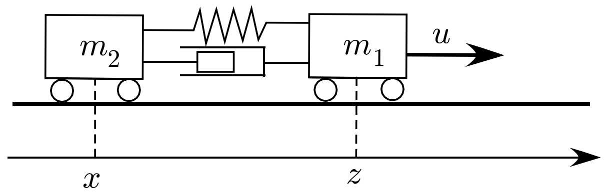
Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Si tratta di due carrelli di massa m_1 e m_2 di posizione z e x collegati tra loro tramite una molla e uno smorzatore. Sul secondo carrello agisce una forza esterna u. Supponiamo che la molla sia ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L e che lo smorzatore sia ideale con costante di attrito b. Definiamo $y(t) = z(t) - x(t)$.

1. Determinare le equazioni del moto.
2. Determinare l'evoluzione di equilibrio $x(t) = \bar{x}$, $z(t) = \bar{z}$ e $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso costante $u(t) = 0$.
3. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

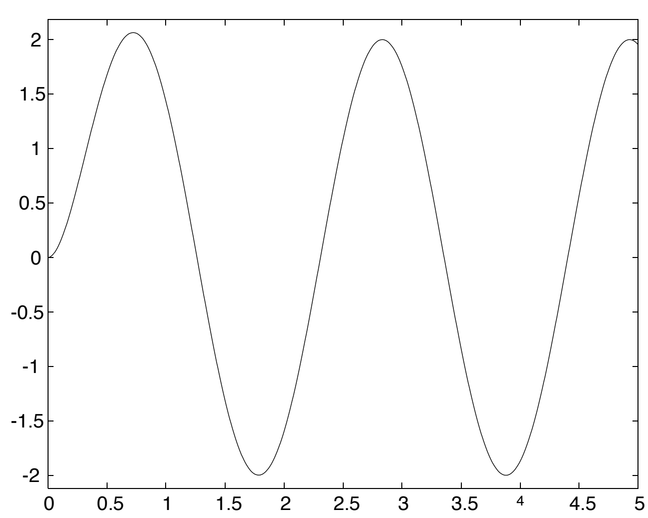
Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{(2)} + 2y^{(1)} + y(t) = u^{(1)}$$

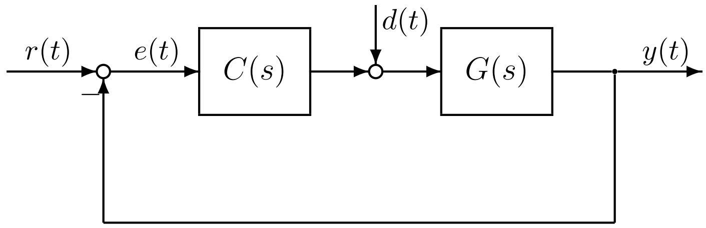
1. Determinare la funzione di trasferimento.
2. Determinare la risposta libera supponendo che le condizioni iniziali siano $y^{(1)}(0^-) = -1$ e $y(0^-) = 1$.
3. Determinare la risposta forzata supponendo che l'ingresso a gradino e' $u(t) = \delta^{(-1)}(t)$.
4. Si consideri ora la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+a}$$

con $a > 0$. Determinare a sapendo che applicando un ingresso $u(t) = 10sin(3t)$ si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura



Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s^2 - 4s + 13}{s(s+4)^2}$$

1. Verificare che $s = -1$ e' punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa e che si ottiene per $K = \frac{1}{2}$.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Determinare tutti i modi del sistema in corrispondenza al valore $K = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s}{s^2 + s + 1} \, .$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Supponendo che $C(s) = K$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa, al variare del parametro reale K (negativo e positivo).

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$$

Attraverso la sintesi di Bode (o sintesi in frequenza) si determini il compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta al gradino di circa $\simeq 0,001$;
2. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 500$;
3. margine di fase $m_\varphi \simeq 90^0$.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

1)

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{z} - b(\dot{z}-\dot{x}) - k(z-x-L) + u = 0 \\ -m_2 \ddot{x} - b(\dot{x}-\dot{z}) - k(x-z+L) = 0 \end{cases} \qquad y(t) = z(t) - x(t)$$

2) Equilibrio $x(t) = \bar{x}$ $\quad z(t) = \bar{z}$ $\quad y(t) = \bar{y}$

$$\begin{cases} k(\bar{z}-\bar{x}-L) = 0 \\ k(\bar{x}-\bar{z}+L) = 0 \\ \bar{y} = \bar{z} - \bar{x} \end{cases} \qquad \bar{y} = \bar{z} - \bar{x} = L$$

3) $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}$ $\quad \tilde{z}(t) = z(t) - \bar{z}$ $\quad \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}$

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{\tilde{z}} - b(\dot{\tilde{z}} - \dot{\tilde{x}}) - k(\tilde{z} + \cancel{\bar{z}} - \tilde{x} - \cancel{\bar{x}} - \cancel{L}) + u = 0 \\ -m_2 \ddot{\tilde{x}} - b(\dot{\tilde{x}} - \dot{\tilde{z}}) - k(\tilde{x} + \cancel{\bar{x}} - \tilde{z} - \cancel{\bar{z}} + \cancel{L}) = 0 \\ \tilde{y} + \bar{y} = \tilde{z} + \cancel{\bar{z}} - \tilde{x} - \cancel{\bar{x}} = \tilde{z} - \tilde{x} \end{cases}$$

Laplace trasformate $\quad Z(s) = \mathcal{L}[\tilde{z}]$ $\quad X(s) = \mathcal{L}[\tilde{x}]$ $\quad Y(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}]$

$$\begin{cases} -m_1 s^2 Z - b(sZ - sX) - k(Z - X) + U = 0 \\ -m_2 s^2 X - b(sX - sZ) - k(X - Z) = 0 \\ Y = Z - X \end{cases} \qquad Z = Y + X$$

$$\begin{cases} -m_1 s^2 (Y+X) - (bs+k)Y + U = 0 \\ -m_2 s^2 X + (bs+k)Y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (m_1 s^2 + bs + k)Y + m_1 s^2 X = U \\ X = \dfrac{bs+k}{m_2 s^2} Y \end{cases}$$

$$(m_1 s^2 + bs + k)Y + m_1 \cancel{s^2} \frac{bs+k}{m_2 \cancel{s^2}} Y = U$$

$$\left(m_1 s^2 + b\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)s + k\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\right) Y = U$$

funzione di trasferimento

$$Y(s) = \boxed{\frac{1}{m_1 s^2 + b(1 + m_1/m_2)s + k(1 + m_1/m_2)}} U(s$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$

1) Funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}$$

2) $\mathcal{L}[y^{(2)} + 2y^{(1)} + y] = \mathcal{L}[u^{(1)}]$

$\mathcal{L}[y^{(2)}] + 2\mathcal{L}[y^{(1)}] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[u^{(1)}]$ $\qquad \mathcal{L}[y] = Y(s)$, $\mathcal{L}[u] = U(s)$

$$s^2 Y(s) - s y(0^-) - y^{(1)}(0^-) + 2[sY(s) - y(0^-)] + Y(s) = s U(s)$$

$$\cancel{s^2Y(s)+} \ (s^2+2s+1)Y(s) = s y(0^-) + (y^{(1)}(0^-) + 2y(0^-)) + sU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s y(0^-) + (y^{(1)}(0^-) + 2y(0^-))}{s^2+2s+1}}_{\text{risposta libera } Y_e(s)} + \underbrace{\frac{s}{s^2+2s+1}\, U(s)}_{\text{risposta forzata } Y_f(s)}$$

$$Y_e(s) = \frac{s+(-1+2)}{s^2+2s+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_e(t) = e^{-t}$$

3) $U(s) = \mathcal{L}[\delta^{(-1)}(t)] = \frac{1}{s}$

$$Y_f(s) = \frac{s}{s^2+2s+1}\,\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_f(t) = t e^{-t}$$

4) Ampiezza a regime dell'uscita è 2. Quindi

$$2 = |G(j3)|\,10 \Rightarrow |G(j3)| = \frac{1}{5} \Rightarrow |G(j3)|^2 = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{9+a^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow 25 = 9 + a^2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

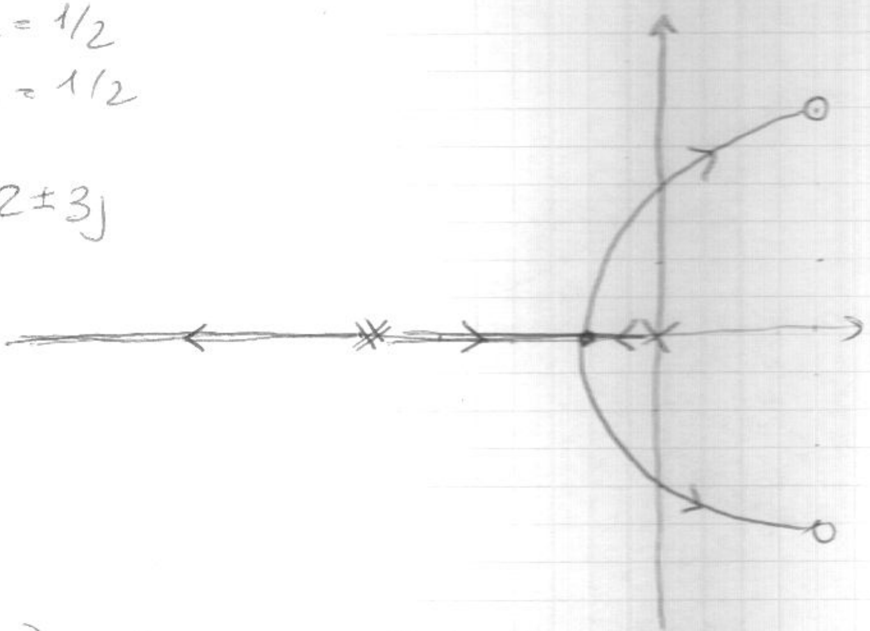
$\boxed{\text{ES. 3}}$

$s(s+4)^2 + k(s^2-4s+13) = 0$

1) $\begin{cases} s(s+4)^2 + k(s^2-4s+13) = 0 \\ (s+4)^2 + s\,2(s+4) + k(2s-4) = 0 \end{cases} \xrightarrow{s=-1} \begin{cases} -1\cdot 3^2 + k(1+4+13) = 0 \\ 3^2 + (-1)2\cdot 3 + k(-2-4) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -9 + k\cdot 18 = 0 & k = 1/2 \\ 9 - 6 + k(-6) = 0 & k = 1/2 \end{cases}$

2) radici di $s^2+4s+13$ sono $2 \pm 3j$



Abbiamo un solo [illegible] lungo l'asse reale

Intersezioni asse immaginario

$s(s+4)^2 + k(s^2-4s+13) =$

$= s^3 + (8+k)s^2 + (16-4k)s + 13k$

3	1	$16-4k$
2	$k+8$	$13k$
1	$\frac{-4k^2-29k+128}{k+8}$	
0	$13k$	

La riga 1 si annulla quando

$4k^2 + 29k - 128 = 0$ $\quad \underbrace{\begin{matrix} k_1 = 3,1 \\ k_2 = -10,34 \end{matrix}}_{\text{luogo negativo}}$

Per $k = 3,1$ la riga 2 diventa $\boxed{11,1 \quad 40,3}$

da cui deriva il polinomio $11,1\, s^2 + 40,3 = 0$ che ha radici $s_{1,2} = \pm j\, 1,9$ che sono le intersezioni asse immaginario

3) Per $k = 1/2$ abbiamo il punto doppio in $s = -1$ e quindi i modi e^{-t}, te^{-t}

Per trovare l'ultimo modo effettuo la divisione

$$\begin{array}{l|l} s^3 + \frac{17}{2}s^2 + 14s + \frac{13}{2} & s^2+2s+1 \\ \hline s^3 + 2s^2 + s & s + \frac{13}{2} \\ \hline \frac{13}{2}s^2 + 13s + \frac{13}{2} & \\ \frac{13}{2}s^2 + 13s + \frac{13}{2} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

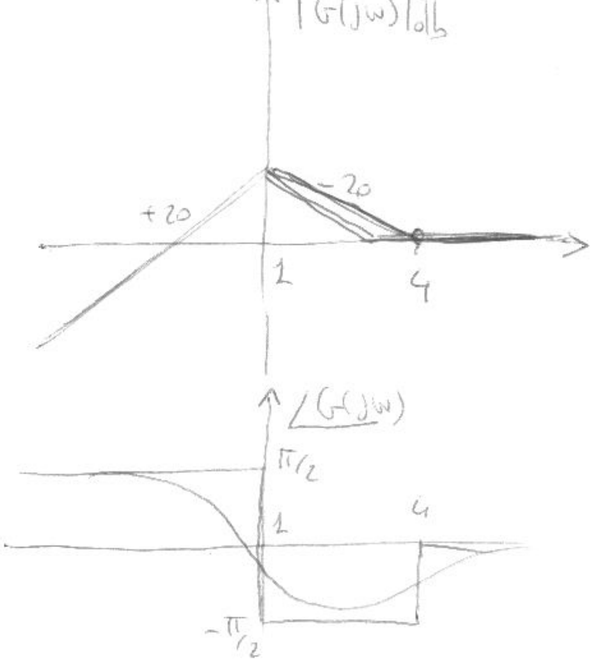
$e^{-\frac{13}{2}t}$

ES. 4

1) $G(s) = \frac{s(s+4)}{s^2+s+1} = 4\,\frac{(1+s/4)\,s}{1+s+s^2}$

$T = \frac{1}{4} \qquad \left|\frac{1}{T}\right| = 4$

$\omega_n = 1$



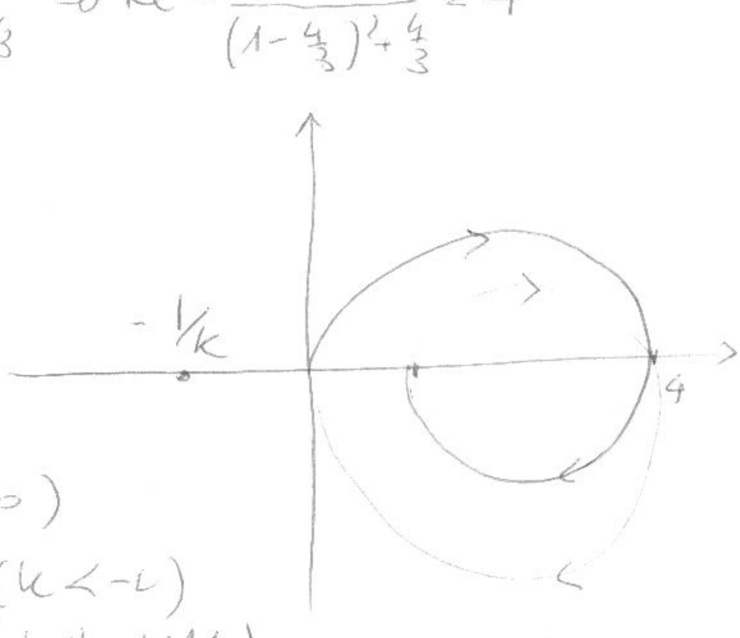
2) $G(j\omega) = \frac{j\omega(4+j\omega)}{(1-\omega^2)+j\omega} = \frac{j\omega(4+j\omega)[(1-\omega^2)-j\omega]}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}$

$= \frac{j\omega[(4-4\omega^2+\omega^2)+j\omega(1-\omega^2-4)]}{(1-\omega^2)^2+\omega^2}$

$Re = \frac{\omega^2(\omega^2+3)}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} > 0$

$Im = \frac{\omega(4-3\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+\omega^2} \qquad \begin{matrix} Im = 0 \\ \omega = \sqrt{4/3} \end{matrix} \Rightarrow Re = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}+3\right)}{\left(1-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{4}{3}} = 4$

ω	Re	Im
0	0	0
$\sqrt{4/3}$	4	0
∞	1	0



3) $P = 0 \qquad Z = P - N = -N$

$-\frac{1}{k} < 0 \quad N = 0 \quad Z = 0 \quad (k > 0)$

$0 < -1/k < 1 \quad N = -1 \quad Z = 1 \quad (k < -1)$

$1 < -\frac{1}{k} < 4 \quad N = -2 \quad Z = 2 \quad (-1 < k < -1/4)$

$1/k > 4 \quad N = 0 \quad Z = 0 \quad (-\frac{1}{4} < k < 0)$

ES. 5

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)^2} = \frac{1/25}{(1+s/5)^2} \qquad h_G = 0 \quad K_G = \frac{1}{25}$$

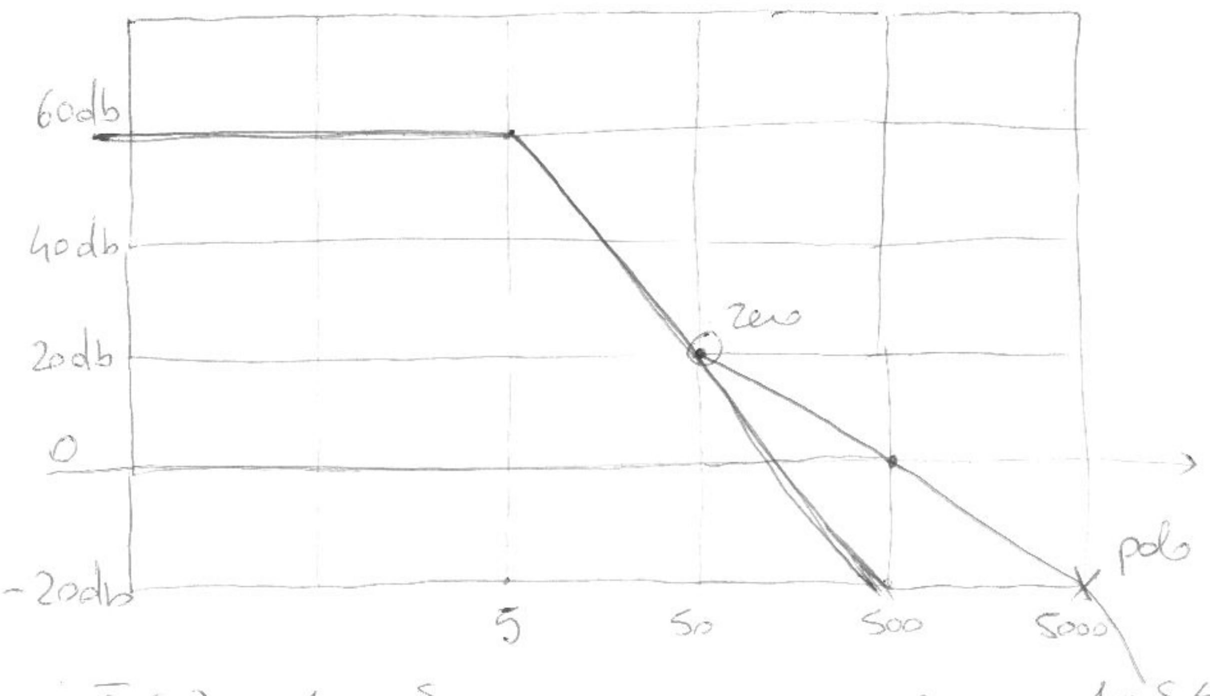
$$h_W = 0 \qquad k_W = \frac{1}{0{,}001} - 1 = 1000 - 1 = 999 \simeq 1000$$

$$h_C = h_W - h_G = 0 - 0 = 0 \qquad K_C = \frac{k_W}{k_G} = \frac{1000}{1/25} = 25000$$

$$\hat{W}(s) = \frac{K_C}{s^{h_C}} G(s) = 25000 \frac{1/25}{\left(1+\frac{s}{5}\right)^2} = \frac{1000}{\left(1+\frac{s}{5}\right)^2}$$

$$T = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{T} = 5$$



$$\bar{C}(s) = \frac{1+\frac{s}{50}}{1+\frac{s}{5000}} \qquad C(s) = 25000 \frac{1+s/50}{1+s/5000}$$