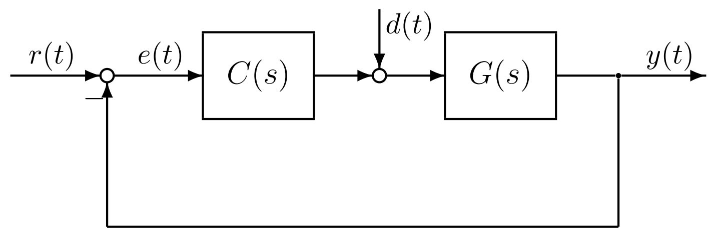
Corso di laurea in Ingegneria Informatica- II Compitino di Fondamenti di Controlli Automatici - 8/5/2017

Cognome e nome: ____________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

**Esercizio 1.** Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.




Si supponga che

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+a}$$

con $K \geq 0$.

1. Sia $T(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$. Determinare i valori di $K$ e $a$ che rendono BIBO stabile $T(s)$.
2. Determinare la funzione sensibilita' di $T(s)$ rispetto alle variazioni del parametro $a$.
3. Supponiamo che $a$ abbia valore nominale pari a 1 e che questo valore sia noto con una precisione del 10%. Determinare i valori di $K$ tali da assicurare che il guadagno in continua tra $r(t)$ e $y(t)$ sia fissato a meno di un errore pari al 1%.

**Esercizio 2.** Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente dove

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+b}{(s+4)(s-3)}$$

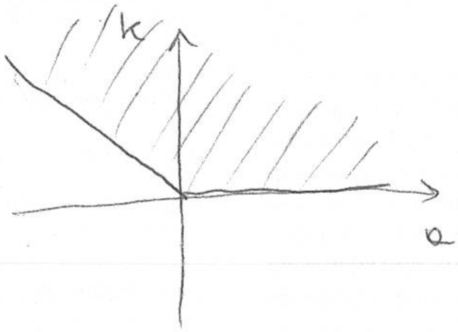
1. Si determini $b$ sapendo che $s = 1$ e' punto doppio del luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K \geq 0$.
2. Si supponga che $b$ coincida col valore calcolato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K \geq 0$. Si determinino eventuali asintoti, punti doppi e intersezioni con l'asse immaginario.
3. Si trovino i valori di $K \geq 0$ per cui i modi del sistema in catena chiusa sono tutti non oscillatori.

4. Determinare il valore di $K$ tale che il sistema in catena chiusa contiene modi puramente oscillatori. Determinare tutti i modi del sistema in corrispondenza a questo valore di $K$.
5. Determinare il valore di $K$ tale che il sistema in catena chiusa contiene il modo $e^t$. Determinare tutti i modi del sistema in corrispondenza a questo valore di $K$.
6. Determinare il valore di $K$ tale che il sistema in catena chiusa contiene il modo $e^{-2t}$. Determinare tutti i modi del sistema in corrispondenza a questo valore di $K$.

ES. 1

1) $T_{zy}(s) = \dfrac{k(s+1)}{s^2+(k+1)s+k+a} \qquad k>0$

Per regola di Cartesio abbiamo stabilità $\Leftrightarrow \begin{cases} k>-1 \\ k+a>0 \end{cases}$ vale



2) $S_a^T = \dfrac{a}{T(s)}\dfrac{\partial T}{\partial a} = a\,\dfrac{\cancel{s^2+(k+1)s+k+a}}{k\cancel{(s+1)}}\;\dfrac{-\cancel{k(s+1)}}{[s^2+(k+1)s+k+a]^{\cancel{2}}}$

$= \dfrac{-a}{s^2+(k+1)s+k+a}$

3) $a=1$ valore nominale

$s=0$ guadagno in continua

$\dfrac{\Delta T}{T} \simeq S_a^T \dfrac{\Delta a}{a}$

$\left|\dfrac{\Delta T}{T}\right| \le \dfrac{1}{100}$ con $\left|\dfrac{\Delta a}{a}\right| = \dfrac{10}{100}$

$\left|S_a^T \dfrac{\Delta a}{a}\right| \le \dfrac{1}{100} \Rightarrow \left|S_a^T\right| \le \dfrac{1}{10}$

$\|$

$\left|S_a^T\right| \dfrac{10}{100}$

$S_a^T\Big|_{\substack{a=1\\ s=0}} = \dfrac{-1}{k+1} \Rightarrow \left|\dfrac{-1}{k+1}\right| \le \dfrac{1}{10} \qquad |k+1| \ge 10$

$k \le -11$ o $k \ge 9$ $\Rightarrow$ per stabilità $\Rightarrow k \ge 9$

# ES. 2

Luogo del polinomio $\overbrace{s(s-3)(s+4)}^{s^3+s^2-12s}+k(s+b)=0$

Punti doppi

$$\begin{cases} s^3+s^2-12s+k(s+b)=0 \\ 3s^2+2s-12+k=0 \end{cases} \xrightarrow{s=1} \begin{cases} -10+k+kb=0 \\ -7+k=0 \end{cases} \begin{cases} -3+7b=0 \\ k=7 \end{cases} \begin{cases} b=3/7 \\ k=7 \end{cases}$$

Eventuali altri punti doppi

$$\begin{cases} s^3+s^2-12s+k\left(s+\frac{3}{7}\right)=0 \\ 3s^2+2s-12+k=0 \end{cases} \qquad k=-3s^2-2s+12$$

$$s^3+s^2-12s+(-3s^2-2s+12)\left(s+\frac{3}{7}\right)=0$$

$$s^3+s^2-\cancel{12s}-3s^3-2s^2+\cancel{12s}-\frac{9}{7}s^2-\frac{6}{7}s+\frac{36}{7}=0$$

$$-2s^3-\frac{16}{7}s^2-\frac{6}{7}s+\frac{36}{7}=0$$ questo polinomio è divisibile per $s-1$

$$\begin{array}{l|l} 2s^3+\frac{16}{7}s^2+\frac{6}{7}s-\frac{36}{7} & s-1 \\ \hline 2s^3-2s^2 & 2s^2+\frac{30}{7}s+\frac{36}{7} \\ \hline \quad \frac{30}{7}s^2+\frac{6}{7}s-\frac{36}{7} & \\ \quad \frac{30}{7}s^2-\frac{30}{7}s & \\ \hline \qquad \frac{36}{7}s-\frac{36}{7} & \\ \qquad \frac{36}{7}s-\frac{36}{7} & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

$\hookrightarrow$ questo polinomio di II grado ha discriminante

$$\Delta=\frac{900}{49}-4\cdot 2\cdot\frac{36}{7}=-\frac{2016}{49}<0$$

Le rimanenti 2 radici non sono reali e quindi non corrispondono a punti doppi

Asintoti

$$\sigma_0=\frac{0+3-4-\left(-\frac{3}{7}\right)}{2}=-\frac{4}{14}=-\frac{2}{7}$$

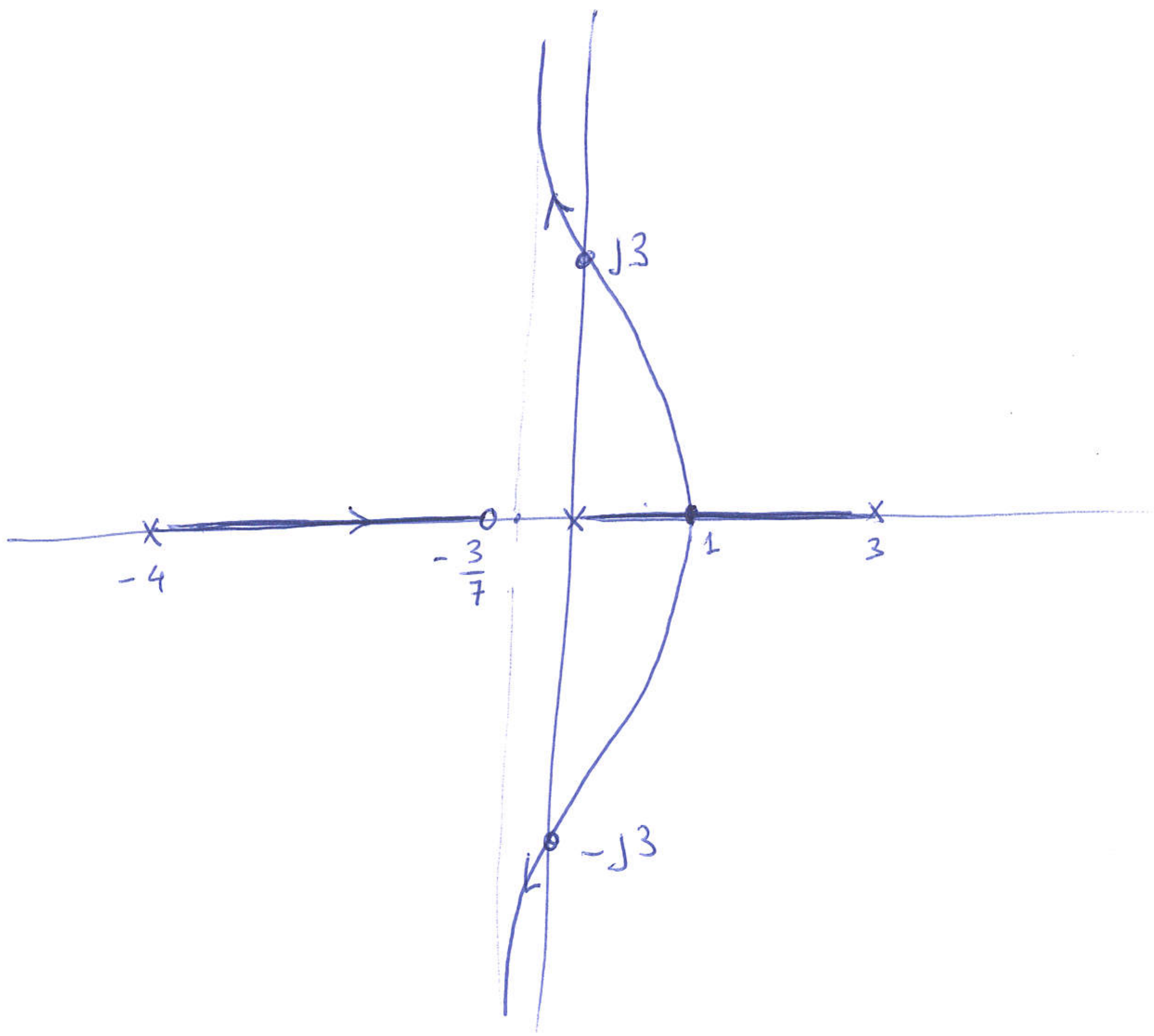
Intersezione asse immaginario

$$s^3 + s^2 + (k-12)s + k\frac{3}{7} = 0$$

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & k-12 \\
2 & 1 & k\frac{3}{7} \\
1 & \frac{4}{7}k-12 & \\
0 & k\frac{3}{7} &
\end{array}$$

$k = \frac{7}{4}12 = 21$ Intersezioni coincidono con le radici di $s^2 + k\frac{3}{7} = 0$

$s^2 + 9 = 0$ $s_{12} = \pm j3$




3) $0 \le k \le 7$

4) $k = 21$

$$\begin{array}{r|l}
s^3 + s^2 + 9s + 9 & s^2 + 9 \\
\hline
s^3 \quad + 9s & s + 1 \\
\hline
s^2 \quad + 9 & \\
s^2 \quad + 9 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Modi sono

$\cos(3t)$

$\sin(3t)$

$e^{-t}$

5) $k=7$

$$\begin{array}{r|l} s^3+s^2-5s+3 & s^2-2s+1 = (s-1)^2 \\ \hline s^3-2s^2+s & s+3 \\ \hline 3s^2-6s+3 & \end{array}$$

modi $e^{t}, te^{t}, e^{-3t}$

6) $s^3+s^2+(k-12)s+k\frac{3}{7} = (s=-2) = -8+4-2k+24+\frac{3}{7}k=0$

$20-\frac{11}{7}k=0 \qquad k=20\cdot\frac{7}{11}=\frac{140}{11} \qquad k=\frac{140}{11}$

$$s^3+s^2+\left(\frac{140}{11}-12\right)s+\frac{140}{11}\frac{3}{7} = s^3+s^2+\frac{8}{11}s+\frac{60}{11}$$

$$\begin{array}{r|l} s^3+s^2+\frac{8}{11}s+\frac{60}{11} & s+2 \\ \hline s^3+2s^2 & s^2-s+\frac{30}{11} \\ \hline -s^2+\frac{8}{11}s+\frac{60}{11} & \\ -s^2-2s & \\ \hline \frac{30}{11}s+\frac{60}{11} & \\ \frac{30}{11}s+\frac{60}{11} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$s_{12} = \frac{1\pm\sqrt{1-\frac{120}{11}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{109}{11}}$$

$$= \frac{1}{2}\pm j\sqrt{\frac{109}{44}}$$

modi $e^{-2t}, e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\sqrt{\frac{109}{44}}t\right), e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\sqrt{\frac{109}{44}}t\right)$