2 \tilde{y}^{(2)} - b\tilde{y}^{(1)} - mgl \cos(\bar{y})\tilde{y} + \tilde{u} = 0$$

Passando alle trasformate di Laplace

$$\left[ml^2 s^2 + bs + mgl\cos(\bar{y})\right] \tilde{Y}(s) = \tilde{U}(s)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{ml^2 s^2 + bs + mgl\cos(\bar{y})} \tilde{U}(s)$$

4) Per la regola di Cartesio abbiamo BIBO stabilità se $ml^2 > 0$, $b > 0$ e $mgl\cos(\bar{y}) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \bar{y} < \frac{\pi}{2}$

Abbiamo sovraelongazione se i poli della funzione di trasferimento non sono reali e quindi se

$$\Delta = b^2 - 4(ml^2)mgl\cos(\bar{y}) < 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(\bar{y}) > \frac{b^2}{4m^2l^3g}$$

ES. 2

1) Dalla figura si nota che l'uscita $y(t)$ asintoticamente converge a un segnale sinusoidale di ampiezza 2. Quindi

$$10|G(j3)| = 2 \iff |G(j3)|^2 = \frac{1}{25} \iff \frac{1}{|j3+a|^2} = \frac{1}{25} \iff \frac{1}{a^2+9} = \frac{1}{25}$$

$$\iff 9 + a^2 = 25 \iff a = \pm 4 \Rightarrow a = 4 \text{ perché } a > 0$$

2) $T_{ry}(s) = \dfrac{k}{s(s+4)+k}$ È BIBO stabile $\iff k > 0$

$$S_a^{T_{ry}}(s) = \frac{a}{T_{ry}} \frac{\partial T_{ry}}{\partial a} = a \frac{\cancel{k}}{s^2+as+k}\left(\frac{-\cancel{k}s}{[s^2+as+k]^2}\right) = \frac{-as}{s^2+a s+k}$$

3) $T_{dy}(s) = \dfrac{s}{s(s+4)+k}$ $\quad T_{ry}(s) = \dfrac{k}{s(s+4)+k}$

$r(t) = \sin(t)$ e $d(t) = 0$

$$y(t) \simeq |T_{ry}(j)| \sin(t + \angle T_{ry}(j))$$

$$T_{ry}(j) = \frac{k}{k-1+4j} \Rightarrow |T_{ry}(j)| = \frac{k}{\sqrt{(k-1)^2+16}} \qquad \angle T_{ry}(j) = -\operatorname{artg}\left(\frac{4}{k-1}\right)$$

$r(t) = 0$ e $d(t) = t$

$$Y(s) = T_{dy}(s)\frac{1}{s^2} = \frac{s}{s(s+4)+k}\frac{1}{s^2} = \frac{A}{s} + (\text{Altri fratti})$$

$$A = Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{s(s+4)+k}\Big|_{s=0} = \frac{1}{k} \qquad y(t) \simeq \frac{1}{k} + (\text{termini} \to 0)$$

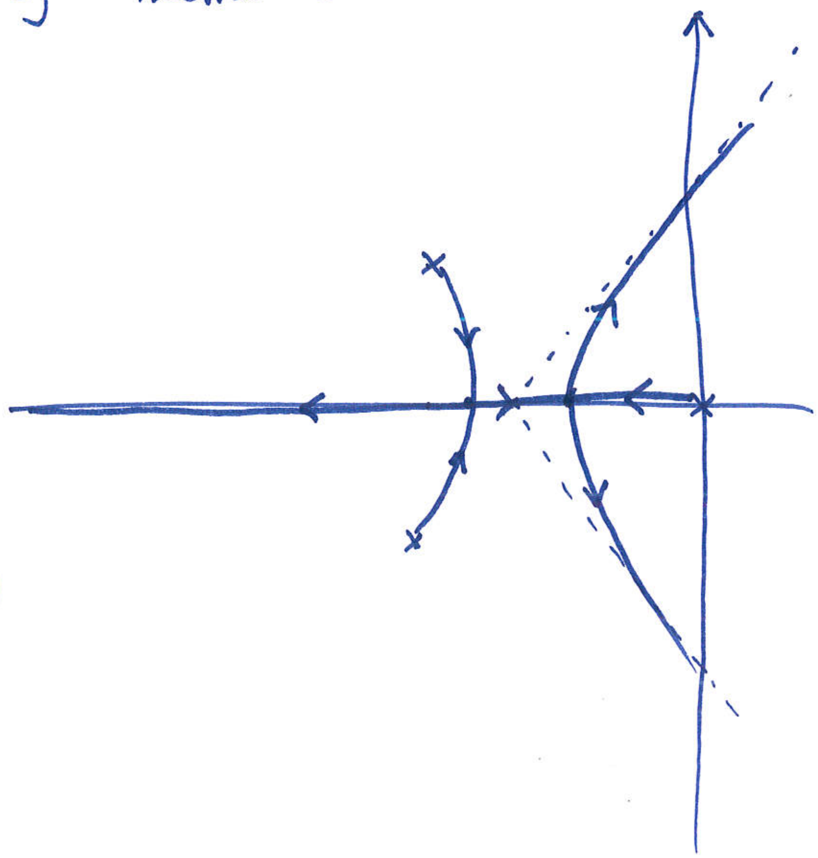
Quindi complessivamente

$$y(t) \simeq \frac{1}{k} + \frac{k}{\sqrt{(k-1)^2+16}} \sin\left(t - \operatorname{artg}\left(\frac{4}{k-1}\right)\right)$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$

1) $\begin{cases} s(s^2+4s+a)+k=0 \\ 3s^2+8s+a=0 \end{cases} \xrightarrow{s=-1} \begin{cases} -1+4-a+k=0 \\ 3-8+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=5 \end{cases}$

2) poli $p_1=0$ $\quad p_{2,3}=-2\pm j$ $\quad$ nessun zero



asintoti

$$\sigma_a = \frac{p_1+p_2+p_3}{3} = -\frac{4}{3}$$

punti doppi

$$\begin{cases} s(s^2+4s+5)+k=0 \\ 3s^2+8s+5=0 \end{cases}$$

$$s_{1,2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-15}}{3} = \begin{cases} -1 \ (k=2) \\ -\frac{5}{3} \ \left(k=\frac{50}{27}\right) \end{cases}$$

Intersezione asse immaginario

s^3+4s^2+5s+k

3	1	5
2	4	k
1	$\frac{20-k}{4}$	
0	k	

$k=20$ intersezione

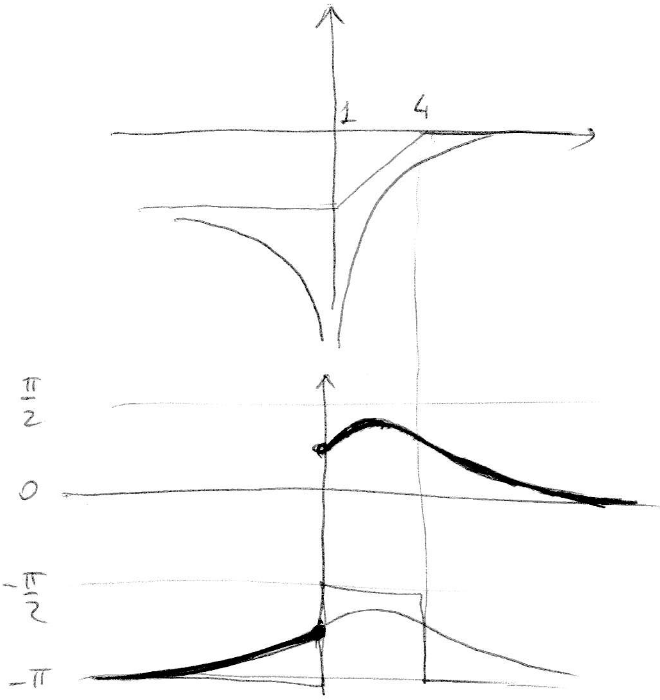
$4s^2+20=0 \Rightarrow s_{1,2}=\pm j\sqrt{5}$

3) Modi puramente oscillatori $\Rightarrow$ punti del luogo ~~con~~ puramente immaginari corrispondenti a $k=20$. Per tale k il polinomio è $s^3+4s^2+5s+20$ che è divisibile per s^2+5. La divisione dà $s+4$. I modi sono $\sin(\sqrt{5}t)$, $\cos(\sqrt{5}t)$, e^{-4t}

4) Il modo e^{-t} si ottiene per $k=2$ in corrispondenza del punto doppio in -1. Quindi $(s+1)^2$ divide il polinomio $s(s^2+4s+5)+2$ e il risultato della divisione è $s+2 \xrightarrow{\text{modi}} e^{-t}, te^{-t}, e^{-2t}$

ES. 4

1) $G(s) = -\frac{1}{4}\,\frac{1+s^2}{\left(1+\frac{s}{4}\right)(1-s)}$

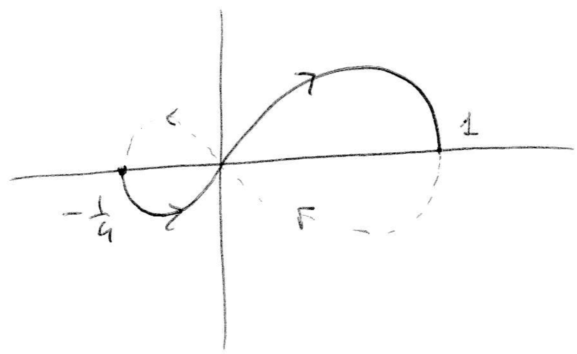


2) $G(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{(4+j\omega)(-1+j\omega)} = \frac{(1-\omega^2)(4-j\omega)(-1-j\omega)}{(16+\omega^2)(1+\omega^2)}$

$$Re\left(G(j\omega)\right) = \frac{(1-\omega^2)(-4-\omega^2)}{(16+\omega^2)(1+\omega^2)} = -\frac{(4+\omega^2)(1-\omega^2)}{(16+\omega^2)(1+\omega^2)}$$

$$Im\left(G(j\omega)\right) = \frac{(1-\omega^2)(-2\omega)}{(16+\omega^2)(1+\omega^2)} = -\frac{2\omega(1-\omega^2)}{(16+\omega^2)(1+\omega^2)}$$

ω	Re	Im
0	$-1/4$	0
1	0	0
$+\infty$	1	0



3) $P = 1 \qquad Z = P - N$

$k < -\frac{1}{4} \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 1 \quad (0 < k < 4)$

$-\frac{1}{4} < k < 0 \Rightarrow N = 1 \Rightarrow Z = 0 \quad (k > 4)$

$0 < k < 1 \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = 2 \quad (k < -1)$

$k > 1 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 1 \quad (-1 < k < 0)$

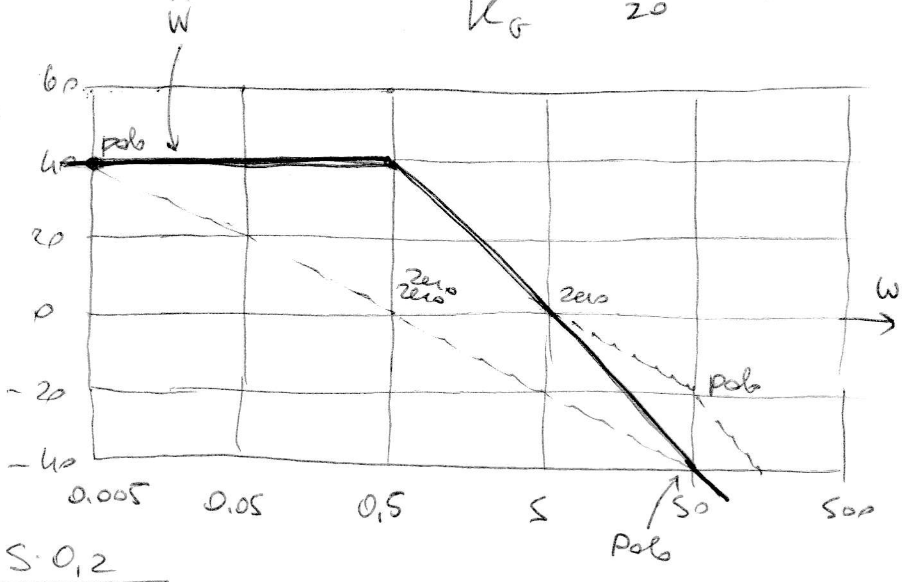
$\boxed{\text{ES. 5}}$

$G(s) = \frac{20}{(1+2s)^2}$ $\qquad k_G = 20 \qquad h_G = 0$

Vogliamo $h_W = 0$ e $k_W = 100 \Rightarrow h_C = h_W - h_G = 0 - 0 = 0$

$$k_C = \frac{k_W}{k_G} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\hat{W} = \frac{k_C}{s^{h_C}} G(s) = \frac{100}{(1+2s)^2}$$



$$\bar{C}_1(s) = \frac{1 + s/5}{1 + s/50} = \frac{1 + s \cdot 0,2}{1 + s \cdot 0,02}$$

$$\bar{C}_2(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{0,5}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{0,005}\right)\left(1 + \frac{s}{50}\right)} = \frac{(1+2s)^2}{(1+200s)(1+s \cdot 0,02)}$$

$C_1(s) = 5 \cdot \bar{C}_1(s) \qquad C_2(s) = 5 \cdot \bar{C}_2(s)$