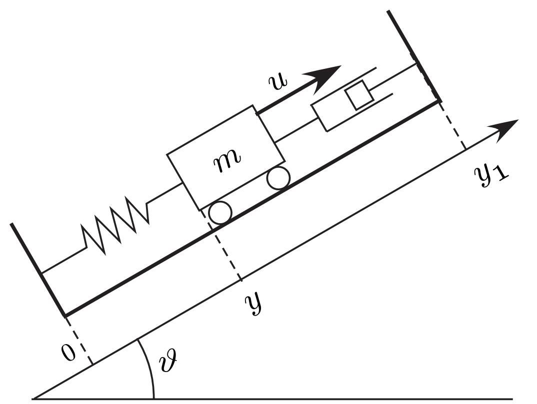
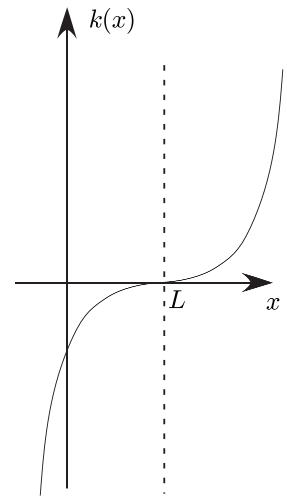
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Appello di Fondamenti di Automatica del 13/07/2011

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.





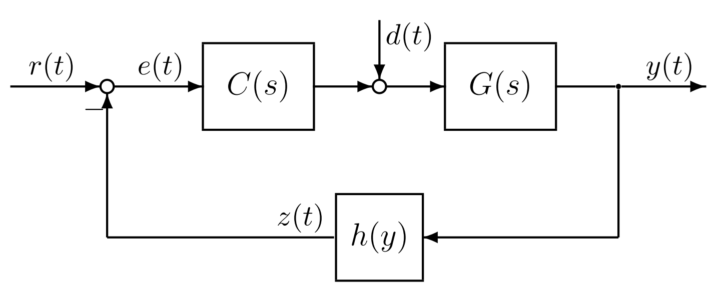
Si tratta di un carrello che si muove su di un piano inclinato sul quale agisce una coppia u, attaccato a una parete con una molla e all'altra da uno smorzatore. LO smorzatore e' ideale con costante di attrito b mentre la molla soddisfa la legge secondo cui la forza elastica generata vale $F_e(x) = k(w)$, dove x e' la lunghezza della molla e

$$k(x) = \begin{cases} -(x-L)^2 & \text{se } x \leq L \\ (x-L)^2 & \text{se } x \geq L \end{cases}$$

come illustrato nella seconda figura (L e' la lunghezza a riposo della molla).

1. Determinare le equazioni del moto del pendolo e l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ in corrispondenza all'ingresso $u(t) = 0$.
2. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno all'evoluzione di equilibrio e la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.
3. Per quali valori dell'angolo θ il sistema ha modi oscillatori?

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(s^2+3s+1)}{(s+1)^3}, \qquad h(y) = y$$

dove a e' un parametro reale.

1. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e punti doppi.

2. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K < 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e punti doppi.

3. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene solo modi non oscillatori.

Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+4)}$$

1. Si tracci il diagramma di Bode e di Nyquist di $W(s)$ determinando le eventuali intersezioni con gli assi e gli eventuali asintoti.

2. Si supponga che $h(y) = y$. Utilizzando il criterio di Nyquist, determinare il numero di poli stabili in catena chiusa al variare di K.

3. Si supponga ora che $h(y)$ sia una funzione dispari tale che

$$h(y) = \ln(y-1), \quad y \geq 0.$$

   Utilizzando il criterio del cerchio, determinare per quali valori di K il sistema in catena chiusa e' asintoticamente stabile.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{5}{s+1} \qquad h(y) = y$$

1. Si progetti un compensatore stabilizzante $C_1(s)$, in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:

   - errore a regime al gradino pari a circa 0.01;
   - pulsazione di attraversamento pari a circa 10;
   - margine di fase elevato, di circa 45^o.

2. Si progetti un compensatore stabilizzante $C_2(s)$, in modo da soddisfare le stesse specifiche del punto precedente eccetto il voler ottenere una pulsazione di attraversamento pari a circa 1.

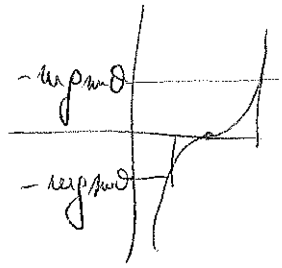
Esercizio 5 (Teorico) Fornire le equazioni differenziali del motore in corrente continua con flusso magnetico di eccitazione costante con una spiegazione della loro derivazione. Indicare infine una rappresentazione del modello del motore tramite schema a blocchi.

$\boxed{\text{ES. 1}}$

$$-m\ddot{y} - b\dot{y} - k(y) + mg\sin\theta + u = 0$$

Equilibrio $\quad y(t) = \bar{y} \quad \forall t \qquad u(t) = 0$

$$-k(\bar{y}) - mg\sin\theta = 0$$



$$k(\bar{y}) = -mg\sin\theta$$

Se $\theta \geq 0 \qquad -mg\sin\theta \leq 0 \Rightarrow k(\bar{y}) = -(\bar{y}-L)^2$

$$\Rightarrow -(\bar{y}-L)^2 = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = L - \sqrt{mg\sin\theta}$$

Se $\theta \leq 0 \qquad -mg\sin\theta \geq 0 \Rightarrow k(\bar{y}) = (\bar{y}-L)^2$

$$\Rightarrow (\bar{y}-L)^2 = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = L + \sqrt{-mg\sin\theta}$$

Si può scrivere in un'unica formula

$$\bar{y} = L - \frac{\sin(\theta)}{|\sin(\theta)|}\sqrt{mg|\sin\theta|} = L - \sin\theta\sqrt{\frac{mg}{|\sin\theta|}}$$

Linearizzazione $\qquad \tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}$

$$-m\ddot{\tilde{y}} - b\dot{\tilde{y}} - k(\bar{y} + \tilde{y}(t)) - mg\sin\theta + u = 0$$

$$k(\bar{y} + \tilde{y}) = k(\bar{y}) + \left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_{y=\bar{y}} \tilde{y}$$

Se $\theta \geq 0 \qquad \left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_{\bar{y}} = -2(\bar{y}-L) = 2\sqrt{mg\sin\theta}$

Se $\theta \leq 0 \qquad \left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_{\bar{y}} = 2(\bar{y}-L) = 2\sqrt{-mg\sin\theta}$

In genere $\qquad \left.\frac{\partial k}{\partial y}\right|_{\bar{y}} = 2\sqrt{mg|\sin\theta|}$

$$m\ddot{\tilde{y}} + b\dot{\tilde{y}} + 2\sqrt{mgl|\sin\theta|}\,\tilde{y} = u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + 2\sqrt{mgl|\sin\theta|}}$$

Modi oscillatori se i due poli sono non reali e quindi se e solo se $\Delta < 0$ (discriminante < 0)

$$\Delta = b^2 - 4m\, 2\sqrt{mgl|\sin\theta|} < 0$$

$$\sqrt{mgl|\sin\theta|} > \frac{b^2}{8m}$$

$$mgl|\sin\theta| > \frac{b^4}{64m^2} \qquad |\sin\theta| > \frac{b^4}{64m^3g}$$

$$\theta \notin \left[-\arcsin\frac{b^4}{64m^3g},\ \arcsin\frac{b^4}{64m^3g}\right]$$

$\boxed{\text{ES } 2}$

$$T(s) = \frac{C(s)W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{k(s^2+3s+1)}{(s+1)^3+k(s^2+3s+1)}$$

1) $p(s)+k\,q(s) = (s+1)^3 + k(s^2+3s+1)$ $\qquad s_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -2.6 \\ -0.4 \end{cases}$

Asintoti: esiste un asintoto lungo l'asse reale.

punti doppi:

$$\begin{cases} (s+1)^3+k(s^2+3s+1) = 0 \\ 3(s+1)^2+k(2s+3) = 0 \end{cases} \qquad k = -\frac{3(s+1)^2}{2s+3}$$

$$(s+1)^3 - \frac{3(s+1)^2}{2s+3}(s^2+3s+1) = 0$$

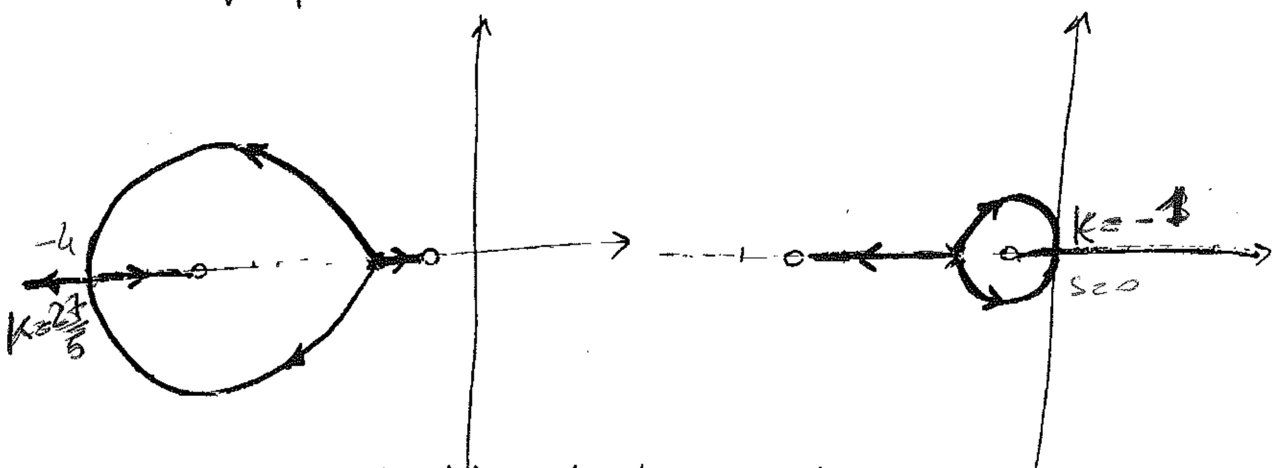
$$(s+1)^2\left[(s+1)(2s+3) - 3(s^2+3s+1)\right] = (s+1)^2\left[2s^2+5s+3-3s^2-9s-3\right]$$

$$= (s+1)^2\left[-s^2-4s\right]$$

punti doppi in 0 e -4

punto triplo in -1

Luogo positivo $\qquad\qquad$ Luogo negativo



Angoli di uscita dal punto triplo -1.

Luogo positivo: $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ $\qquad$ Luogo negativo: $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

Modi non oscillatori per $k<-1$ e $k>\frac{27}{5}$

$$K = -\frac{3(-4+1)^2}{2(-4)+3} = -\frac{3(-3)^2}{-8+3} = -\frac{27}{-5} = \frac{27}{5}$$

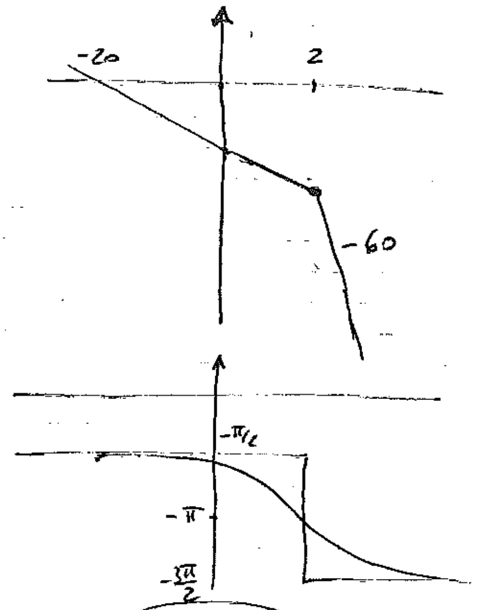
$$K = -\frac{3(0+1)}{2\cdot 0+3} = -\frac{3\cdot 1}{3} = -1$$

ES 3

Bode $\quad W(s) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{s\left(1+\frac{s}{2}+\frac{s^2}{4}\right)}$

$\left|\frac{1}{4}\right|_{dB} = -20\log 4 = -12$

$\omega_n = 2$



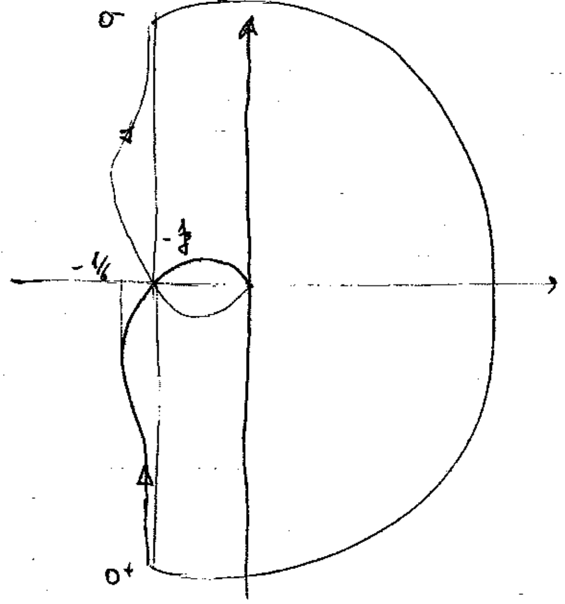
Nyquist

$$W(j\omega) = \frac{1}{j\omega\left[(4-\omega^2)+2j\omega\right]}$$

$$= \frac{(4-\omega^2)-2j\omega}{j\omega\left[(4-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

$$Re = -\frac{2}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$Im = \frac{\omega^2-4}{\omega\left[(4-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$



$Re < 0 \quad \forall\omega$

$\omega = 2 \quad Im = 0 \quad Re = -\frac{1}{8}$

$\omega = 0^+ \quad Im = -\infty \quad Re = -\frac{1}{8}$

$$\min Re = \min -\frac{2}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2} = -\max \frac{2}{(4-\omega^2)^2+4\omega^2} = -\frac{1}{\min (4-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

Per calcolare tale minimo conviene calcolare il ~~massimo~~ minimo di

$f(x) = (4-x)^2 + 4x \qquad x = \omega^2$

$f'(x) = -2(4-x)+4 \qquad f'(x) = 0 \qquad x = 2 \qquad \omega = \sqrt{2}$

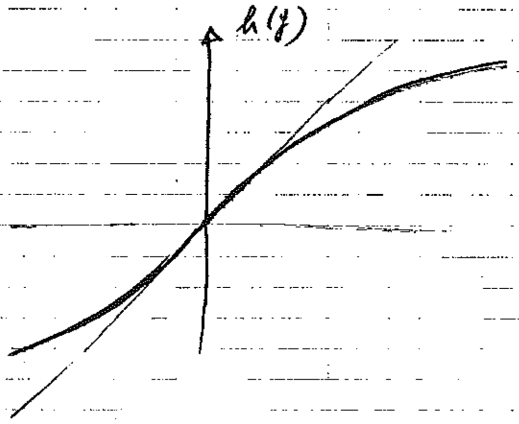
$$\min Re = -\frac{2}{(4-2)^2+4\cdot 2} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

Criterio di Nyquist

$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{8}$ stabile $\quad 0<K<8$

$-\frac{1}{8} < -\frac{1}{k} < 0$ instabile $\quad K>8$

Criterio del Cerchio



Il grafico di $h(y)$ quando $k=1$ mostra che è compreso nel settore da pendenza 0 a pendenza 1

Quindi per k generico la funzione $h(y)$ è compreso tra pendenza 0 e pendenza k

$$0 < \frac{h(y)}{y} < k \qquad h(0)=0$$

Da Nyquist si deduce che $W(s)+\frac{1}{6}$ è Positivo reale e quindi il settore minimo è compreso tra 0 e 6

Quindi otteniamo stabilità per $0<k<6$

d) Usiamo la formula $0 \le T < \frac{m_\varphi}{\omega_t}$

dove m_φ e ω_t si riferiscono alla funzione di trasferimento $8W(s)$

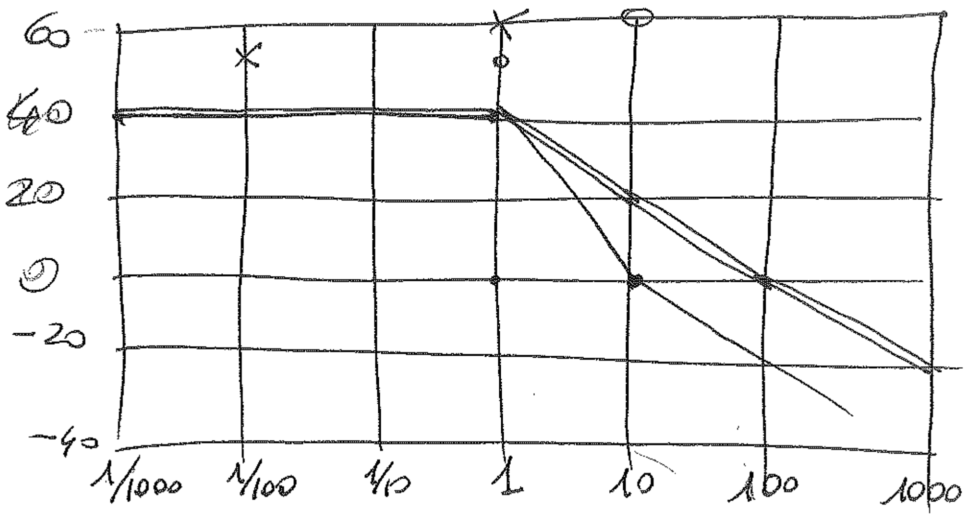
$|8W(j\omega)|=1$ Facendo i conti si ottiene $\omega_A=2$
Lo si poteva vedere da Nyquist che interseca asse reale in $-\frac{1}{8}$ e quindi $8W(s)$ interseca asse reale in -1. Quindi $m_\varphi=0$ e

$$T=0$$

$\boxed{ES.4}$ $K_G = 5$ $K_c = \frac{1/\varepsilon}{K_G} = \frac{100}{5}$

$K_c = 20$ $h_c = 0$

$C_1(s) = 20 \frac{1 + s/10}{1 + s}$



$C_2(s) = 20 \frac{1+s}{1+100s}$

Alternativo

$C_1(s) = 20 \frac{1+s}{1+10s}$