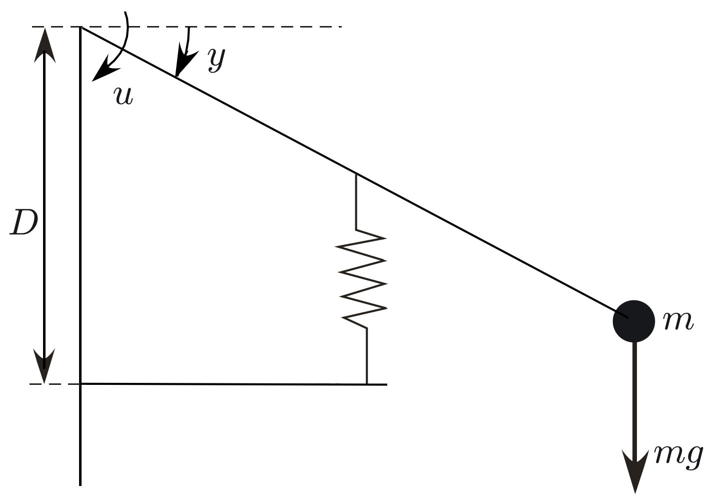
Corso di laurea in Ingegneria Informatica - Appello di Fondamenti di Controlli Automatici del 5/6/2018

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Per l'appello : tutto
Per terzo compitino : Esercizi 4, 5.
Per il primo appello 3 ore. Per il terzo compitino 1 ora e 10 minuti.

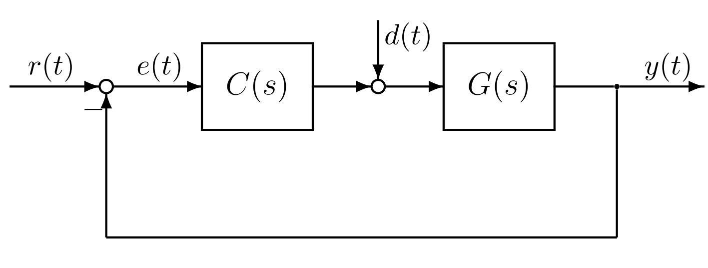
Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico



Si tratta di pendolo di lunghezza l con massa m concentrata alla sua estremita' incernierato a distanza D dal pavimento e collegato al pavimento con una molla a distanza $l/2$ dall'estremita' in modo che resti verticale. Supponiamo che la molla sia ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo nulla. Supponiamo che al pendolo sia applicata una coppia di ingresso u e che l'uscita sia l'angolo y.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Supponiamo che $u(t) = 0$. Determinare D tale che $y(t) = \bar{y} = 45^0$ sia evoluzione di equilibrio.
3. Sia $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$. Determinare la funzioni di trasferimento del sistema dall' ingresso $u(t)$ all'uscita $\tilde{y}(t)$ supponendo che $\tilde{y}(t), u(t)$ siano piccoli.

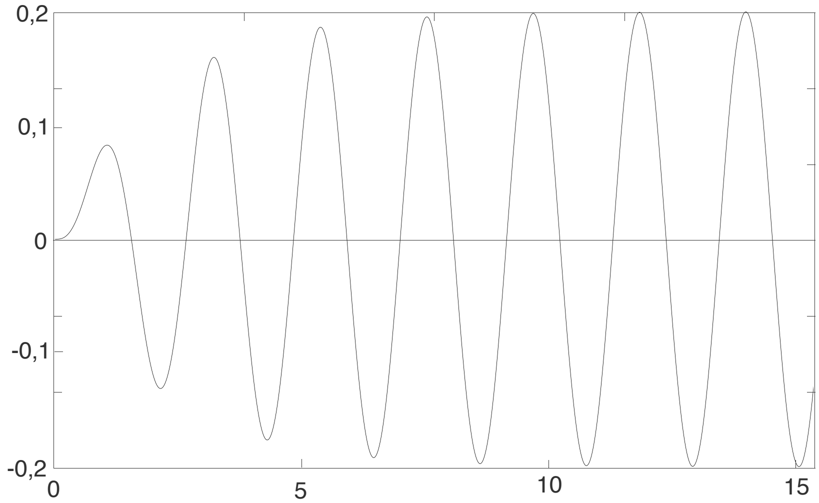
Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + a}$$

1. Determinare i valori di K e a che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.
2. Determinare $a \geq 0$ sapendo che con $K = 0$, se $d(t) = \sin(2t)$ e si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura.



3. Supponiamo ora che $a = 9$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ sapendo che $r(t) = 4\sin(3t)$ (gradino) e $d(t) = t$ (rampa).

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s-3}{(s+6)(s^2-s+a)}$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che 0 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni dell'asse immaginario).
3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale la risposta impulsiva in catena chiusa contiene tutti modi non oscillatori.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

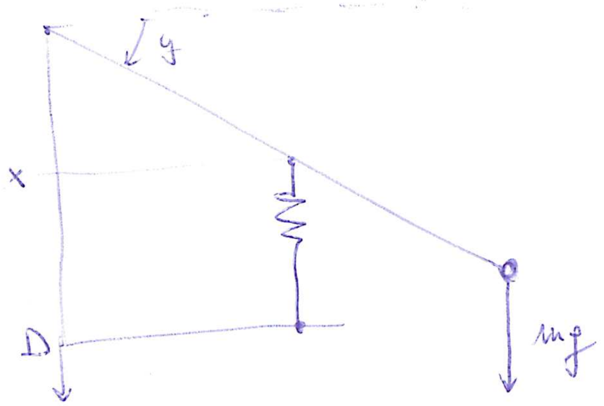
$$C(s) = K, \qquad G(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2(2s+1)}.$$

1. Determinare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Determinare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (calcolare eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e l'asse immaginario).
3. Tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili poli in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove $G(s) = \frac{5}{s+1}$. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:
1. errore a regime in risposta alla rampa circa uguale a $0,1$;
2. margine di fase circa $m_\phi \simeq 90^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 100$.

Esercizio 6 (Teorico) Spiegare il concetto di poli dominanti e il loro ruolo nell'analisi del transitorio nalla risposta al gradino di un sistema.

$\boxed{\text{ES. 1}}$



$x = \frac{l}{2} \sin y$

Equazioni del moto

$$-J\ddot{y} - k(x - D + L)\frac{l}{2}\cos y$$
$$+ mgl\cos y + u = 0$$

Equilibrio $\quad y(t) = \bar{y} = 45° \qquad u(t) = 0$

$$-k\left(\frac{l}{2}\sin 45° - D + L\right)\frac{l}{2}\cos 45° + mgl\cos 45° = 0$$
$$-k\left(\frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - D + L\right)\frac{l}{2}\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} + mgl\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$$
$$k\left(\frac{\sqrt{2}}{4}l - D + L\right) = 2mg \Rightarrow D = \frac{\sqrt{2}}{4}l + L - \frac{2mg}{k}$$

Cambio variabili $\quad y(t) = 45° + \tilde{y}(t) \qquad \ddot{y} = \ddot{\tilde{y}}$

Taylor

$$\sin y = \sin(\bar{y} + \tilde{y}) \simeq \sin\bar{y} + \cos(\bar{y})\tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$$
$$\cos y = \cos(\bar{y} + \tilde{y}) \simeq \cos\bar{y} - \sin(\bar{y})\tilde{y} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}$$

Sostituendo

$$-J\ddot{\tilde{y}} - k\left(\left(\frac{l}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right)\right) - D + L\right)\frac{l}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) + mgl\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) + u = 0$$

Le costanti si semplificano

$$-J\ddot{\tilde{y}} - k\left(\frac{\sqrt{2}}{4}l + \frac{\sqrt{2}}{4}l\tilde{y} - D + L\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}l - \frac{\sqrt{2}}{4}l\tilde{y}\right) + mgl\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}\right) + u = 0$$

$$-J\ddot{\tilde{y}} \cancel{- k\left(\frac{\sqrt{2}}{4}l - D + L\right)\frac{\sqrt{2}}{4}l} - k\frac{\sqrt{2}}{4}l\tilde{y}\frac{\sqrt{2}}{4}l + k\left(\frac{\sqrt{2}}{4}l - D + L\right)\frac{\sqrt{2}}{4}l\tilde{y}$$
$$+ k\frac{\sqrt{2}}{4}l\tilde{y}\frac{\sqrt{2}}{4}l\tilde{y} + \cancel{mgl\frac{\sqrt{2}}{2}} - mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y} + u$$

↳ trascurabile perché dell'ordine di $\tilde{y}^2$

$$-J\ddot{\tilde{y}} - \frac{k\ell^2}{8}\tilde{y} + k\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell - D + L\right)\frac{\sqrt{2}}{4}\ell\tilde{y} - mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y} + u = 0$$

Noto che dalle equazioni di equilibrio si ha che

$$k\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\ell - D + L\right) = 2mg \quad \text{e quindi}$$

$$-J\ddot{\tilde{y}} - \frac{k\ell^2}{8}\tilde{y} + \cancel{2mg\frac{\sqrt{2}}{4}\ell\tilde{y}} - \cancel{mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\tilde{y}} + u = 0$$

$$\left(Js^2 + \frac{k\ell^2}{8}\right)\tilde{Y}(s) = U(s)$$

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2 + \frac{k\ell^2}{8}}$$

$\boxed{ES\ 2}$

1) $s(s^2+2s+a)+k$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & k \\ 1 & \frac{2a-k}{2} & \\ 0 & k & \end{array} \qquad 0<k<2a$$

2) Dalla figura si nota che l'uscita asintoticamente converge a una sinusoide di ampiezza $0{,}2 = \frac{1}{5}$

$$|G(j2)| = \frac{1}{5} \qquad \left|\frac{1}{(j2)^2+2(j2)+a}\right| = \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{|(a-4)+4j|} = \frac{1}{5}$$

$$|(a-4)+4j| = 5 \qquad (a-4)^2+4^2 = 25 \qquad a-4 = \sqrt{25-16} = \pm 3 \qquad a = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

3) $T_{zy}(s) = \dfrac{k}{s(s^2+2s+9)+k}$ $\qquad T_{dy}(s) = \dfrac{s}{s(s^2+2s+9)+k}$

$z(t) = 4\sin(3t)$
$d(t) = 0$

$y(t) \simeq |T_{zy}(3j)| \sin(3t + \angle T_{zy}(3j))$ $\qquad$ Per stabilità ottima $0<k<18$

$$T_{zy}(3j) = \frac{k}{3j(\cancel{-9}+6j+\cancel{9})+k} = \frac{k}{k-18}$$

Quindi $\quad |T_{zy}(3j)| = \dfrac{k}{18-k} \qquad \angle T_{zy}(3j) = \pi$

$$y(t) \simeq \frac{k}{18-k}\sin(3t+\pi) = -\frac{k}{18-k}\sin(3t) = \frac{k}{k-18}\sin(3t)$$

$z(t) = 0$
$d(t) = t$ $\qquad D(s) = \dfrac{1}{s^2} \qquad Y(s) = T_{dy}(s)\dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s}{s(s^2+2s+9)+k}\dfrac{1}{s^2}$

$$y(t) \simeq Y(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{s(s^2+2s+9)+k}\Big|_{s=0} = \frac{1}{k}$$

Sommando i due contributi

$$y(t) \simeq \frac{k}{k-18}\sin(3t) + \frac{1}{k} \qquad \text{per} \quad 0<k<18$$

ES 3

1) $\begin{cases} (s+6)(s^2-s+a)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+a+(s+6)(2s-1)+k=0 \end{cases} \xrightarrow{s=0} \begin{cases} 6a-3k=0 \\ a-6+k=0 \end{cases}$ $\quad a=2 \quad k=4$

2) Altri punti doppi

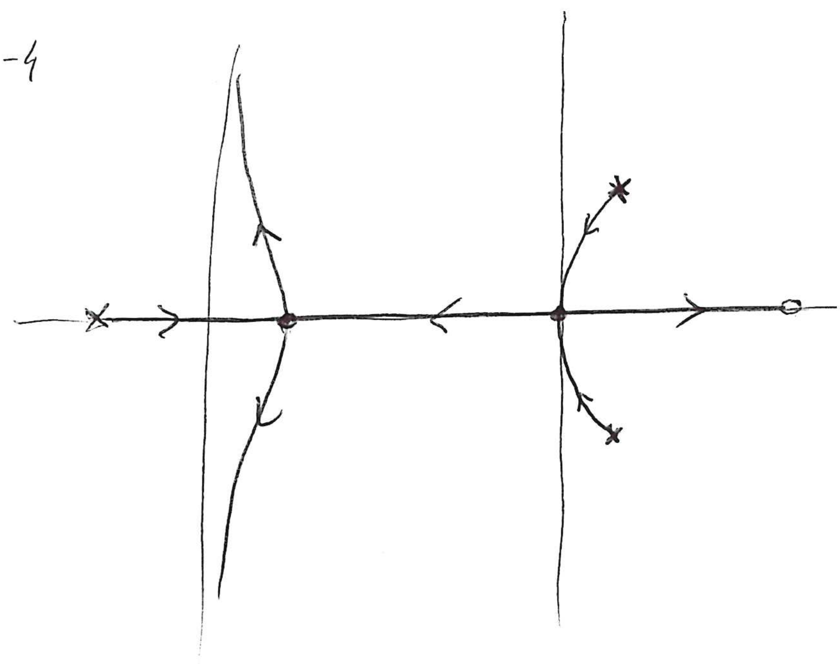
$\begin{cases} (s+6)(s^2-s+2)+k(s-3)=0 \\ s^2-s+2+(s+6)(2s-1)+k=0 \end{cases}$ $\qquad k=-3s^2-10s+4$

$s^3-s^2+2s+6s^2-6s+\cancel{12}-3s^3-10s^2+4s+9s^2+30s-\cancel{12}=0$

$2s^3-4s^2-30s=0 \qquad s_1=0 \qquad s_{2,3}=1\pm\sqrt{16} \begin{cases} -3 & k=7 \\ 5 & k=-121 \end{cases}$

Asintoti

$$\sigma_a=\frac{1/2+j\sqrt{7}/2+1/2-j\sqrt{7}/2-6-3}{2}=-4$$



Intersezione asse immaginario

$s^3+5s^2+(k-4)s+(12-3k)=0$

3	1	$k-4$
2	5	$12-3k$
1	$\frac{8k-32}{5}$	
0	$12-3k$	

Per $k=4$ si annulla la riga 1 e il polinomio

$5s^2+(12-3k)=0$

$5s^2=0 \Rightarrow$ intersezione ovvia per $s=0$

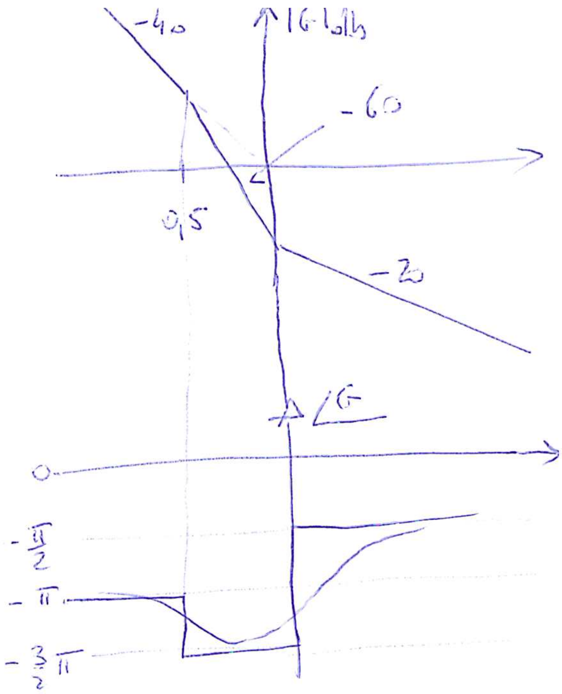
3) $4\le k\le 7$

ES. 4

1) $G(s)$ è già in forma di Bode

Punti di spezzamento

$\omega_n = 1 \qquad \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0,5$



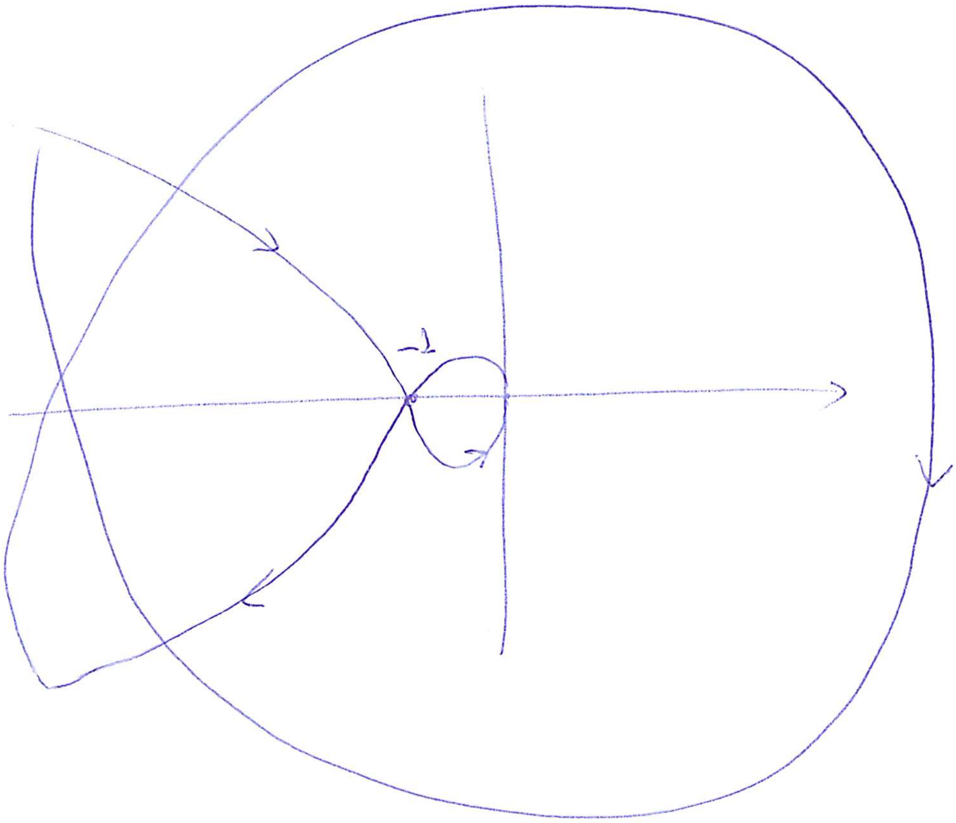
2) $G(j\omega) = \dfrac{(1-\omega^2) + j\omega}{-\omega^2(1+2j\omega)} \qquad 1-2j\omega$

$$= \frac{[(1-\omega^2)+j\omega][1-2j\omega]}{-\omega^2(1+4\omega^2)} = \frac{1-\omega^2+2\omega^2+j\omega(1-2+2\omega^2)}{-\omega^2(1+4\omega^2)}$$

$\mathrm{Re}\, G(j\omega) = \dfrac{1+\omega^2}{-\omega^2(1+4\omega^2)} \qquad \mathrm{Im}\, G(j\omega) = \dfrac{1-2\omega^2}{\omega(1+4\omega^2)}$

$\mathrm{Re} < 0 \quad \forall \omega > 0 \qquad \mathrm{Im} = 0 \text{ per } \omega = 1/\sqrt{2}$

ω	Re	Im
0^+	$-\infty$	$+\infty$
$1/\sqrt{2}$	-1	0
$+\infty$	0	0



3) $P = 0$

$-\frac{1}{k} < -1 \quad (0 < k < 1) \qquad N = -2 \qquad Z = 2 \qquad$ instabili

$-1 < -\frac{1}{k} < 0 \quad (k > 1) \qquad N = 0 \qquad Z = 0 \qquad$ stabile

$-\frac{1}{k} > 0 \quad (k < 0) \qquad N = -1 \qquad Z = 1 \qquad$ instabile

Es. 5

$$C(s) = \frac{k_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s) \qquad G(s) = 5 \frac{1}{1+s}$$

$$W(s) = \frac{k_w}{s^{h_w}} \bar{W}(s)$$

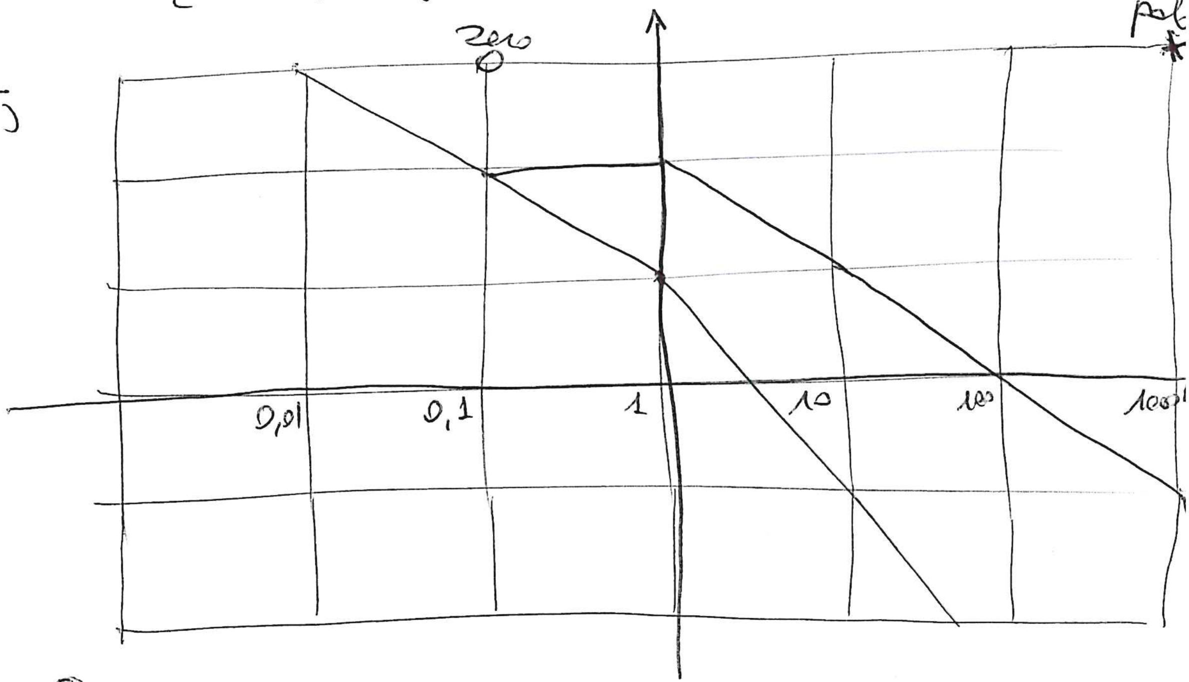
errore alla rampa finito $\Rightarrow h_w = 1$

errore alla rampa $= 0,1 \Rightarrow k_w = 10$

$k_G = 5 \qquad k_c = \frac{k_w}{k_G} = \frac{10}{5} = 2$

$h_G = 0 \qquad h_c = h_w - h_G = 1$

$$\hat{W}(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$



$$\bar{C}(s) = \frac{1 + \frac{s}{0,1}}{1 + \frac{s}{1000}} = \frac{1 + 10s}{1 + 0,001\,s}$$

$$C(s) = \frac{2}{s} \frac{1 + 10s}{1 + 0,001\,s}$$