

Chapter 1

Modellizzazione di sistemi fisici

In questo capitolo mostreremo come sia possibile ottenere modelli matematici a partire dalle leggi della fisica. Prenderemo spunto da esempi di circuiti elettrici passivi e attivi, da esempi di sistemi meccanici e di sistemi elettromeccanici.

1.1 Modellizzazione di circuiti elettrici passivi

Un circuito elettrico consiste nell'interconnessione di componenti elementari passivi, cioè resistenze, condensatori e induttanze (vedi figura ??). Se i componenti elementari sono passivi, allora il loro comportamento è descritto dalla relazione tra la corrente che li attraversa e la tensione ai loro capi. In particolare una resistenza ideale mette in relazione la tensione $v(t)$ con la corrente $i(t)$ attraverso la formula

$$v(t) = Ri(t)$$

dove R è una costante positiva. In un condensatore ideale invece la tensione $v_C(t)$ con la corrente $i_C(t)$ sono collegati dalla relazione

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

dove C è una costante positiva. Infine in una induttanza ideale la tensione $v_L(t)$ con la corrente $i_L(t)$ sono collegati dalla relazione

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

dove L è una costante positiva (vedi figura ??).

Se da un circuito estraiamo due fili, l'apparato che ne risulta viene detto dipolo elettrico. Se sui due fili fluisce una corrente $i(t)$ (che sarà la medesima sui due fili) e ai capi di questi fili vi è una tensione $v(t)$, allora la rete vincolerà gli andamenti temporali $v(t)$ e $i(t)$ nel senso che non tutte le evoluzioni $v(t)$ e $i(t)$ saranno possibili. A seconda dei casi, possiamo considerare $v(t)$ come ingresso e $i(t)$ come

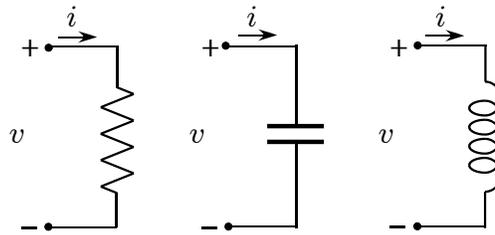


Figure 1.1:

uscita o viceversa. Se i componenti elementari che appaiono nella rete sono ideali e scegliamo la corrente come ingresso e la tensione come uscita, allora la corrispondente funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita $Z(s)$ è detta impedenza del dipolo. Se, viceversa, scegliamo la tensione come ingresso e la corrente come uscita, allora la funzione di trasferimento $A(s)$ è detta ammettenza del dipolo. Ovviamente l'impedenza e l'ammettenza sono una l'inverso dell'altra, ovvero

$$Z(s) = \frac{1}{A(s)}$$

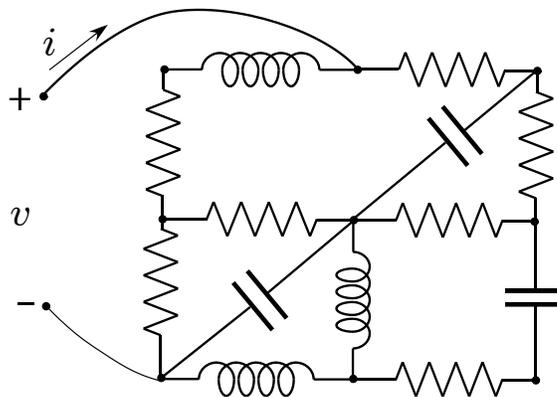


Figure 1.2:

Esempio 1.1 Consideriamo ad esempio il dipolo descritto dalla rete elettrica in figura ???. Vogliamo trovare la funzione di trasferimento tra l'ingresso $i(t)$ e l'uscita $v(t)$.

A tal fine e' utile introdurre delle variabili ausiliarie. Si noti che alla fine il numero di equazioni che devo trovare sara' pari al numero di variabili meno uno. Introduciamo le variabili ausiliarie $v_{R_1}, i_{R_1}, v_{R_2}, i_{R_2}, v_C, i_C$ che insieme alle variabili v, i fanno 8 variabili totali. Dobbiamo determinare 7 equazioni che le legano. Si noti che $v = v_{R_2}$,

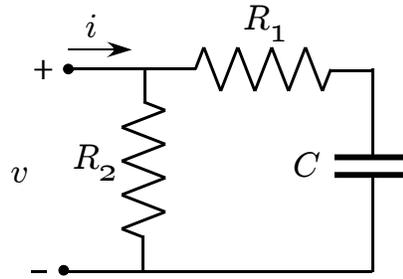


Figure 1.3:

$v = v_{R_1} + v_C$, $i_{R_1} = i_C$ e $i = i_{R_1} + i_{R_2}$ che insieme alle equazioni che descrivono il comportamento dei componenti elementari

$$\begin{cases} i_C = C v_C^{(1)} \\ v_{R_1} = R_1 i_{R_1} \\ v_{R_2} = R_2 i_{R_2} \end{cases}$$

ci danno le 7 equazioni richieste. Eliminando le variabili v_{R_1} , i_{R_1} , v_{R_2} , i_C otteniamo le 3 equazioni

$$\begin{cases} v = R_1 C v_C^{(1)} + v_C \\ i = C v_C^{(1)} + i_{R_2} \\ v = R_2 i_{R_2} \end{cases}$$

nelle 4 incognite v , i , i_{R_2} , v_C . Utilizzando le trasformate di Laplace, si osservi che

$$\begin{cases} V = s R_1 C V_C + V_C \\ I = s C V_C + I_{R_2} \\ V = R_2 I_{R_2} \end{cases}$$

Si osservi che non abbiamo messo nella formula della Laplace trasformata della derivata il termine dipendente dalla condizione iniziale. Questo perché, dovendo calcolare la funzione di trasferimento, possiamo supporre che tutte le condizioni iniziali siano nulle. Dalla prima equazione si ottiene

$$V_C = \frac{1}{1 + s R_1 C} V$$

e quindi

$$I = s C V_C + \frac{1}{R_2} V = \frac{s C}{1 + s R_1 C} V + \frac{1}{R_2} V = \frac{1 + s C R_1 + s C R_2}{R_2 (1 + s R_1 C)} V$$

e quindi si ottiene la funzione di trasferimento tra l'ingresso $i(t)$ e l'uscita $v(t)$ e'

$$W(s) = \frac{R_2 (1 + s R_1 C)}{1 + s C R_1 + s C R_2}$$

Supponiamo ora che la seconda resistenza sia non ideale in quanto la relazione tra la sua corrente e la sua tensione sia data dalla relazione non lineare

$$v_{R_2} = f(i_{R_2})$$

dove $f(\cdot)$ e' una qualsiasi funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Le equazioni che legano le variabili v, i, i_{R_2}, v_C diventano

$$\begin{cases} v = R_1 C v_C^{(1)} + v_C \\ i = C v_C^{(1)} + i_{R_2} \\ v = f(i_{R_2}) \end{cases} \quad (1.1)$$

In questo caso la relazione tra $i(t)$ e $v(t)$ non e' descrivibile in termini di funzioni di trasferimento. Possiamo pero' trovare una approssimazione che ci permette di arrivare a una funzione di trasferimento. Dobbiamo prima determinare le evoluzioni di equilibrio, cioe' le soluzioni costanti delle equazioni (??). Se assumiamo che $v(t) = \bar{v}, i(t) = \bar{i}, i_{R_2}(t) = \bar{i}_{R_2}, v_C(t) = \bar{v}_C$, allora, sostituendo tali segnali in (??), si ottiene un sistema di equazioni algebriche

$$\begin{cases} \bar{v} = \bar{v}_C \\ \bar{i} = \bar{i}_{R_2} \\ \bar{v} = f(\bar{i}_{R_2}) \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che, siccome $v_C(t)$ e' costante, allora la sua derivata e' nulla. Si ottiene quindi che $\bar{v} = f(\bar{i})$ che da' la relazione tra i valori di equilibrio in ingresso e in uscita. Ora introduciamo le nuove variabili $\tilde{v}(t) := v(t) - \bar{v}, \tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}, \tilde{i}_{R_2}(t) := i_{R_2}(t) - \bar{i}_{R_2}, \tilde{v}_C(t) := v_C(t) - \bar{v}_C$. Queste variabili rappresentano le variazioni dei segnali rispetto ai loro valori di equilibrio. Se supponiamo che tali variazioni siano "piccole", allora la terza equazione di (??) si puo' approssimare usando l'espansione di Taylor¹ attorno al valore \bar{i}_{R_2}

$$v = f(i_{R_2}) \simeq f(\bar{i}_{R_2}) + f'(\bar{i}_{R_2})(i_{R_2} - \bar{i}_{R_2}) = f(\bar{i}_{R_2}) + f'(\bar{i}_{R_2})\tilde{i}_{R_2}$$

Così le equazioni (??) diventano

$$\begin{cases} \bar{v} + \tilde{v} = R_1 C (\bar{v}_C + \tilde{v}_C)^{(1)} + \bar{v}_C + \tilde{v}_C \\ \bar{i} + \tilde{i} = C (\bar{v}_C + \tilde{v}_C)^{(1)} + \bar{i}_{R_2} + \tilde{i}_{R_2} \\ \bar{v} + \tilde{v} = f(\bar{i}_{R_2}) + f'(\bar{i}_{R_2})\tilde{i}_{R_2} \end{cases}$$

Le condizioni sui valori di equilibrio permettono di semplificare le costanti e ottenere

$$\begin{cases} \tilde{v} = R_1 C \tilde{v}_C^{(1)} + \tilde{v}_C \\ \tilde{i} = C \tilde{v}_C^{(1)} + \tilde{i}_{R_2} \\ \tilde{v} = f'(\bar{i}_{R_2})\tilde{i}_{R_2} = f'(\bar{i})\tilde{i}_{R_2} \end{cases}$$

¹Se $f(x)$ e' una funzione qualsiasi, allora la sua espansione di Taylor del primo ordine intorno al valore $x = \bar{x}$ e' data da $f(x) \simeq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\tilde{x}$, dove $\tilde{x} := x - \bar{x}$ (vedi figura ??).

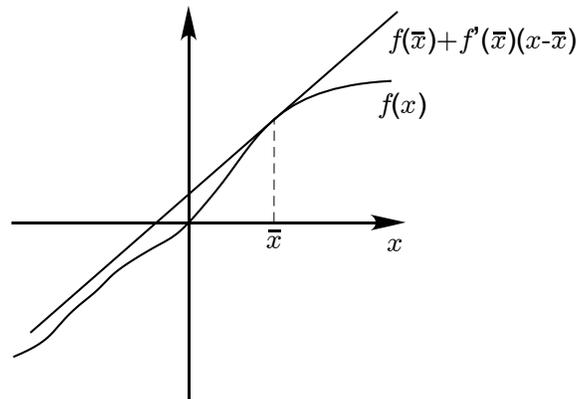


Figure 1.4:

A questo punto si può passare alle trasformate di Laplace e ottenere

$$\begin{cases} \tilde{V} &= sR_1C\tilde{V}_C + \tilde{V}_C \\ \tilde{I} &= sC\tilde{V}_C + \tilde{I}_{R_2} \\ \tilde{V} &= f'(\tilde{i})\tilde{I}_{R_2} \end{cases}$$

Con passaggi simili a quelli fatti sopra si ottiene che la funzione di trasferimento tra l'ingresso $\tilde{i}(t)$ e l'uscita $\tilde{v}(t)$ è

$$\frac{\tilde{V}(s)}{\tilde{I}(s)} = \frac{f'(\tilde{i})(1 + sR_1C)}{1 + sCR_1 + sCf'(\tilde{i})}$$

cioè la stessa di prima solo che al posto di R_2 abbiamo ora $f'(\tilde{i})$. Osserviamo che la funzione di trasferimento dipende dal valore costante della corrente di ingresso.

1.2 Modellizzazione di circuiti elettrici attivi

I circuiti attivi sono dati dall'interconnessione di componenti passivi, cioè resistenze, condensatori e induttanze, con transistor o con amplificatori operazionali.

1.2.1 Circuiti elettrici con amplificatori operazionali

L'amplificatore operazionale è un circuito attivo (vedi figura ??) che amplifica per una costante A (molto elevata > 0) la differenza delle tensioni ai due morsetti di ingresso

$$v_0 = A(v_+ - v_-).$$

Osserva che A invece che una costante potrebbe essere una funzione di trasferimento $A(s)$ e i ragionamenti che seguono resterebbero gli stessi. Un'altra generalizzazione

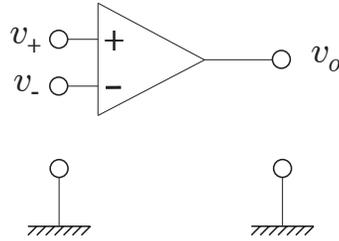


Figure 1.5:

consiste nell'aver $v_0 = f(v_+ - v_-)$ dove $f(\cdot)$ e' una funzione non lineare, come, ad esempio, una funzione lineare con saturazione.

Si assume idealmente che tale amplificatore abbia impedenza di ingresso infinita, cioè che attraverso i rami uscenti dai morsetti + e - passino correnti nulle.

L'amplificatore operazionale può essere utilizzato in molti schemi. Consideriamo ad esempio lo schema illustrato in figura ??, nel quale l'amplificatore operazionale è collegato a due dipoli con impedenze $Z_1(s)$ e $Z_2(s)$. Allora, ragionando nel dominio

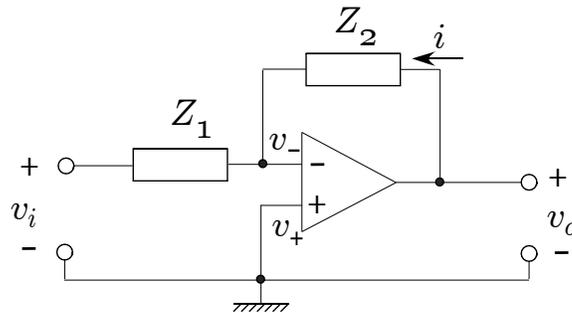


Figure 1.6:

delle trasformate di Laplace, sapendo che $V_{Z_1} = Z_1 I_{Z_1}$ e $V_{Z_2} = Z_2 I_{Z_2}$ e che $I_{Z_1} = I_{Z_2} = I$, si deduce che $V_o - V_i = (Z_1 + Z_2)I$ e quindi

$$I = \frac{V_o - V_i}{Z_1 + Z_2}$$

Da cio' desumiamo che

$$\begin{aligned} V_- &= V_i + Z_1 I = V_i + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} (V_o - V_i) \\ V_+ &= 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$V_o = -A \left\{ V_i - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} (V_i - V_o) \right\} = \frac{-AZ_2}{Z_1 + Z_2 + AZ_1} V_i$$

Per $A \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Quindi la funzione di trasferimento diventa in questo caso Z_2/Z_1 che coincide con la funzione di trasferimento che si sarebbe ottenuta supponendo che, per effetto di una amplificazione infinita, si abbia $V_+ = V_-$. Questo corrisponde in effetti a un modello semplificato dell'amplificatore operazionale.

Osservazione 1.2 Si vede che la relazione tra la tensione di ingresso e la tensione di uscita risulta indipendente dal valore di A a patto che tale valore risulti elevato. Questo è un esempio di un effetto generale della retroazione, cioè la diminuzione della sensibilità alla variazione dei parametri del sistema. Questo è stato uno dei motivi che storicamente hanno portato all'uso della retroazione in generale e del circuito visto prima in particolare. Si dovevano infatti utilizzare dei tubi amplificatori in grado di amplificare notevolmente i segnali, ma le cui prestazioni variavano notevolmente nel tempo. La retroazione era utilizzata per rendere più uniformi le caratteristiche di amplificazione.

Osservazione 1.3 Nei calcoli fatti precedentemente non cambia nulla se vengono invertiti i due morsetti $+$ e $-$ o equivalentemente si può vedere che l'approssimazione vista sopra vale anche se $A \rightarrow -\infty$. In realtà, come vedremo più avanti, la situazione nei due casi è molto diversa. Infatti se si cambiano i morsetti $+$ e $-$ si avrà un comportamento *instabile* del circuito.

Esempio 1.4 Si consideri la rete elettrica illustrata in figura ??, dove l'amplificatore, che si suppone ideale e cioè con impedenza di ingresso infinita (circuito aperto in ingresso), amplifica per una costante $A > 0$ la differenza delle tensioni di ingresso v_+ e v_- . Questo schema rappresenta una caso particolare di quello visto prima in

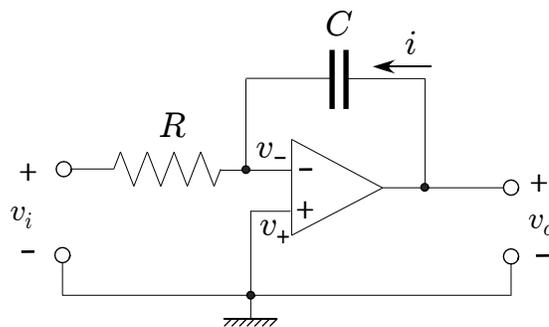


Figure 1.7:

cui $Z_1 = R$ e $Z_2 = 1/sC$. Sostituendo nella formula generale con cui si otteneva da Z_1 e Z_2 la funzione di trasferimento da v_i a v_o si trova

$$W(s) = \frac{-A/sC}{R + 1/sC + AR} = \frac{-A}{RC(A+1)s + 1}$$

Si noti che

$$W(s) \xrightarrow{A \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{RCs}$$

Nota che la risposta impulsiva e'

$$w(t) = -\frac{A}{RC(A+1)} e^{-\frac{1}{RC(A+1)}t}$$

che ha un comportamento diverso se A e' grande positivo o se A e' grande e negativo. Infatti, se A e' grande positivo, allora $w(t)$ e' un esponenziale convergente, mentre se A e' grande negativo, allora $w(t)$ e' divergente e quindi, come vedremo, il sistema e' instabile.

1.3 Modellizzazione di sistemi meccanici

Per i sistemi meccanici le equazioni si scrivono esprimendo l'equilibrio delle forze e/o delle coppie applicate a ciascuna delle parti in movimento.

1.3.1 Sistemi in moto traslatorio

Nei sistemi meccanici in moto traslatorio le variabili significative che vengono vincolate dal modello sono le posizioni e le forze. Si usa la convenzione secondo la quale le le posizioni fanno riferimento a un sistema di coordinate orientato in modo che le coordinate positive siano a destra dell'origine. Le forze si intendono positive se orientate verso destra.

I meccanici in moto traslatorio risultano dalla connessione di componenti elementari di tre tipologie:

1. Massa (sede delle forze di *inerzia*).
2. Molla (sede della forza *elastica*).
3. Smorzatore (sede della forza di *attrito viscoso*).

La somma di tutte le forze agenti sul punto (esterne al sistema, di inerzia ed esercitate da altri punti del sistema) deve essere zero in ogni istante.

1. Massa: Questo tipo di forza nasce dalla resistenza con cui la massa si oppone alla sua accelerazione. La forza di inerzia F_i (le frecce in figura ?? indicano convenzionalmente la direzione a cui corrispondono forze positive) dovuta a un punto materiale di massa M nella posizione x , cioè esercitata sul punto x dal corpo di massa m che si trova in x , è data da (vedi figura ??)

$$F_i = -m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

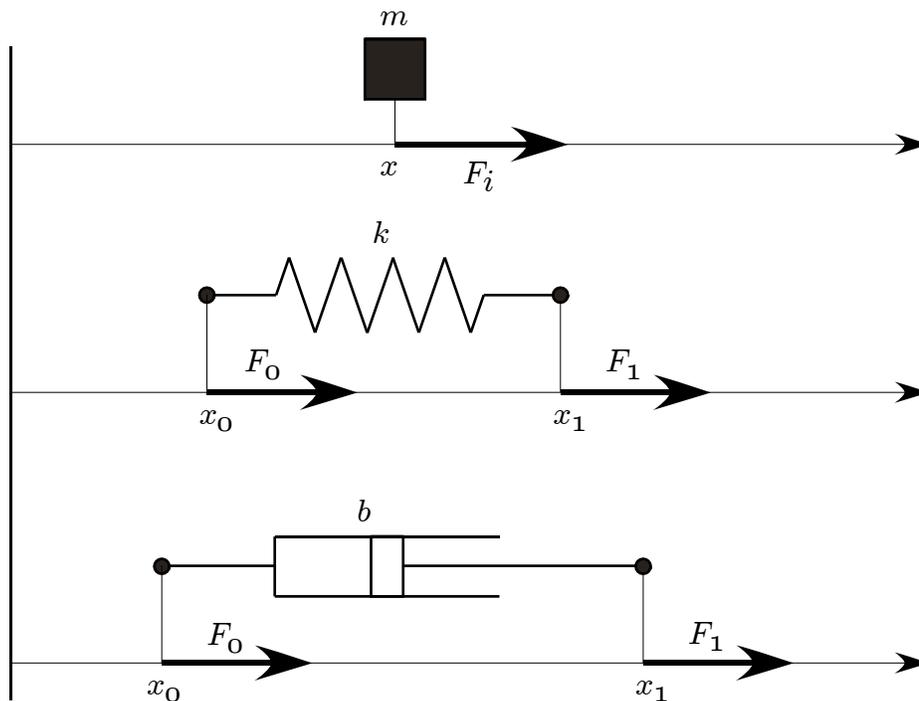


Figure 1.8:

2. Molla: La molla modella la forza elastica. Una molla ideale esercita ai suoi due estremi due forze (le frecce in figura ?? indicano convenzionalmente la direzione a cui corrispondono forze positive) di segno opposto (e quindi di direzioni opposte) e di uguale intensità proporzionale all'allungamento (o accorciamento) della molla

$$\begin{aligned} F_1 &= -k(x_1 - x_0 - L) \\ F_0 &= -F_1 = -k(x_0 - x_1 + L) \end{aligned}$$

dove k è la costante di elasticità e L è la lunghezza a riposo della molla. Questo tipo di forza nasce dalla resistenza con cui un corpo elastico si oppone alla sua deformazione. In effetti se $x_1 = x_0 + L$ (molla a riposo), allora la forza elastica F_1 e'

nulla. Se $x_1 > x_0 + L$ (molla estesa), allora la forza elastica F_1 e' negativa e quindi spinge verso sinistra. Se infine $x_1 < x_0 + L$ (molla compressa), allora la forza elastica F_1 e' positiva e quindi spinge verso destra.

3. Smorzatore: Uno smorzatore ideale esercita ai suoi due estremi due forze (le frecce in figura ?? indicano convenzionalmente la direzione a cui corrispondono forze positive) di segno opposto (e quindi di direzioni opposte) e di uguale intensità proporzionale alla velocità di allungamento (o accorciamento) dello smorzatore

$$F_1 = -b \frac{d}{dt}(x_1 - x_0) = -b \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt} \right)$$

$$F_0 = -F_1 = -b \left(\frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right)$$

dove b è la costante di attrito dello smorzatore. Lo smorzatore ideale modella la forza di attrito. Questo tipo di forza nasce dalla resistenza con cui l'attrito si oppone al movimento.

Osservazione 1.5 In situazioni reali sia le molle che gli smorzatori possono presentare comportamenti non lineari. Ad esempio le molle reali avranno gli andamenti

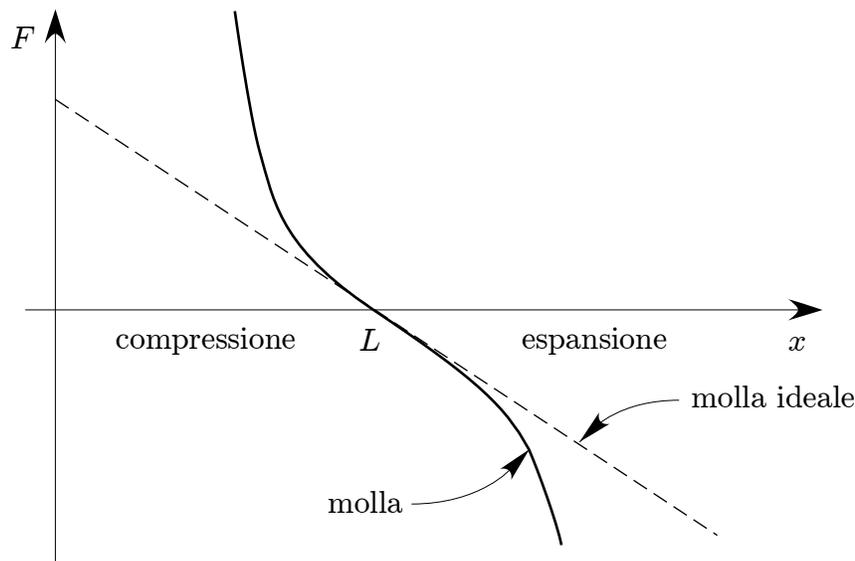


Figure 1.9:

della forza in funzione dello spostamento mostrati in figura ??, nella quale si può notare la presenza di fenomeni di saturazione. L'andamento lineare ideale può essere considerato una "buona" approssimazione del comportamento non lineare.

Per quanto riguarda gli smorzatori, si noti che esistono altri tipi di attriti che presentano andamenti completamente diversi di quello dell'attrito viscoso. Si noti che nei casi non lineari l'andamento non è neppure approssimabile con una funzione lineare, come illustrato dalla figura ??.

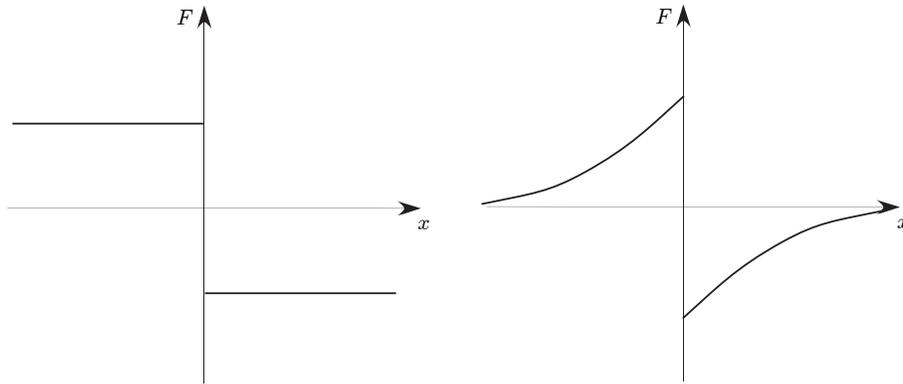


Figure 1.10:

Esempio 1.6 Consideriamo l'apparato meccanico illustrato in figura ??. Appli-

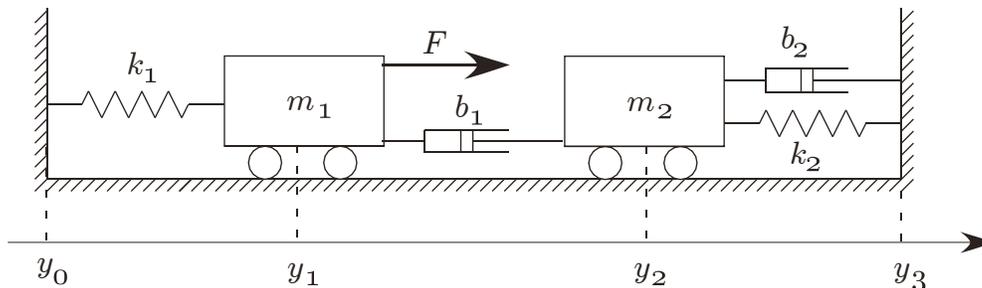


Figure 1.11:

cando le regole sopra enunciate, si ottengono due equazioni differenziali accoppiate corrispondenti all'equilibrio di forze nei punti x_1 e x_2

$$\begin{cases} -m_1\ddot{x}_1 - k_1(x_1 - x_0 - L_1) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F = 0 \\ -m_2\ddot{x}_2 - b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_2(x_2 - x_3 + L_2) = 0. \end{cases}$$

Le evoluzioni di equilibrio in questo caso corrispondono alle soluzioni costanti delle precedenti equazioni $x_1(t) = \bar{x}_1$ e $x_2(t) = \bar{x}_2$ con $F = 0$. Ciò implica che $\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 = 0$ e quindi, sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$\begin{cases} -k_1(\bar{x}_1 - x_0 - L_1) = 0 \\ -k_2(\bar{x}_2 - x_3 + L_2) = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare a due equazioni in due incognite \bar{x}_1, \bar{x}_2 che possono così essere ottenute con tecniche standard. Si trova che $\bar{x}_1 = x_0 + L_1$ e $\bar{x}_2 = x_3 - L_2$. Effettuiamo un cambiamento di variabile

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\y_2 &= x_2 - \bar{x}_2\end{aligned}$$

e, osservando che $\dot{x}_0 = \dot{x}_3 = 0$, si ha che $\dot{y}_1 = \dot{x}_1$ e $\dot{y}_2 = \dot{x}_2$. Si ottiene perciò

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + b_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = F \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 + b_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + b_2 \dot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che $u = F$ sia l'ingresso e $y = y_1$ l'uscita. Per manipolare le equazioni è conveniente passare alla rappresentazione dominio delle trasformate di Laplace, nel quale la derivata con la moltiplicazione per s (volendo ottenere le funzioni di trasferimento, si suppone che le condizioni iniziali siano nulle). Si ottiene così

$$\begin{aligned}(m_1 s^2 + b_1 s + k_1) Y_1 - b_1 s Y_2 &= F \\ -b_1 s Y_2 + (m_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + k_2) Y_2 &= 0.\end{aligned}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $(m_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + k_2)$ e sostituendo si ottiene

$$[(m_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + k_2)(m_1 s^2 + b_1 s + k_1) - b_1^2 s^2] Y = (m_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + k_2) U(s)$$

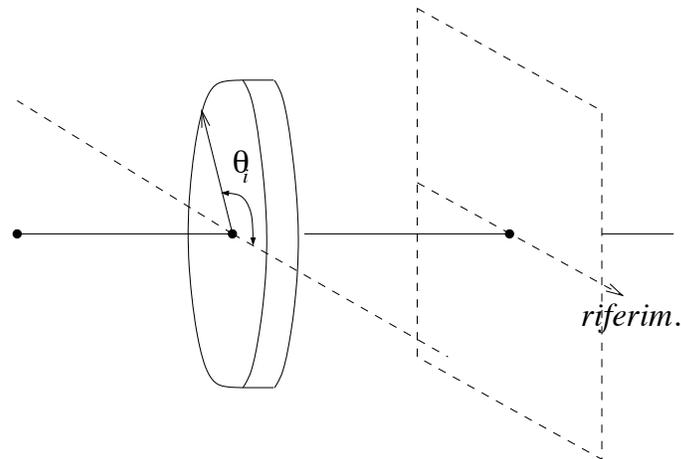
Quindi la funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{m_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + k_2}{(m_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + k_2)(m_1 s^2 + b_1 s + k_1) - b_1^2 s^2}$$

1.3.2 Sistemi in moto puramente rotatorio

Per questa classe di sistemi meccanici i componenti ideali elementari da prendere in considerazione sono:

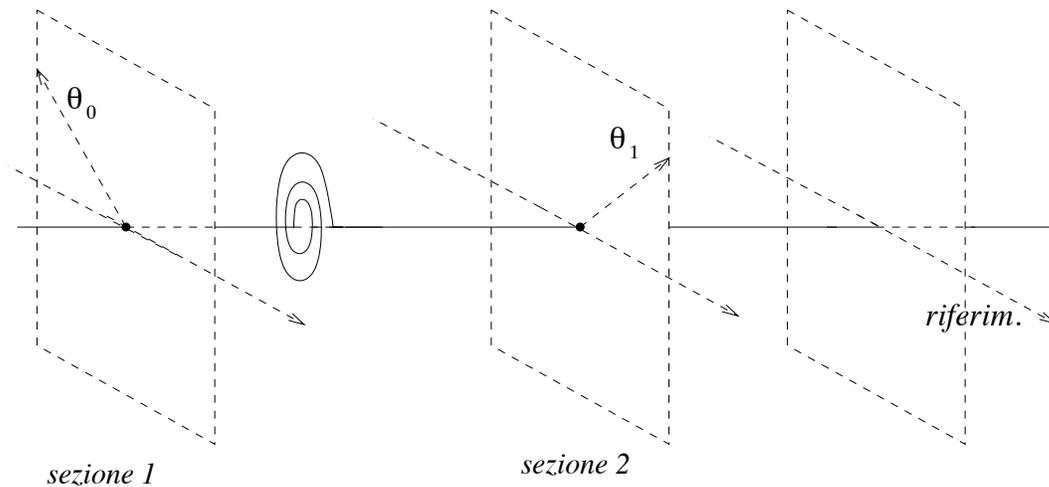
1. Rotore ideale, con momento d'inerzia J . La sua posizione è definita dall'angolo θ_i formato da una generatrice solidale con il rotore stesso e da una generatrice fissa su una regione di riferimento.



Per indurre nel rotore un'accelerazione angolare pari a $d^2\theta/dt^2$, la sezione del rotore deve esercitare su quest'ultimo una coppia di valore uguale a $Jd^2\theta/dt^2$. Quindi il rotore esercita sulla sezione una coppia d'inerzia di valore pari a

$$-J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

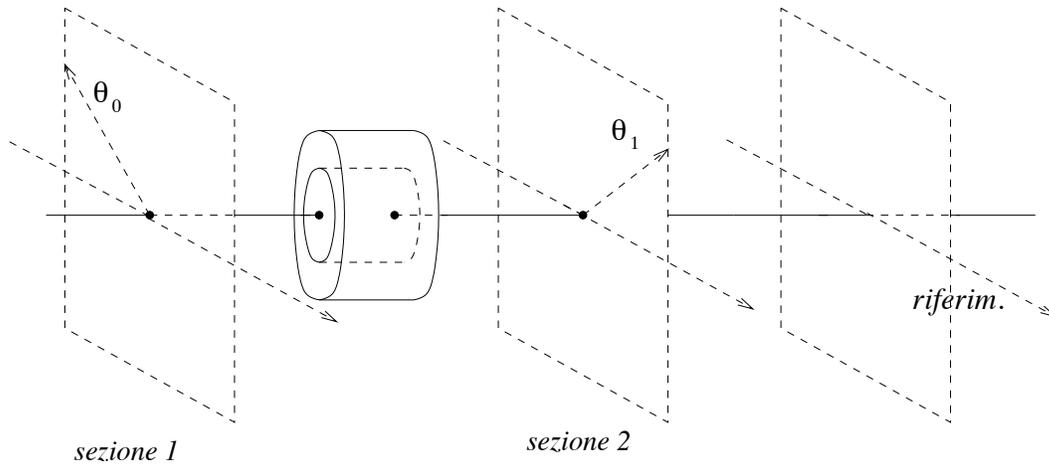
2. Molla torsionale. Se θ_1 e θ_0 sono gli spostamenti angolari delle sezioni solidali con i terminali della molla rispetto ad una sezione di riferimento fissa, la molla esercita sulla sezione 1 una coppia pari a $-K(\theta_1 - \theta_0)$, ed è intesa essere "a riposo" se $\theta_1 = \theta_0$ ($K > 0$).



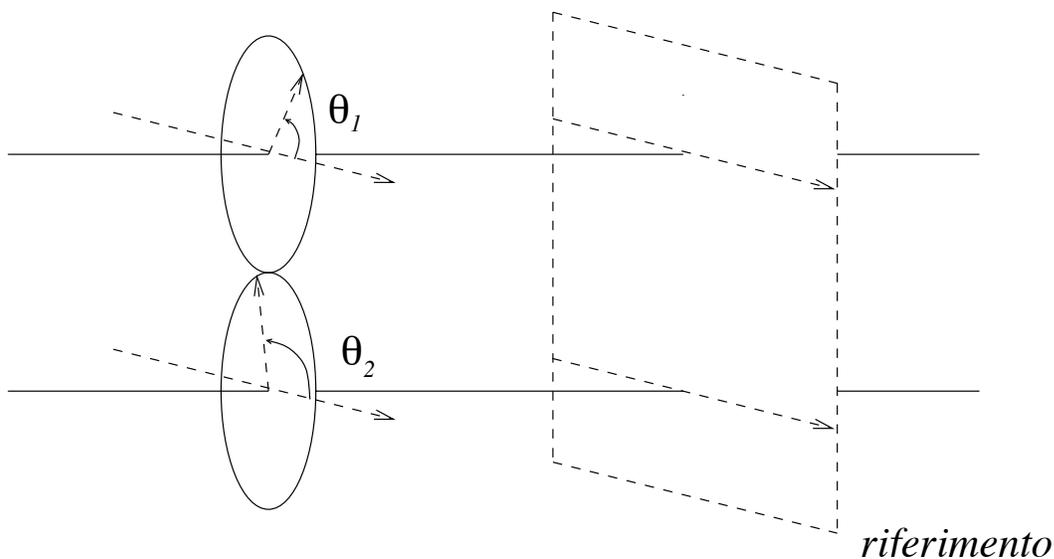
3. Smorzatore viscoso. Se θ_1 e θ_0 hanno significato analogo al precedente, lo smorzatore esercita sulla sezione 1 una coppia pari a

$$-B\left(\frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_0}{dt}\right),$$

con $B > 0$.



4. Trasmissioni ideali. Una trasmissione ideale consiste in due ruote dentate ingaggiate tra loro.



Si noti che, per ruote ingaggiate, il numero di denti è proporzionale al raggio con costante di proporzionalità uguale. Questo significa che, se n_1 ed n_2 sono i denti delle ruote calettate sull'asse 1 e sull'asse 2 rispettivamente e r_1 e r_2 sono i loro raggi, allora

$$\frac{n_1}{r_1} = \frac{n_2}{r_2}$$

Siano $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$ le velocità angolari delle due ruote rispetto a un riferimento fisso nello spazio, allora si ha

$$n_1 \dot{\theta}_1 = -n_2 \dot{\theta}_2.$$

In condizioni ideali, ipotizzando cioè assenza di attriti e ruote con inerzia nulla, le coppie che le ruote trasmettono agli assi devono soddisfare la condizione che la potenza meccanica erogata dal sistema delle due ruote al sistema dei due alberi è

complessivamente nulla, ossia dette T_1 e T_2 le due coppie erogate all'asse 1 e all'asse 2 dalle due ruote dentate, si deve avere

$$T_1 \dot{\theta}_1 + T_2 \dot{\theta}_2 = 0.$$

Da ciò si ottiene

$$\frac{T_1}{T_2} = -\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

ovvero

$$T_1 n_2 = T_2 n_1.$$

Esempio 1.7 Si consideri il sistema meccanico in moto rotatorio illustrato in figura ???. Le equazioni del sistema sono

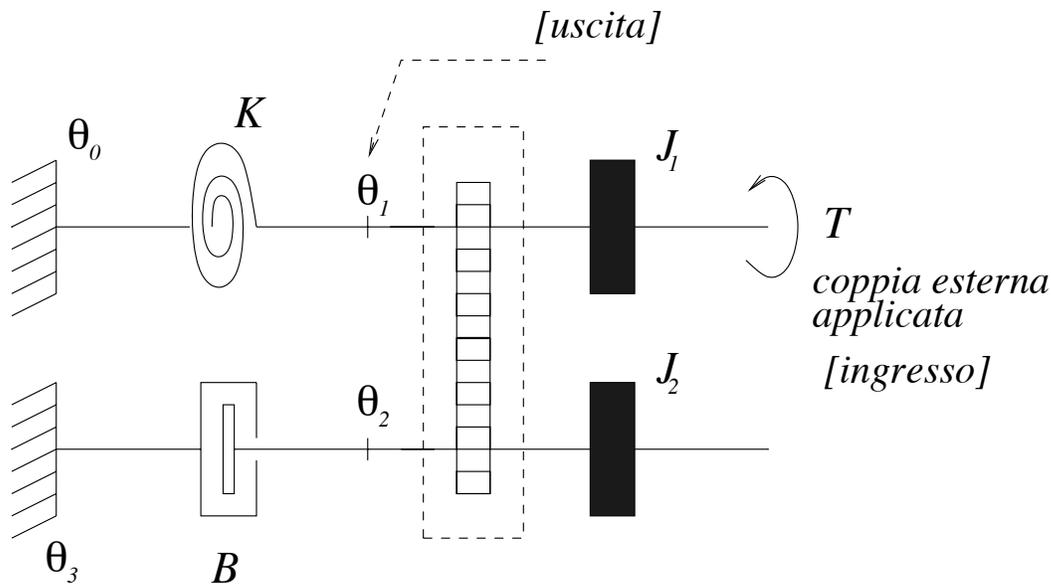


Figure 1.12:

$$\begin{cases} 0 = T - J_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - K(\theta_1 - \theta_0) + T_1 & \text{coppie sulla sezione 1} \\ 0 = -J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} - B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + T_2 & \text{coppie sulla sezione 2,} \end{cases}$$

dove T_1 e T_2 sono le coppie esercitate sulle sezioni 1 e 2 dalle ruote dentate. Tenendo conto che $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_3 = 0$ e che $T_1 n_2 = T_2 n_1$ e che $\dot{\theta}_1 n_1 = -\dot{\theta}_2 n_2$, si ha, eliminando $\dot{\theta}_2$ e T_2 ,

$$\begin{cases} 0 = T - J_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - K \theta_1 + T_1 \\ 0 = +J_2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \frac{n_1}{n_2} + B \frac{d\theta_1}{dt} \frac{n_1}{n_2} + T_1 \frac{n_2}{n_1}. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per n_2/n_1 e sottratta la seconda alla prima si elimina T_1

$$0 = -\frac{n_2}{n_1} T - J_1 \frac{n_2}{n_1} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - K \frac{n_2}{n_1} \theta_1 + T_1 \frac{n_2}{n_1} - J_2 \frac{n_1}{n_2} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - B \frac{n_1}{n_2} \frac{d\theta_1}{dt} - T_1 \frac{n_2}{n_1}$$

da cui

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \left[J_1 \frac{n_2}{n_1} - J_2 \frac{n_1}{n_2} \right] + \frac{d\theta_1}{dt} \left[B \frac{n_1}{n_2} \right] + \theta_1 \left[K \frac{n_2}{n_1} \right] = \frac{n_2}{n_1} T$$

ovvero

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \left[J_1 + J_2 \frac{n_1^2}{n_2^2} \right] + \frac{d\theta_1}{dt} B \frac{n_1^2}{n_2^2} + \theta_1 K = T.$$

Esempio 1.8 Il pendolo Consideriamo un'asta rigida incernierata all'asse di un motore elettrico e libera di ruotare attorno a tale asse (vedi figura ??). Supponiamo

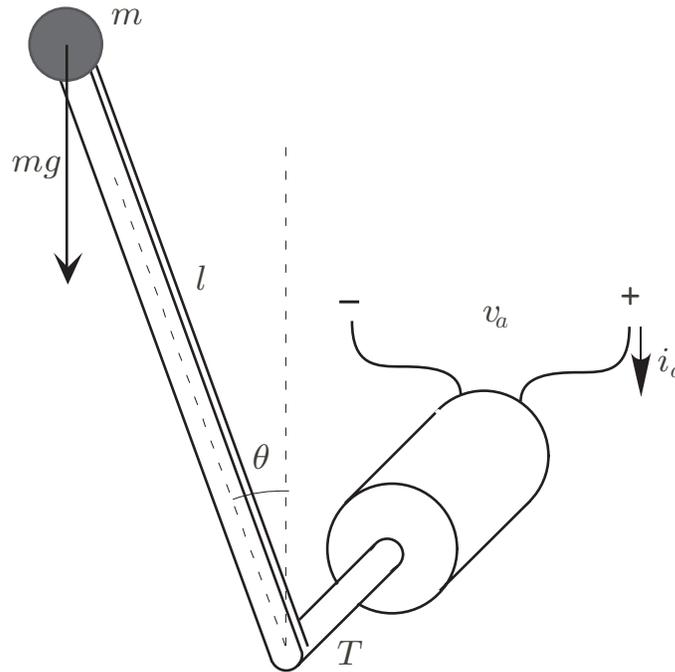


Figure 1.13:

che all'estremo dell'asta non incernierato al motore sia saldata una massa m . Sia θ l'angolo compreso tra l'asta e l'asse verticale e T la coppia esercitata dal motore. Se supponiamo che l'asta abbia massa trascurabile, allora il momento di inerzia del sistema asta+massa è $J = ml^2$. Inoltre la forza di gravità esercita sull'asta una coppia pari a $lmg \sin \theta$. Si ottiene così

$$\begin{aligned} -J\ddot{\theta} + lmg \sin \theta + T &= 0 \\ l\ddot{\theta} - g \sin \theta - \frac{1}{ml}T &= 0 \end{aligned}$$

che può essere considerato un sistema non lineare con ingresso $u = T$ e uscita $y = \theta$. Supponendo che $\bar{u} = 0$, si vede che esistono due punti di equilibrio dato che esistono due soluzioni dell'equazione statica $\sin(\bar{y}) = 0$ che sono $\bar{y} = 0, \pi$.

(i) Linearizziamo nell'intorno di $\bar{y} = 0$. In questo caso, siccome

$$\sin(y) \simeq \cos(\bar{y})\tilde{y} = \tilde{y}$$

dove $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y} = y(t)$, allora in questo caso la linearizzazione dà la seguente equazione

$$l\ddot{\tilde{y}} - g\tilde{y} = \frac{1}{ml}u,$$

che può essere considerato una buona approssimazione del sistema di partenza, quando y e u assumono valori "piccoli". La funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{1}{ml^2} \frac{1}{s^2 - g/l}.$$

mentre la risposta impulsiva è

$$w(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}.$$

dove

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

e dove c_1, c_2 sono opportune costanti. Si noti che uno dei due modi è un esponenziale divergente.

(ii) Linearizziamo ora nell'intorno di $\bar{y} = \pi$. In questo caso, siccome

$$\sin(y) \simeq \cos(\bar{y})\tilde{y} = -\tilde{y}$$

dove $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y} = y(t) - \pi$, allora in questo caso la linearizzazione dà la seguente equazione

$$l\ddot{\tilde{y}} + g\tilde{y} = \frac{1}{ml}u,$$

La funzione di trasferimento è in questo caso

$$W(s) = \frac{1}{ml^2} \frac{1}{s^2 + g/l}.$$

mentre la risposta impulsiva è in questo caso del tipo

$$w(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

e dove A, φ sono opportune costanti.

1.4 Modellizzazione di sistemi elettromeccanici

Consideriamo ora un modello semplificato di un motore elettrico a corrente continua. Questo costituisce l'esempio più comune di attuatore per il controllo di sistemi meccanici. Come mostrato dalla figura ??, il motore è composto da una *parte statorica*, con funzioni di induttore, schematizzabile con il circuito R_e, L_e detto di eccitazione, e di una *parte rotorica*, schematizzabile con un circuito R, L detto armatura, in serie con un rotore ideale in cui ha luogo la conversione della potenza elettrica in potenza meccanica. Ai morsetti di eccitazione viene applicata la tensione $v_e(t)$ per effetto

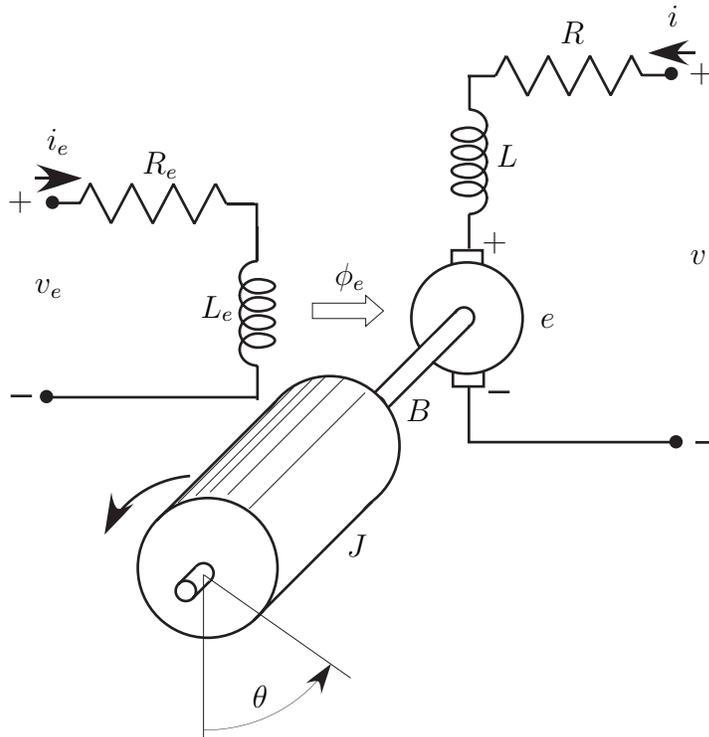


Figure 1.14:

della quale nel circuito di eccitazione circola la corrente $i_e(t)$ che sostiene il flusso di eccitazione $\phi_e(t)$ che investe il rotore. L'equazione del circuito di eccitazione è

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{d}{dt} i_e(t)$$

e inoltre $\phi_e(t) = L_e i_e(t)$. Il circuito di armatura associato alla parte rotante ha invece equazione elettrica

$$v(t) = R i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + e(t),$$

dove $e(t)$ è la forza contro elettromotrice che si sviluppa nel circuito d'armatura, indotta dal movimento dell'armatura nel campo prodotto del circuito di eccitazione.

La forza contro elettromotrice è data dalla formula

$$e(t) = K_e \phi_e(t) \omega(t) = K_e L_e i_e(t) \omega(t),$$

dove $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$ è la velocità di rotazione e K_e è una opportuna costante. Una seconda equazione di tipo elettromeccanico (perchè coinvolge sia grandezze elettriche che meccaniche) è la seguente

$$c(t) = K_m \phi_e(t) i(t) = K_m L_e i_e(t) i(t),$$

dove $c(t)$ è la coppia generata e dove K_m è una opportuna costante. In condizioni ideali la potenza elettrica fornita $e(t)i(t)$ deve coincidere con la potenza meccanica erogata $c(t)\omega(t)$, da cui segue che

$$K_e L_e i_e(t) \omega(t) i(t) = K_m L_e i_e(t) \omega(t) i(t)$$

da cui

$$K_e = K_m.$$

Tale uguaglianza si ha solo se si sono usate per le grandezze meccaniche ed elettriche unità di misura coerenti in modo tale che la potenza meccanica $e(t)\omega(t)$ sia espressa nella stessa unità di misura della potenza elettrica $e(t)i(t)$. Sia $K := K_e = K_m$. Il sistema meccanico, cui viene applicata la coppia $c(t)$, è descritto dall'equazione

$$-J \frac{d\omega(t)}{dt} - B\omega(t) + c(t) + T(t) = 0,$$

nel quale J esprime il momento di inerzia, B la costante di attrito viscoso dell'asse in rotazione e T una coppia applicata esternamente. Riassumendo si hanno le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \\ v = Ri + L \frac{di}{dt} + e \\ e = K L_e i_e \omega = K \phi_e \omega \\ c = K L_e i_e i \\ -J \frac{d\omega}{dt} - B\omega + c + T = 0. \end{array} \right.$$

Sono cinque equazioni differenziali nelle sette incognite $v_e, i_e, v, i, e, c, \omega$. Si possono eliminare due equazioni e le due incognite e, c ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{l} v_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \\ v = Ri + L \frac{di}{dt} + (K L_e) i_e \omega \\ -J \frac{d\omega}{dt} - B\omega + (K L_e) i_e i + T = 0. \end{array} \right.$$

Si ottengono quindi tre equazioni nelle sei incognite $v_e, i_e, v, i, \omega, T$. Si tratta quindi di un sistema non lineare con tre ingressi. È naturale in questo caso porre come uscita ω . Osservando la prima equazione si nota che essa rappresenta un sistema che lega v_e con i_e quindi è necessario prendere v_e (o i_e) come uno degli ingressi. Come i rimanenti due ingressi possiamo prendere v (o i) e T . A questo punto possiamo procedere fissando degli ingressi nominali costanti $\bar{v}_e, \bar{v}, \bar{T}$ dai quali determinare le evoluzioni di equilibrio, cioè i valori di $\bar{i}_e, \bar{i}, \bar{\omega}$ che risolvono le equazioni statiche

$$\begin{cases} \bar{v}_e = R_e \bar{i}_e \\ \bar{v} = R \bar{i} + (KL_e) \bar{i}_e \bar{\omega} \\ -B \bar{\omega} + (KL_e) \bar{i}_e \bar{i} + \bar{T} = 0. \end{cases}$$

e poi linearizzare nell'intorno di tali punti di equilibrio. Procediamo invece ad analizzare un caso semplificato.

In effetti, nella maggior parte delle applicazioni si applica come ingresso v_e una tensione costante. Il sistema del primo ordine (come visto in precedenza) reagisce con una uscita $i_e(t)$ che tende a diventare costante (vedi risposta al gradino di un sistema del primo ordine). In questo caso si può supporre che, dopo un breve transitorio, anche $i_e(t)$, e quindi anche il flusso $\phi_e(t) = L_e i_e(t)$, sia costante. Questa situazione descrive anche i motori in continua nei quali, al posto del circuito di eccitazione, c'è un magnete permanente che induce un flusso magnetico $\phi_e(t)$ costante. In questo caso, definendo la costante

$$H := (KL_e) i_e$$

si ottiene che il secondo sistema a due ingressi v, T e uscita ω diventa lineare

$$\begin{cases} Ri + L \frac{di}{dt} = v - H\omega \\ J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = Hi + T \end{cases} \quad (1.2)$$

Si osservi che la prima equazione può essere interpretata come un sistema elettrico RL con ingresso la tensione $v - H\omega$ e uscita la corrente i . Questo sistema a funzione di trasferimento

$$\frac{1}{Ls + R}$$

La seconda equazione invece può essere interpretata come un sistema meccanico rotatorio con ingresso la coppia $Hi + T$ e uscita la velocità angolare ω . Questo sistema a funzione di trasferimento

$$\frac{1}{Js + B}$$

Quindi la dinamica complessiva può essere ricavata interpretando le precedenti equazioni attraverso lo schema a blocchi mostrato nella figura ??.

Attraverso l'algebra degli schemi a blocchi si possono ottenere le funzioni di trasferimento d'interesse. Ad esempio, se ci interessa la funzione di trasferimento tra

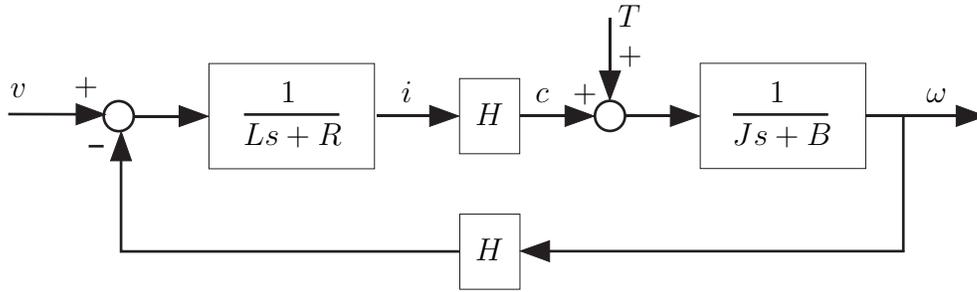


Figure 1.15:

l'ingresso v e l'uscita ω , si pone $T = 0$ e si trova che essa vale

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{\frac{H}{(Ls + R)(Js + B)}}{1 + \frac{H^2}{(Ls + R)(Js + B)}} = \frac{H}{LJs^2 + (RJ + LB)s + (RB + H^2)}$$

mentre per il calcolo della funzione di trasferimento tra l'ingresso T e l'uscita ω , si pone $v = 0$ e si trova che essa vale

$$W_{T,\omega}(s) = \frac{\frac{1}{Js + B}}{1 + \frac{H^2}{(Ls + R)(Js + B)}} = \frac{Ls + R}{LJs^2 + (RJ + LB)s + (RB + H^2)}$$

Consideriamo ora un sistema meccanico rotatorio. Questo sistema può essere descritto da una funzione di trasferimento $M(s)$ che mette in relazione l'ingresso, che è la coppia T applicata all'asse del sistema meccanico, con l'uscita, che è la velocità angolare ω dell'asse del sistema meccanico. Se colleghiamo rigidamente l'asse del motore con l'asse del sistema meccanico, lo schema a blocchi che ne risulta è quello illustrato nella figura ???. Il sistema meccanico ha ora funzione di trasferimento

$$\frac{\frac{1}{Js + B}}{1 + \frac{1}{(Js + B)M(s)}} = \frac{1}{(Js + B) + 1/M(s)}$$

Se J e B sono "piccoli", allora la precedente funzione di trasferimento si può approssimare con $M(s)$.

Nelle configurazioni proposte finora per il controllo del motore in continua si assume che l'ingresso di controllo sia la tensione. Esiste un'altra configurazione che permette di controllare direttamente la corrente del motore che porta a funzioni di trasferimento più semplici e quindi a problemi di controllo di più semplice soluzione. Si consideri infatti il seguente schema elettrico mostrato nella figura ???. In questo schema, assumendo che l'operazionale abbia amplificazione infinita, si ha che le tensioni v_- e v_+ coincidono e quindi la corrente i che attraversa il motore vale $i = v/R_1$.

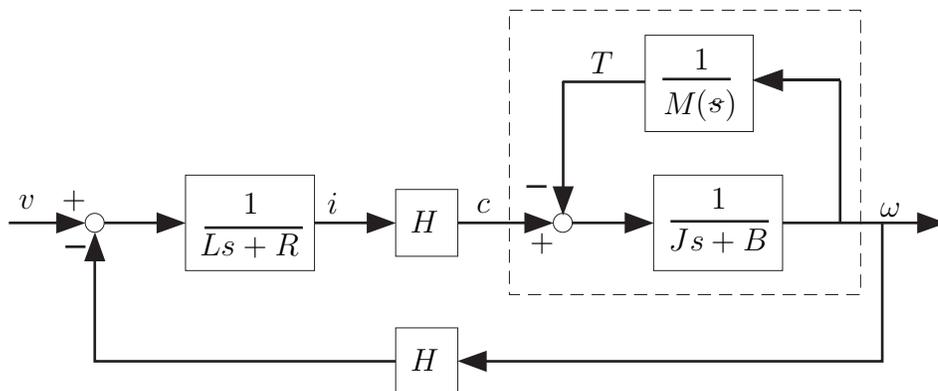


Figure 1.16:

Da ciò e dalla seconda equazione della formula (??) possiamo desumere che la funzione di trasferimento tra la tensione v e la velocità angolare ω è

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{H/R_1}{Js + B}$$

e che la funzione di trasferimento tra la coppia T e la velocità angolare ω è

$$W_{T,\omega}(s) = \frac{1}{Js + B}$$

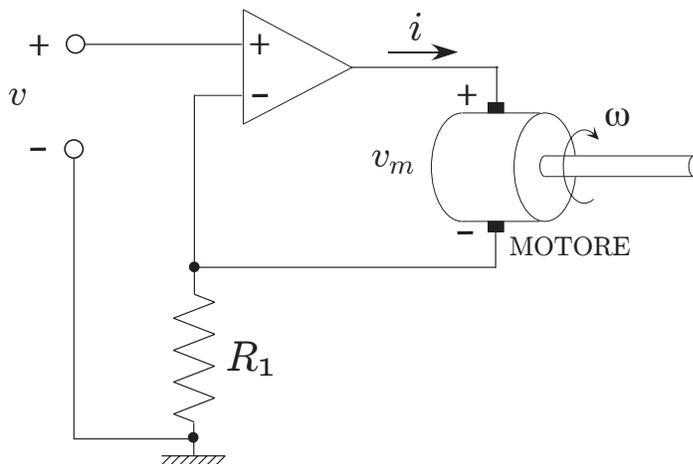


Figure 1.17:

Un'analisi piu' accurata porterebbe alle seguenti equazioni

$$\begin{cases} Ri + L\frac{di}{dt} = v_m - H\omega \\ J\frac{d\omega}{dt} + B\omega = Hi + T \\ A(v_+ - v_-) = R_1i + v_m \end{cases} \quad (1.3)$$

dove $v_+ = v$ e $v_- = R_1 i$. Passando alle trasformate di Laplace si ottiene

$$\begin{cases} (Ls + R)I(s) = V_m(s) - H\Omega(s) \\ (Js + B)\Omega(s) = HI(s) + T(s) \\ A(V(s) - R_1 I(s)) = R_1 I(s) + V_m(s) \end{cases} \quad (1.4)$$

Dall'ultima equazione si ottiene

$$V_m(s) = AV(s) - (A + 1)R_1 I(s)$$

che sostituita nelle altre due da'

$$\begin{cases} (Ls + R + (A + 1)R_1)I(s) = AV(s) - H\Omega(s) \\ (Js + B)\Omega(s) = HI(s) + T(s) \end{cases} \quad (1.5)$$

da cui si ricavano le funzioni di trasferimento

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{AH}{(Ls + R + (A + 1)R_1)(Js + B) + H^2}$$

$$W_{T,\omega}(s) = \frac{Ls + R + (A + 1)R_1}{(Ls + R + (A + 1)R_1)(Js + B) + H^2}$$

Si osservi che se A e' grande, le precedenti funzioni di trasferimento sono approssimabili con

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{H/R_1}{Js + B}, \quad W_{T,\omega}(s) = \frac{1}{Js + B}$$

ma che il segno di A influenza la stabilita'.

1.5 Modellizzazione della dinamica di popolazioni

Le equazioni differenziali possono essere usate per modellare l'evoluzione di popolazioni. Supponiamo che il numero reale $x(t)$ descriva il numero di individui appartenenti a una popolazione. Si suppone che questo numero di individui sia grande in modo tale che la granularita' dovuta al fatto che il numero e' in realta' intero sia trascurabile. Siccome in un intervallo di tempo ogni individuo ha una certa probabilita' di generare un individuo e ha una certa probabilita' di morire possiamo ipotizzare che il flusso di individui che nasce $F_n(t)$ e il flusso di individui che muore $F_m(t)$ siano proporzionali al numero di individui nella popolazione. Inoltre possiamo introdurre un flusso di popolazione $u(t)$ che puo' rappresentare la migrazione da o verso un'altra popolazione. Quindi il numero di nati e di morti durante un intervallo di tempo sara' proporzionale al numero di individui. Quindi un modello ragionevole e' dato dall'equazione

$$x^{(1)}(t) = F_n(t) - F_m(t) + u(t) = nx(t) - mx(t) + u(t) = (n - m)x(t) = ax(t) + u(t)$$

dove n e' la natalita', m e' la mortalita' della popolazione e $a = n - m$ e' il tasso di crescita pro capite. Nel caso che sia $u(t) = 0$, la soluzione che e'

$$x(t) = x(0)e^{at}$$

sara' convergente a zero se $a < 0$ (estinzione), sara' costante per $a = 0$ e sara' divergente per $a > 0$ (esplosione demografica). In un modello piu' realistico ha senso rendere la natalita' e la mortalita' dipendenti dalla popolazione $x(t)$. Piu' precisamente e' sensato rendere il tasso di crescita pro capite funzione decrescente di $x(t)$ ad esempio prendendo come tasso di crescita

$$a \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right)$$

che e' positivo per $x(t) < K$ e diventa negativo per $x(t) > K$ che indica l'esistenza di un valore critico di popolazione che separa la situazione di tasso positivo (popolazione crescente) con la situazione di tasso negativo (popolazione decrescente). In tal caso l'equazione differenziale diventa

$$x^{(1)}(t) = a \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) x(t) + u(t) = f(x(t)) + u(t)$$

Questo modello e' nonlineare e per ingresso nullo $u(t) = 0$ ha due evoluzioni di equilibrio $x(t) = \bar{x}$ che corrispondono alle soluzioni dell'equazione $a(1 - \bar{x}/K)\bar{x} = 0$ che sono $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = K$. Si osservi che

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \left(1 - \frac{2x}{K} \right)$$

Quindi la linearizzazione nell'intorno di \bar{x}_1 e'

$$x^{(1)}(t) = ax(t) + u(t)$$

e la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $x(t)$ e'

$$W(s) = \frac{1}{s - a}$$

La linearizzazione nell'intorno di \bar{x}_2 e'

$$x^{(1)}(t) = -ax(t) + u(t)$$

e la funzione di trasferimento dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $x(t)$ e'

$$W(s) = \frac{1}{s + a}$$

Si puo' dimostrare che la soluzione $x(t)$ del modello nonlineare converge sempre verso l'equilibrio \bar{x}_2 .

Questo modello puo' essere esteso per descrivere popolazioni associate a varie aree geografiche che si muovono tra queste. In questo caso le variazioni delle popolazioni sono influenzate dai tassi di crescita intrinseci e dai flussi tra regioni. Puo' essere ragionevole assumere che il flusso $F_{ij}(t)$ dalla regione i alla regione j dipenda dall'entita' della popolazione di partenza e di arrivo, cioe'

$$F_{ij}(t) = f_{ij}(x_i(t), x_j(t))$$

dove $f_{ij}(\cdot)$ e' una funzione di due variabili. In questo maniera si ottiene

$$\begin{aligned} x_i^{(1)}(t) &= a_i x_i(t) - \sum_{h \neq i} F_{ih}(t) + \sum_{h \neq i} F_{hi}(t) + u_i(t) \\ &= a_i x_i(t) - \sum_{h \neq i} f_{ih}(x_i(t), x_h(t)) + \sum_{h \neq i} f_{hi}(x_h(t), x_i(t)) + u_i(t) \end{aligned}$$

Tutte queste equazioni differenziali formano un modello di stato nonlineare.

In certi casi, il flusso $F_{ij}(t)$ dalla regione i alla regione j puo' essere assunto ragionevolmente proporzionale all'entita' della popolazione di partenza e quindi

$$F_{ij}(t) = a_{ij} x_i(t)$$

In questo caso

$$\begin{aligned} x_i^{(1)}(t) &= a_i x_i(t) - \sum_{h \neq i} F_{ih}(t) + \sum_{h \neq i} F_{hi}(t) + u_i(t) \\ &= a_i x_i(t) - \sum_{h \neq i} a_{ih} x_i(t) + \sum_{h \neq i} a_{hi} x_h(t) + u_i(t) \\ &= \left(a_i - \sum_{h \neq i} a_{ih} \right) x_i(t) + \sum_{h \neq i} a_{hi} x_h(t) + u_i(t) \end{aligned}$$

dalle quali si ottiene un modello di stato lineare.

Un variante puo' essere ottenuta assumendo che il flusso $F_{ij}(t)$ dalla regione i alla regione j sia proporzionale alla differenza tra la popolazione di partenza e la popolazione di arrivo e quindi

$$F_{ij}(t) = a_{ij}(x_i(t) - x_j(t))$$

In questo caso si ottiene

$$\begin{aligned} x_i^{(1)}(t) &= a_i x_i(t) - \sum_{h \neq i} F_{ih}(t) + \sum_{h \neq i} F_{hi}(t) + u_i(t) \\ &= a_i x_i(t) - \sum_{h \neq i} a_{ih}(x_i(t) - x_h(t)) + \sum_{h \neq i} a_{hi}(x_h(t) - x_i(t)) + u_i(t) \\ &= \left(a_i - \sum_{h \neq i} (a_{ih} + a_{hi}) \right) x_i(t) + \sum_{h \neq i} (a_{ih} + a_{hi}) x_h(t) + u_i(t) \end{aligned}$$

Anche in questo caso si ottiene un modello di stato lineare.

Esempio 1.9 Dinamica di due popolazioni

Supponiamo di avere due popolazioni di numerosita' $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e che $F_{12} = a_{12}(x_1 - x_2)$ e $F_{21} = a_{21}(x_2 - x_1)$. Supponiamo infine che esista un flusso u verso la seconda popolazione. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= a_1x_1 + (a_{12} + a_{21})(x_2 - x_1) = a_1x_1 + \alpha(x_2 - x_1) \\x_2^{(1)} &= a_2x_2 + (a_{12} + a_{21})(x_1 - x_2) + u = a_2x_2 + \alpha(x_1 - x_2) + u\end{aligned}$$

dove $\alpha = a_{12} + a_{21}$. Vogliamo determinare la funzione di trasferimento tra ingresso u e uscita $y = x_1$. Passando alla trasformata di Laplace

$$\begin{aligned}sX_1 &= a_1X_1 + \alpha(X_2 - X_1) \\sX_2 &= a_2X_2 + \alpha(X_1 - X_2) + U\end{aligned}$$

e quindi

$$X_2 = \frac{\alpha}{s - a_2 + \alpha}X_1 + \frac{1}{s - a_2 + \alpha}U$$

Sostituendo nella prima equazione

$$(s - a_1 + \alpha)X_1 = \alpha X_2 = \frac{\alpha^2}{s - a_2 + \alpha}X_1 + \frac{\alpha}{s - a_2 + \alpha}U$$

e quindi

$$X_1 = \frac{\alpha}{(s - a_1 + \alpha)(s - a_2 + \alpha) - \alpha^2}U$$

da cui si ricava che la funzione di trasferimento e'

$$W(s) = \frac{\alpha}{(s - a_1 + \alpha)(s - a_2 + \alpha) - \alpha^2}$$

1.6 Modellizzazione delle epidemie

Esistono quindi vari modelli per descrivere l'andamento dei contagiati durante l'evoluzione di una epidemia che differiscono a seconda del tipo di malattia e dalla precisione con la quale vogliamo descriverne la dinamica. Questi modelli assomigliano ai modelli di popolazioni con flussi tra popolazioni. In questo caso le popolazioni non sono suddivise per la loro allocazione geografica, ma piuttosto per le caratteristiche del processo di infezione dei loro individui. I principali modelli sono il modello SI, il modello SIS e il modello SIR.

Nel modello SI (Susceptible-Infected) ogni individuo puo' appartenere a due categorie, i suscettibili e gli infetti, e un individuo suscettibile puo' infettarsi. Se $x(t)$ rappresenta il numero di individui infetti e $s(t)$ rappresenta il numero di individui suscettibili, il flusso di individui suscettibili che diventa infetto $F_{sx}(t)$ dipende dalla

frequenza di incontri tra suscettibili e infetti ed e' quindi proporzionale al prodotto delle due popolazioni. Quindi la dinamica e'

$$\begin{aligned} s^{(1)}(t) &= -F_{sx}(t) = -as(t)x(t) \\ x^{(1)}(t) &= F_{sx}(t) = as(t)x(t) \end{aligned}$$

Siccome in questo modello la somma $s(t) + x(t)$ e' costante, allora ponendo questa quantita' uguale a N si ha che la dinamica e' determinata dalle equazioni

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= a(N - x(t))x(t) \\ s(t) &= N - x(t) \end{aligned}$$

Gli equilibri sono $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = N$ e la linearizzazione nell'intorno di questi due equilibri e'

$$\tilde{x}^{(1)}(t) = aN\tilde{x}(t) \quad \tilde{x}^{(1)}(t) = -aN\tilde{x}(t)$$

il primo instabile e il secondo stabile. In effetti l'andamento di $x(t)$ si dimostra essere crescente e allontanarsi da 0 e convergere verso N .

Il modello SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) estende il modello precedente perche' ammette che esista anche un flusso $F_{xs}(t)$ si individui che guariscono, ma suppone che questi guariti possano infettarsi di nuovo e quindi tornino nella categoria dei suscettibili. E' ragionevole supporre che $F_{sx}(t)$ sia proporzionale al numero di infetti. Quindi il modello diventa

$$\begin{aligned} s^{(1)}(t) &= -F_{sx}(t) + F_{xs}(t) = -as(t)x(t) + bx(t) \\ x^{(1)}(t) &= F_{sx}(t) - F_{xs}(t) = as(t)x(t) - bx(t) \end{aligned}$$

Notando anche qui che $s(t) + x(t)$ e' costante, si puo' riscrivere il modello nel modo seguente

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= a(N - x(t))x(t) - bx(t) \\ s(t) &= N - x(t) \end{aligned}$$

Gli equilibri sono $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_2 = N - b/a$ e la linearizzazione in questi due equilibri e'

$$\tilde{x}^{(1)}(t) = (aN - b)\tilde{x}(t) \quad \tilde{x}^{(1)}(t) = -(aN - b)\tilde{x}(t)$$

In questo modello possiamo distinguere due casi. Se $b < aN$ allora l'equilibrio \bar{x}_1 e' instabile e l'equilibrio \bar{x}_2 e' stabile. In effetti l'andamento di $x(t)$ si dimostra convergere verso \bar{x}_2 che corrisponde a un valore costante maggiore di zero di infetti. Se invece $b > aN$ allora l'equilibrio \bar{x}_1 e' stabile e l'equilibrio \bar{x}_2 e' instabile. In effetti l'andamento di $x(t)$ si dimostra convergere verso \bar{x}_1 che corrisponde alla estinzione dell'epidemia.

Infine nel modello SIR (Susceptible-Infected-Recovered) ammettiamo che esista una terza categoria di individui, i guariti, che pero' non possono piu' infettarsi perche'

immuni dalla malattia. Se $r(t)$ e' il numero di individui guariti, il flusso $F_{xs}(t)$ diventa $F_{xr}(t)$ e rimane proporzionale al numero di infetti. Il modello diventa

$$\begin{aligned} s^{(1)}(t) &= -F_{sx}(t) = -as(t)x(t) \\ x^{(1)}(t) &= F_{sx}(t) - F_{xr}(t) = as(t)x(t) - bx(t) \\ r^{(1)}(t) &= F_{sx}(t) - F_{xr}(t) = bx(t) \end{aligned}$$

Notando anche qui che $s(t) + x(t) + r(t)$ e' costante, un modello equivalente e' il seguente

$$\begin{aligned} s^{(1)}(t) &= -as(t)x(t) \\ x^{(1)}(t) &= as(t)x(t) - bx(t) \\ r(t) &= N - s(t) - x(t) \end{aligned}$$

Questo modello ha un solo equilibrio corrispondente a $\bar{x} = 0, \bar{s} = 0$. Il modello linearizzato nell'intorno di tale equilibrio e'

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{(1)}(t) &= 0 \\ \tilde{x}^{(1)}(t) &= -b\tilde{x}(t) \end{aligned}$$

Esistono estensioni di questi modelli nei quali si aggiungono altri flussi tra classi di individui o in cui si aggiungono anche altre classi di individui (ad esempio individui vaccinati, individui in quarantena, ecc.).

1.7 Dinamica dei flussi di liquidi tra serbatoi

Le equazioni differenziali viste in precedenza sono simili a quelle adatte a modellare flussi di liquidi tra serbatoi. In questo caso $x_i(t)$ rappresenta il volume nel serbatoio i e l'evoluzione di questa variabile e' determinata dai flussi da e verso altri serbatoi, cioe'

$$x_i^{(1)}(t) = - \sum_{h \neq i} F_{ih}(t) + \sum_{h \neq i} F_{hi}(t) - F_{i0}(t) + F_{0i}(t)$$

Abbiamo introdotto un serbatoio fittizio 0 che e' utile per rappresentare flussi che entrano da e escono verso l'esterno della rete di serbatoi. Per questo sistema, il flusso e' determinato dalla pressione del serbatoio di partenza e quindi dal volume di questo serbatoio. In questo caso abbiamo

$$F_{ij}(t) = f_{ij}(x_i(t))$$

dove $f_{ij}(\cdot)$ e' una funzione di una variabile. In certi casi, si puo' assumere che questa funzione sia lineare, cioe'

$$F_{ij}(t) = a_{ij}x_i(t)$$

Alternativamente il flusso puo' essere comandato tramite valvole o pompe. In questo caso ha senso modellarlo come un ingresso o come un disturbo, a seconda se abbiamo accesso o meno alla valvola o alla pompa.

Esempio 1.10 Dinamica dei flussi tra tre serbatoi

Supponiamo di avere tre serbatoi mostrati in figura. Il flusso che entra nel serbatoio 3 e' modellato come un disturbo e il flusso dal serbatoio 1 al serbatoio 2 e' controllato e quindi e' modellato come un ingresso. La dinamica dei flussi si puo' descrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= -a_{10}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 - u \\x_2^{(1)} &= -a_{21}x_2 + a_{32}x_3 + u \\x_3^{(1)} &= -a_{32}x_3 - a_{31}x_3 + d\end{aligned}$$

Supponiamo di voler calcolare le funzioni di trasferimento da u e d all'uscita $y = x_1$. Passando alla trasformata di Laplace

$$\begin{aligned}sX_1 &= -a_{10}X_1 + a_{21}X_2 + a_{31}X_3 - U \\sX_2 &= -a_{21}X_2 + a_{32}X_3 + U \\sX_3 &= -a_{32}X_3 - a_{31}X_3 + D\end{aligned}$$

Eliminando dalle equazioni precedenti le variabili X_2 e X_3 si ottiene

$$X_1 = \frac{a_{31}s + a_{21}a_{31} + a_{21}a_{32}}{(s + a_{31} + a_{32})(s + a_{21})(s + a_{10})}D + \frac{-s}{(s + a_{21})(s + a_{10})}U$$

da cui si ricava che la funzione di trasferimento da u a y e'

$$W_{uy}(s) = \frac{-s}{(s + a_{21})(s + a_{10})}$$

e la funzione di trasferimento da d a y e'

$$W_{dy}(s) = \frac{a_{31}s + a_{21}a_{31} + a_{21}a_{32}}{(s + a_{31} + a_{32})(s + a_{21})(s + a_{10})}$$

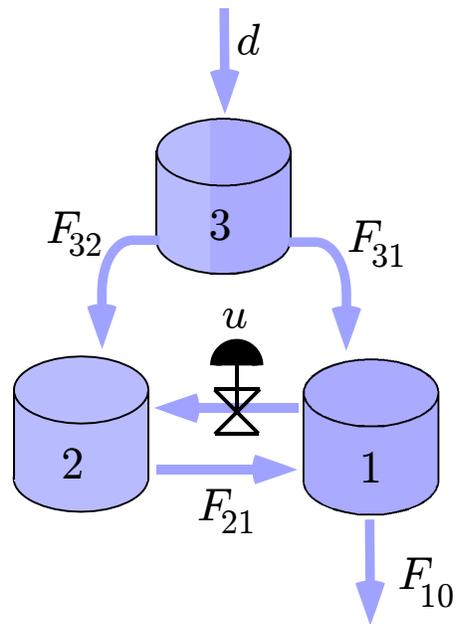


Figure 1.18: