

# Chapter 1

## Modelli descritti da equazioni differenziali

Una gran parte dei fenomeni fisici di interesse per l'ingegneria può essere descritta in maniera soddisfacente da equazioni differenziali. In questo capitolo saranno proposti due tipi di modelli descritti da equazioni differenziali. Un modello è dato dalle equazioni differenziali scalari. Un modello alternativo è basato sull'introduzione di variabili aggiuntive, dette variabili di stato.

Un'altra classe di modelli è basata su una rappresentazione grafica che descrive il legame tra i vari segnali attraverso l'utilizzo di blocchi e di collegamenti tra loro. Queste rappresentazioni sono dette schemi a blocchi.

Per studiare le proprietà di questi modelli è necessario prima studiare alcune classi speciali di segnali e introdurre delle operazioni su di essi.

### 1.1 Segnali esponenziali e sinusoidali e impulso di Dirac

In questa dispensa supporremo che tutti i segnali (a meno che non sia diversamente specificato) siano nulli per  $t < 0$ .

#### Segnali esponenziali e sinusoidali e loro generalizzazioni

1) Un segnale esponenziale e' così' definito

$$Ae^{\sigma t}, \quad t \geq 0$$

dove  $A$  e' un numero reale. Nella figura 1.1 sono illustrati gli andamenti dei segnali esponenziali al variare del valore di  $\sigma$ .

2) Un segnale sinusoidale e' così' definito

$$A \cos(\omega t + \phi), \quad t \geq 0$$

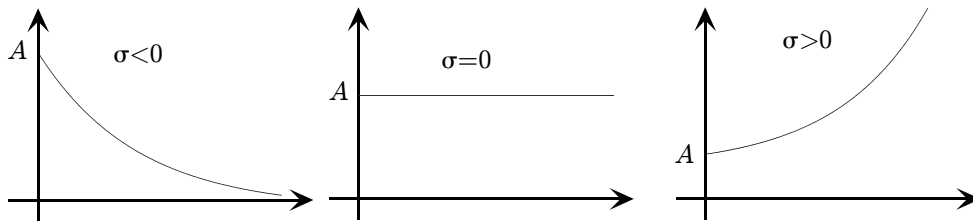


Figure 1.1:

dove  $A, \omega > 0$  e  $\phi \in \mathbb{R}$ . Si noti che l'ampiezza della sinusoide precedente e'  $A$  mentre il suo periodo e'  $T = 2\pi/\omega$  e quindi la sua frequenza e'  $f = 1/T = \omega/2\pi$  da cui possiamo desumere che  $\omega = 2\pi f$ . Nella figura 1.2 e' illustrato l'andamento del segnale sinusoidale. Mostriamo ora che e' conveniente rappresentare i segnali sinusoidali attraverso segnali a valori complessi. In effetti, si noti che

$$A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[Ae^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re}[Ae^{j\phi} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[ae^{j\omega t}]$$

dove

$$a = Ae^{j\phi} \in \mathbb{C}$$

Si noti che  $A = |a|$  e  $\phi = \angle a$ , dove il simbolo  $\angle$  indica la fase di un numero complesso.

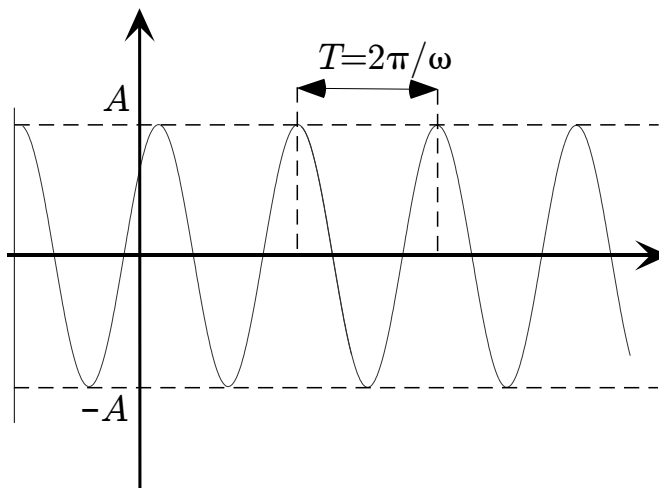


Figure 1.2:

**3)** Un altro segnale rilevante, che generalizza il segnale esponenziale e quello sinusoidale e'

$$Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Si tratta di segnali sinusoidali a frequenza  $f = \omega/2\pi$  la cui ampiezza  $e^{\sigma t}$  varia con  $t$  in maniera esponenziale. Nella figura 1.3 sono illustrati gli andamenti di questa classe di segnali al variare del valore di  $\operatorname{Re}[p]$ .

Si noti che

$$Ae^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[Ae^{\sigma t} e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re}[Ae^{\sigma t + j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re}[Ae^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t}] = \operatorname{Re}[ae^{pt}]$$

dove

$$p = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} \quad a = Ae^{j\phi} \in \mathbb{C}$$

Quindi  $\sigma = \operatorname{Re}[p]$  e  $\omega = \operatorname{Im}[p]$ , mentre  $A = |a|$  e  $\phi = \angle a$ .

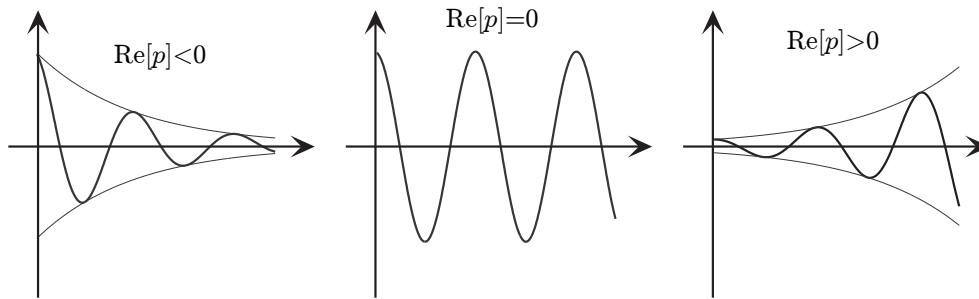


Figure 1.3:

4) Infine il segnale più generale considerato è

$$At^n e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi), \quad t \geq 0$$

che ammettono la seguente rappresentazione

$$At^n e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}[At^n e^{(\sigma + j\omega)t + j\phi}] = \operatorname{Re}[t^n Ae^{j\phi} e^{(\sigma + j\omega)t}] = \operatorname{Re}[at^n e^{pt}]$$

dove

$$p = \sigma + j\omega \in \mathbb{C} \quad a = Ae^{j\phi} \in \mathbb{C}$$

Nota che se  $p$  e  $a$  sono reali allora  $at^n e^{pt}$  è un segnale a valori reali. Nella figura 1.4 sono illustrati gli andamenti di questa classe di segnali nel caso di  $p$  reale.

Nel caso di  $p$  complesso,  $at^n e^{pt}$  è un segnale a valori complessi. Come vedremo, l'utilizzo di segnali a valori complessi permette una notevole semplificazione nei calcoli per la determinazione dell'antitrasformata di Laplace di una funzione razionale.

### Segnali a gradino, rampa, rampa parabolica e generalizzazioni

Altri segnali importanti sono i seguenti

$$\delta^{(-k)}(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & t \geq 0 \end{cases}$$

i cui andamenti sono illustrati in figura 1.5. In realtà sono casi particolari dei segnali visti sopra quando si assume che  $p = 0$  e  $a = 1$ . Si noti che

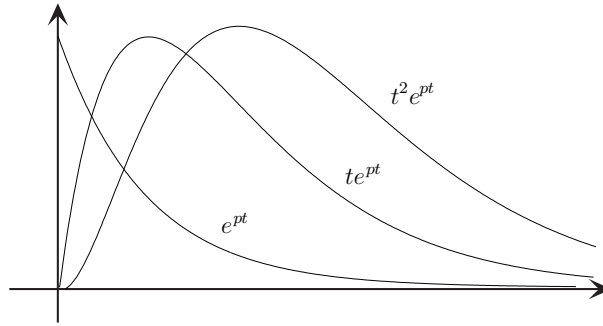


Figure 1.4:

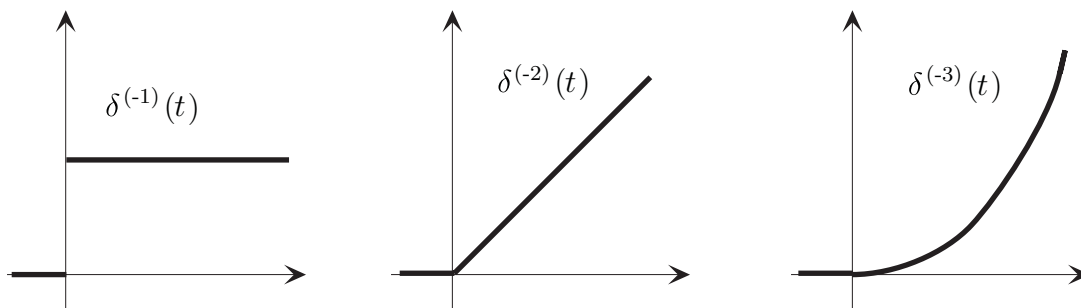


Figure 1.5:

$$\frac{d}{dt} \delta^{(-k)}(t) = \delta^{(-k+1)}(t)$$

e che

$$\int_{-\infty}^t \delta^{(-k)}(\tau) d\tau = \delta^{(-k-1)}(t)$$

### Segnale delta di Dirac

Concludiamo ora introducendo un segnale di caratteristiche molto particolari. Sia

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ n & \text{se } 0 \leq t < 1/n \\ 0 & \text{se } t \geq 1/n \end{cases}$$

Si noti che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 1$$

E' chiaro che il limite per  $n$  che tende all'infinito di  $f_n(t)$  non e' una funzione. Intuitivamente possiamo immaginare che per  $n$  molto grande la funzione sara' un impulso di ampiezza elevata e durata piccola con area sempre uguale a uno. In un qualche senso (nello spazio delle distribuzioni) questo limite esiste e il segnale

(distribuzione) limite e' detto **impulso di Dirac** ed e' indicato col simbolo  $\delta(t)$ . Si osservi che, siccome  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1$ , allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Piu' in generale si ha che

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

e quindi  $\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \delta^{(-1)}(t)$ . Si noti d'altra parte che

$$\frac{d}{dt}\delta^{(-1)}(t) = \delta(t)$$

Si osservi che, siccome il supporto (cioe' gli istanti di tempo dove il segnale e' non nullo) di  $\delta(t)$  e' concentrato nell'origine, quando moltiplico  $\delta(t)$  per una funzione continua nell'origine  $g(t)$ , allora solo il valore che  $g(t)$  assume per  $t = 0$  risulta rilevante. Infatti si puo' dimostrare che

$$\delta(t)g(t) = \delta(t)g(0)$$

Piu' in generale, poiche'  $\delta(t - T)$  e' la traslazione del segnale  $\delta(t)$  in modo che l'impulso diventa centrato in  $T$ , si ha che

$$\delta(t - T)g(t) = \delta(t - T)g(T)$$

Questa viene detta proprieta' di campionamento dell'impulso. Come conseguenza diretta di questa proprieta' abbiamo che

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau - T)g(\tau)dt = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - T)g(T)dt = g(T) \int_{-\infty}^t \delta(\tau - T)dt = \begin{cases} 0 & \text{se } t < T \\ g(T) & \text{se } t > T \end{cases}$$

## 1.2 Prodotto di convoluzione di segnali

A partire da due segnali  $u(t), w(t)$  se ne puo' costruire un'altro  $y(t)$  nel modo seguente

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

Definiamo  $y(t)$  come prodotto di convoluzione di  $u(t), w(t)$  e scriviamo  $y = w * u$ .

Per avere una idea concreta di come opera il prodotto di convoluzione, vengono proposti due esempi.

**Esempio 1** Supponiamo che  $w(t) = u(t) = \delta^{(-1)}(t)$  segnale a gradino. Vogliamo determinare  $(w * u)(t)$ . Si osservi che il segnale  $w(t - \tau)$  al variare di  $\tau$  vale uno

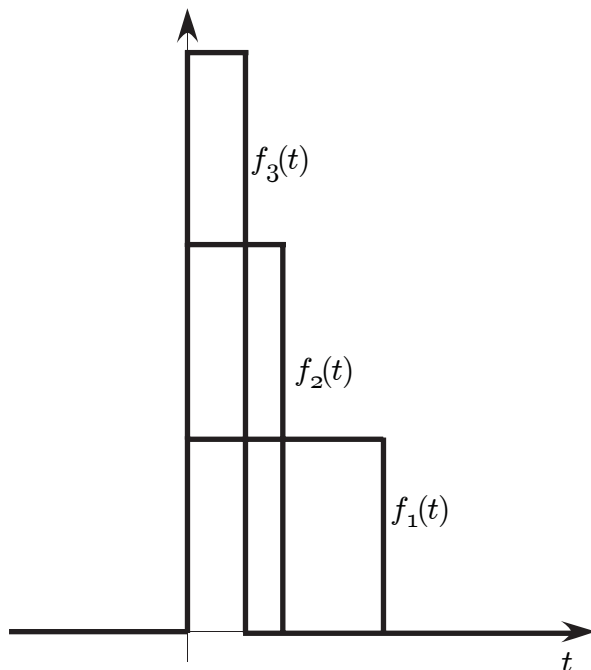


Figure 1.6:

per  $\tau < t$  e vale zero per  $\tau > t$  (vedi il secondo grafico in figura 1.7). Da cio' desumiamo che il segnale prodotto  $w(t - \tau)u(\tau)$  e' il segnale identicamente nullo se  $t < 0$  altrimenti e' un segnale che vale uno per  $0 < \tau < t$  e vale zero per gli altri valori di  $\tau$  (vedi il terzo grafico in figura 1.7). Quindi l'integrale  $w(t - \tau)u(\tau)$  coincide con l'area sotto tale segnale che e' pari a  $t$ . Da questi ragionamenti segue che  $(w * u)(t) = \delta^{(-2)}(t)$  cioe' la convoluzione di due gradini coincide con la rampa.

**Esempio 2** Supponiamo che  $u(t) = \delta^{(-2)}(t)$  segnale a rampa e che

$$w(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ e } t > 1 \\ 1 & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$$

(vedi il primo grafico in figura 1.8). Vogliamo determinare  $(w * u)(t)$ . Il terzo grafico in figura 1.8 mostra gli andamenti del segnale  $w(t - \tau)$  nei tre casi in cui  $t < 0$ ,  $0 < t < 1$  e  $t > 1$ . Il quarto grafico in figura 1.8) mostra gli andamenti del segnale  $w(t - \tau)u(\tau)$  nei tre casi precedenti. Da questi desumiamo che il segnale prodotto  $w(t - \tau)u(\tau)$  e' il segnale identicamente nullo se  $t < 0$ , un segnale triangolare se  $0 < t < 1$  e trapezoidale per  $t > 1$ . Per determinare la convoluzione dobbiamo valutare le aree sotto tali segnali. Da questa valutazione possiamo concludere che

$$(w * u)(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t^2/2 & \text{se } 0 < t < 1 \\ t - 1/2 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

(vedi il ultimo grafico in figura 1.8).

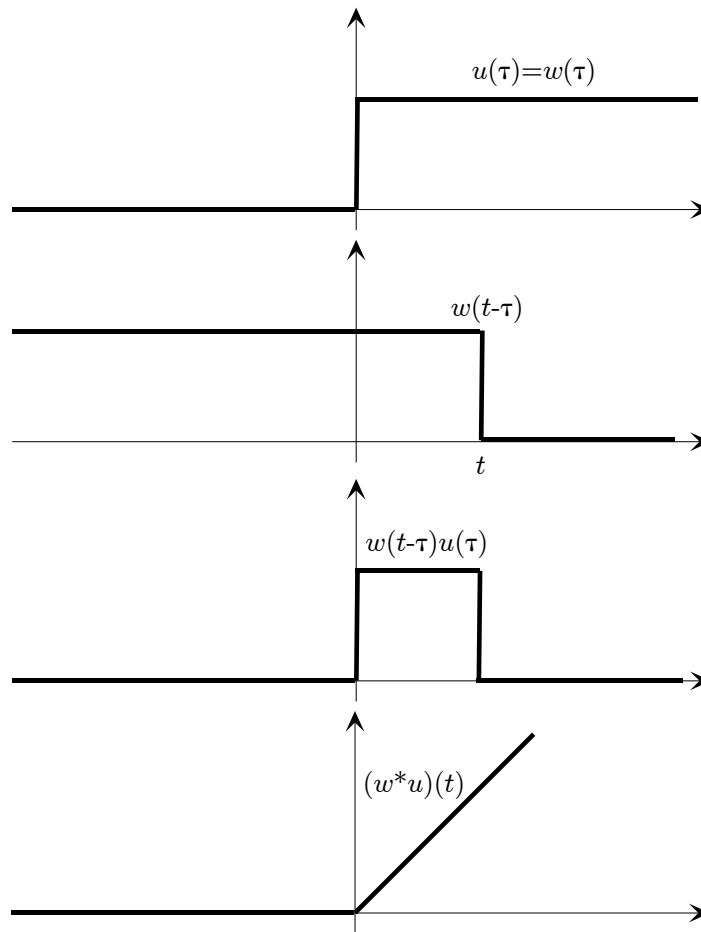


Figure 1.7:

altrimenti e' un segnale che vale uno per  $0 < \tau < t$  e vale zero per gli altri valori di  $\tau$  (vedi il terzo grafico in figura 1.7). Quindi l'integrale  $w(t - \tau)u(\tau)$  coincide con l'area sotto tale segnale che e' pari a  $t$ . Da questi ragionamenti segue che  $(w * u)(t) = \delta^{(-2)}(t)$  cioe' la convoluzione di due gradini coincide con la rampa.

Con un semplice cambiamento di variabile si dimostra che

$$(w * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

Si noti che

$$w * u = u * w$$

e cioe' il prodotto di convoluzione soddisfa la proprieta' commutativa. Si noti inoltre che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)\delta(\tau)d\tau = w(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = w(t)$$

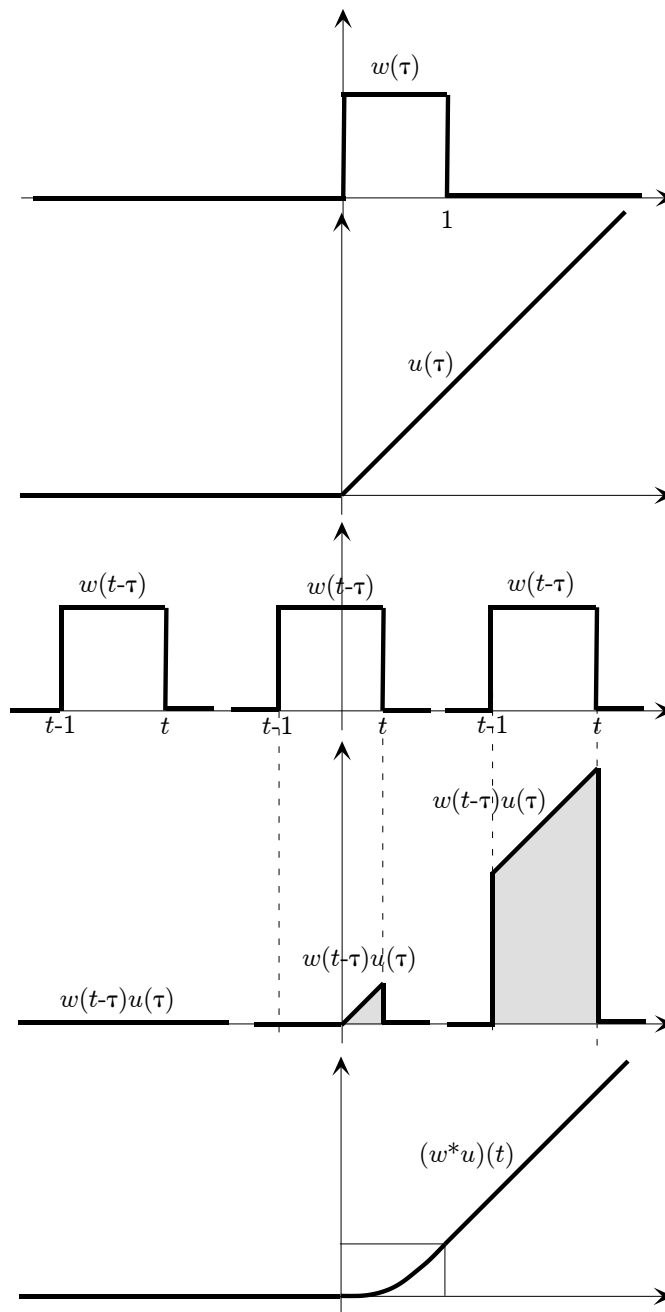


Figure 1.8:

Possiamo desumere che

$$w * \delta = w$$

e cioè' il delta di Dirac ha le proprietà dell'elemento neutro rispetto al prodotto di convoluzione. Si può dimostrare che

$$w * (u_1 + u_2) = w * u_1 + w * u_2.$$



Si noti infine che, se i segnali di partenza sono con supporto in  $[0, +\infty)$ , cioè sono nulli prima di zero, allora anche la loro convoluzione ha supporto in  $[0, +\infty)$ , e si ha che

$$(w * u)(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \int_0^t w(t - \tau)u(\tau)d\tau & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

### 1.3 Le trasformate di Laplace

La trasformata di Laplace è un operatore che trasforma una funzione del tempo (anche a valori complessi) in una funzione a variabile complessa e a valori complessi. Attraverso le proprietà della trasformata di Laplace saremo in grado di ottenere le soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Dato un segnale  $f(t)$  definiamo una funzione che mappa  $s \in \mathbb{C}$  in  $F(s) \in \mathbb{C}$  nel modo seguente

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Questa funzione è detta trasformata di Laplace di  $f(t)$  ed è denotata col simbolo  $\mathcal{L}[f](s)$ . L'operatore trasformata di Laplace ammette inversa nel senso che in certi casi a una funzione  $F(s)$  a valori complessi può essere associata un segnale  $f(t)$  tale che  $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ . Più precisamente, se  $F(s)$  è la trasformata di Laplace di un segnale, allora è ben definita per tutti gli  $s \in \mathbb{C}$  tale che  $\text{Re}[s] \geq \sigma_0$ . Inoltre si può dimostrare che per ogni  $\alpha > \sigma_0$  si ha che

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)e^{st} ds$$

ha un valore indipendente da  $\alpha$  e dipendente solo da  $t$ . Quindi possiamo scrivere che tale integrale come una funzione di  $t$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} F(s)e^{st} ds$$

Infine si può dimostrare che  $\mathcal{L}[f](s) = F(s)$ . La funzione  $f(t)$  così ottenuta è detta anti-trasformata di Laplace di  $F(s)$  e si scrive

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t)$$

La trasformata e l'antitrasformata di Laplace sono operatori lineare cioè

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

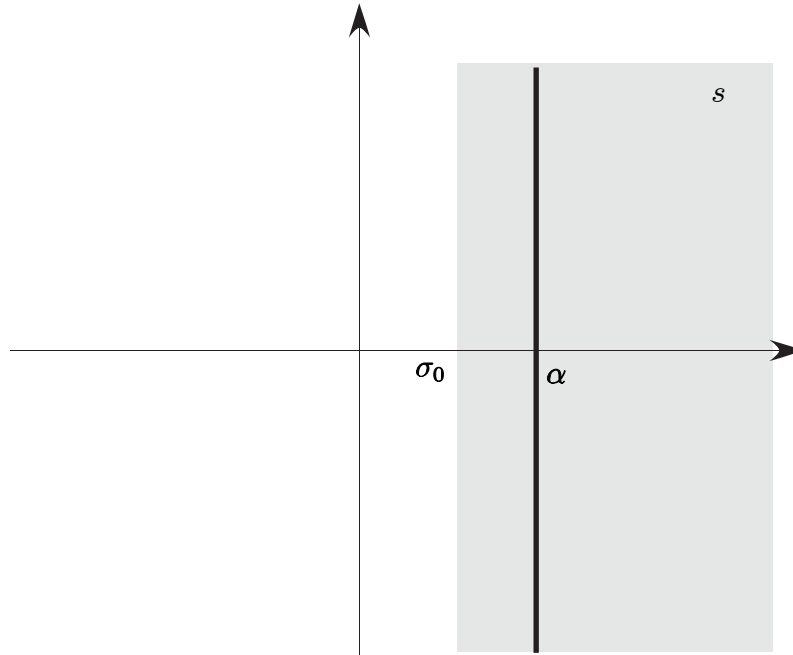


Figure 1.9:

La trasformata di Laplace piu' semplice da ottenere e' quella del delta di Dirac

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

La trasformata di Laplace piu' utile ai nostri scopi e' quella dei segnali sinusoidali ed esponenziali

$$\mathcal{L}[t^n e^{pt} \delta^{(-1)}(t)] = \frac{n!}{(s-p)^{n+1}}$$

da cui segue, ad esempio, che

$$\mathcal{L}[\delta^{(-n)}(t)] = \frac{1}{s^n}$$

Infine la proprieta' piu' importante della trasformata di Laplace e' che trasforma la convoluzione di due funzioni a supporto in  $[0, \infty)$  in prodotto

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)]$$

Rispetto alla traslazione vale

$$\mathcal{L}[f(t - T)] = e^{-sT} \mathcal{L}[f(t)]$$

Infine rispetto alla derivazione e alla integrazione valgono le seguenti relazioni

$$\mathcal{L}[f^{(1)}] = s\mathcal{L}[f] - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$$

Iterando la formula sulla derivazione si ottiene la formula per la derivata di ordine superiore

$$\mathcal{L}[f^{(k)}] = s^k \mathcal{L}[f] - \sum_{i=0}^{k-1} s^i f^{(k-i-1)}(0^-)$$

dove

$$f^{(i)}(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f^{(i)}(t)$$

## 1.4 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Si consideri l'equazione differenziale

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u$$

dove i simboli  $y^{(k)}$  e  $u^{(k)}$  indicano la derivata  $k$ -esima dei segnali  $y(t)$  e  $u(t)$  rispettivamente. Questa equazione può essere riscritta in maniera più compatta nella forma

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)} \quad (1.1)$$

Si può assumere senza perdita di generalità che  $a_n \neq 0$  e  $b_m \neq 0$  e, anzi, si può normalizzare l'equazione in modo tale che  $a_n = 1$ . Si suppone che  $u(t)$  sia il segnale di ingresso dato e che  $y(t)$  sia il segnale di uscita incognito. Il legame tra ingresso  $u$  ed uscita  $y$  dato dall'equazione (1.1) è completamente determinato dai parametri  $a_k$  e  $b_k$ . Anche nel risolvere questa equazione supporremo che l'ingresso  $u(t)$  sia un segnale con supporto contenuto in  $[0, +\infty)$  e quindi nullo prima di zero.

### 1.4.1 Soluzioni dell'equazione lineare a coefficienti costanti

La soluzione generale dell'equazione differenziale (1.1) può essere ottenuta attraverso gli strumenti forniti dalla teoria della trasformata di Laplace. Infatti si osservi che, ponendo  $Y(s) = \mathcal{L}[y]$  e  $U(s) = \mathcal{L}[u]$  si ha che

$$\mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} \right] (s) = \mathcal{L} \left[ \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)} \right] (s)$$

Usando le proprietà della trasformata di Laplace rispetto alla derivazione si ottiene

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[ s^k Y(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-) \right] = \sum_{k=0}^m b_k \left[ s^k U(s) - \sum_{i=0}^{k-1} s^i u^{(k-i-1)}(0^-) \right]$$

Siccome si ipotizza che  $u(t) = 0$  per  $t < 0$ , allora

$$\sum_{k=0}^n a_k s^k Y(s) - \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-) = \sum_{k=0}^m b_k s^k U(s)$$

e quindi

$$Y(s) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} + \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} U(s).$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{Y_\ell(s)} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{Y_f(s)}$

dove  $y^{(k-i-1)}(0^-)$  sono le condizioni iniziali, cioè il valore dell'uscita e delle sue derivate immediatamente prima dell'applicazione dell'ingresso, e dove  $U(s)$  è la trasformata di Laplace di  $u(t)$ .

Si nota che la soluzione è somma di due componenti, la prima è detta risposta libera

$$Y_\ell(s) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} s^i y^{(k-i-1)}(0^-)}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}.$$

che dipende solo dalle condizioni iniziali, mentre la seconda, detta risposta forzata

$$Y_f(s) := \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} U(s) \quad (1.2)$$

dipende solo dall'ingresso. La risposta forzata si può scrivere più brevemente come segue

$$Y_f(s) := W(s)U(s)$$

dove

$$W(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

è detta **funzione di trasferimento**.

Si noti che, siccome l'antitrasformata di Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  è un operatore lineare, si ha che anche nel dominio dl tempo la soluzione ammetterà la stessa decomposizione

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

dove  $y_\ell(t)$  è l'antitrasformata di Laplace di  $Y_\ell(s)$ , cioè  $y_\ell = \mathcal{L}^{-1}[Y_\ell]$ , mentre  $y_f(t)$  è l'antitrasformata di Laplace di  $Y_f(s)$ , cioè  $y_f = \mathcal{L}^{-1}[Y_f]$ .

## 1.5 La risposta libera e la risposta forzata

Per prima cosa cerchiamo di determinare la struttura della risposta libera nel dominio del tempo per entrambi i modelli considerati in precedenza. Il calcolo di  $y_\ell(t)$  si basa sull'antitrasformata di Laplace di  $Y_\ell(s)$ . Si noti che in entrambi i casi considerati  $Y_\ell(s)$  è una funzione **razionale** con denominatore di grado  $n$  e numeratore di grado al più  $n-1$ . Si tratta quindi di una funzione razionale **strettamente propria** (cioè con il grado del numeratore minore del grado del denominatore). Una funzione razionale strettamente propria può essere espressa come somma di fratti semplici (vedi sezione 1.5.2)

$$Y_\ell(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s-p_i)^k},$$

dove i  $p_i$  sono i poli della funzione razionale e  $\mu_i$  sono le loro molteplicità e dove gli  $\alpha_{ik}$  possono essere calcolati con la formula dei residui

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} [(s - p_i)^{\mu_i} Y_\ell(s)] \Big|_{s=p_i}$$

Si può dimostrare che, per il modello lineare scalare, i  $p_i$  sono le radici del **polinomio caratteristico**  $a(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$ . Gli interi  $\mu_i$  invece sono le molteplicità dei  $p_i$  come radici del polinomio caratteristico  $a(s)$ . Infine i coefficienti  $\alpha_{ik}$  dipendono dalle condizioni iniziali  $y^{(i)}(0^-)$ .

Sapendo che

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-p_i)^k} \right] (t) = \frac{t^{k-1} e^{p_i t}}{(k-1)!} \delta^{(-1)}(t),$$

dove  $\delta^{(-1)}(t)$  è la funzione gradino unitario, si può concludere che

$$y_\ell(t) = \left( \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t).$$

Le funzioni esponenziali che compongono la  $y_\ell(t)$  sono detti i **modi** della risposta libera.

**Osservazione** Nota che, se  $p$  è un polo di  $Y_\ell(s)$  non reale con molteplicità  $\mu$ , allora esiste un altro polo di  $Y_\ell(s)$  che vale  $\bar{p}$ . Inoltre si può dimostrare che anche questo polo ha molteplicità  $\mu$  e che, se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  sono i residui del polo  $p$  in  $Y_\ell(s)$ , allora i residui del polo  $\bar{p}$  in  $Y_\ell(s)$  sono  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_\mu$ . Questo ha come una conseguenza che, come ci possiamo aspettare,  $y_\ell(t)$  è reale dato che i modi complessi si combinano a due a due come segue

$$\frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt} + \frac{\bar{\alpha}_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\bar{p}t} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\alpha_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{pt} \right] = \frac{2|\alpha_k|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle \alpha_k)$$

dove  $\alpha_k = |\alpha_k|e^{j\angle\alpha_k}$  e  $p = \sigma + j\omega$ .

Per quanto riguarda la risposta forzata, si osservi che, per antitrasformare  $Y_f(s)$  è utile ricordare la definizione di prodotto di convoluzione di due segnali con supporto in  $[0, +\infty)$ . Se  $u(t), w(t)$  sono due segnali con supporto in  $[0, +\infty)$ , allora definiamo

$$(w * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma = \int_0^t w(t - \sigma)u(\sigma)d\sigma$$

che è esso steso un segnale con supporto in  $[0, +\infty)$ . E' noto che

$$\mathcal{L}[w * u] = \mathcal{L}[w]\mathcal{L}[u]$$

cioè la trasformata di Laplace trasforma la convoluzione in prodotto. Da ciò possiamo dedurre che la risposta forzata ammette la seguente espressione

$$y_f(t) = (w * u)(t)$$

dove  $w(t)$  è l'antitrasformata della funzione di trasferimento  $W(s)$ .

Si noti che se  $u(t) = \delta(t)$  (impulso di Dirac), allora  $y_f(t) = w(t)$ , cioè, se l'ingresso è impulsivo, osserveremo come risposta forzata esattamente  $w(t)$ . Per questo motivo  $w(t)$  è detta **risposta impulsiva**. Si noti infine che, poichè  $y_f(t)$  è nullo in  $(-\infty, 0]$ , essa corrisponde all'uscita del sistema quando si supponga che il sistema sia "a riposo" all'istante 0.

Supporremo in questa dispensa che la funzione di trasferimento  $W(s)$  sia una funzione di trasferimento propria, cioè con il grado del numeratore minore o uguale del grado del denominatore. Per ottenere la risposta impulsiva  $w(t)$  dalla funzione di trasferimento  $W(s)$ , si deve preliminarmente effettuare la decomposizione di  $W(s)$  in una costante più una funzione razionale strettamente propria, cioè

$$W(s) = W(\infty) + \bar{W}(s)$$

dove  $\bar{W}(\infty) = 0$  e quindi e' una funzione razionale strettamente propria. Poi si decompone  $\bar{W}(s)$  in fratti semplici come fatto sopra

$$\bar{W}(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s - p_i)^k},$$

dove  $p_i$  sono i poli di  $\bar{W}(s)$  (che coincidono con i poli di  $W(s)$ ) e  $\mu_i$  sono le loro molteplicità. Gli  $\beta_{ik}$  possono essere calcolati con la formula dei residui

$$\beta_{ik} = \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} [(s - p_i)^{\mu_i} \bar{W}(s)] \Big|_{s=p_i}$$

Possiamo concludere quindi che

$$W(s) = W(\infty) + \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s - p_i)^k},$$

A questo punto possiamo antitrasformare

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W](t) = W(\infty)\delta(t) + \left( \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \right) \delta^{(-1)}(t),$$

dove  $\delta(t)$  indica il delta di Dirac ed è l'antitrasformata di Laplace di 1 e dove i  $p_i$  sono i poli della funzione razionale e  $\mu_i$  sono le loro molteplicità. Anche in questo caso si può dimostrare che, per il modello lineare scalare, i  $p_i$  sono le radici del **polinomio caratteristico**  $a(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$ . L'unica cosa che cambia rispetto alla risposta libera sono i coefficienti  $\beta_{ik}$ . Le funzioni esponenziali che compongono la risposta impulsiva  $w(t)$  sono detti i **modi** della risposta impulsiva. Come per la risposta libera, anche per la risposta impulsiva si può dimostrare che i modi complessi si combinano in modo da formare modi reali.

### 1.5.1 Presenza di cancellazioni tra numeratore e denominatore

Consideriamo l'equazione

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)} \quad (1.3)$$

e ci chiediamo cosa succede se esistono cancellazioni tra i polinomi  $a(s)$  e  $b(s)$ , cioè se

$$\begin{aligned} a(s) &= \bar{a}(s)f(s) \\ b(s) &= \bar{b}(s)f(s), \end{aligned}$$

dove  $f(s)$  è un polinomio di grado  $\geq 1$  che ci dà il fattore comune. Dalle formule che ci forniscono la soluzione di (1.3) nel dominio delle trasformate di Laplace notiamo che

$$Y(s) = Y_\ell(s) + Y_f(s),$$

dove  $Y_\ell(s)$ , che dipende solo da  $a(s)$ , resta invariata e non viene influenzata dalla presenza delle cancellazioni, mentre

$$Y_f(s) = \frac{\bar{b}(s)}{\bar{a}(s)} U(s)$$

da cui si nota che la funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{\bar{b}(s)}{\bar{a}(s)}$$

e coincide con quella del sistema

$$\sum_{k=0}^{\bar{n}} \bar{a}_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{\bar{m}} \bar{b}_k u^{(k)}$$

corrispondente ai polinomi  $\bar{a}(s)$  e  $\bar{b}(s)$  ottenuti dopo la semplificazione. Quindi l'evoluzione libera resta la stessa mentre cambia l'evoluzione forzata.

Si noti che la cancellazione è comunque un evento "non generico" nel senso che è infinitamente sensibile alle variazioni dei parametri. Inoltre, se abbiamo una quasi cancellazione, nel senso che esiste una coppia di radici  $z', z''$ , una di  $a(s)$  l'altra di  $b(s)$

$$\begin{aligned} a(s) &= \bar{a}(s)(s - z') \\ b(s) &= \bar{b}(s)(s - z''), \end{aligned}$$

che, pur non coincidendo, sono molto vicine, allora si può dimostrare che la risposta impulsiva corrispondente alla funzione di trasferimento originale  $b(s)/a(s)$  e la risposta impulsiva corrispondente alla funzione di trasferimento semplificata  $\bar{b}(s)/\bar{a}(s)$  sono molto simili se le radici  $z', z''$  sono "stabili" nel senso che corrispondono a modi convergenti a zero. Se invece le radici  $z', z''$  sono "instabili" nel senso che corrispondono a modi divergenti, allora le due risposte impulsive tendono a diventare molto diverse per tempi sufficientemente grandi. Illustriamo meglio questo comportamento attraverso un esempio.

**Esempio 1.1** Si consideri il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(2)} - y = u^{(1)} - (1 + \varepsilon)u,$$

Per  $\varepsilon = 0$  questo sistema diventa

$$y^{(2)} - y = u^{(1)} - u$$

che ha risposta libera

$$y_\ell = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

che contiene un modo instabile. La funzione di trasferimento è

$$W_0(s) = \frac{1}{s + 1}$$

a cui corrisponde la risposta impulsiva che per  $t \geq 0$  vale  $w_0(t) = e^{-t}$ . Per  $\varepsilon \neq 0$  la risposta libera rimane la stessa. La funzione di trasferimento diventa invece

$$W_\varepsilon(s) = \frac{s - (1 + \varepsilon)}{s^2 - 1}$$

e quindi, se  $\varepsilon$  è piccolo, abbiamo una coppia di zeri al numeratore e a denominatore che sono molto vicini. La corrispondente risposta impulsiva per  $t \geq 0$  vale

$$w_\varepsilon(t) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{-t} - \frac{\varepsilon}{2} e^t$$

e la differenza tra  $w_\varepsilon(t)$  e  $w_0(t)$  risulta essere per  $t \geq 0$

$$w_\varepsilon(t) - w_0(t) = \frac{\varepsilon}{2} [e^{-t} - e^t]$$



che, sebbene  $\varepsilon$  sia molto piccolo, porta a un contributo del secondo termine che diventa non trascurabile per  $t$  grande. Possiamo concludere che in questo caso cancellare una coppia di radici molto vicine porta ad approssimare la vera risposta impulsiva  $w_\varepsilon(t)$  con la risposta impulsiva  $w_0(t)$  che è però una cattiva approssimazione di  $w_\varepsilon(t)$  essendo la differenza delle due molto grande.

Consideriamo ora il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = u^{(1)} + (1 + \varepsilon)u,$$

Per  $\varepsilon = 0$  questo sistema diventa

$$y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = u^{(1)} + u$$

che ha risposta libera

$$y_\ell(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}.$$

La funzione di trasferimento è

$$W_0(s) = \frac{1}{s + 1}$$

a cui corrisponde una risposta impulsiva che per  $t \geq 0$  vale  $w_0(t) = e^{-t}$ . Per  $\varepsilon \neq 0$  la risposta libera rimane la stessa. La funzione di trasferimento diventa invece

$$W_\varepsilon(s) = \frac{s + (1 + \varepsilon)}{(s + 1)^2}$$

e quindi, se  $\varepsilon$  è piccolo, abbiamo una coppia di zeri al numeratore e a denominatore che sono molto vicini. La corrispondente risposta impulsiva per  $t \geq 0$  vale

$$w_\varepsilon(t) = e^{-t} + \varepsilon t e^{-t}$$

e la differenza tra  $w_\varepsilon(t)$  e  $w_0(t)$  risulta essere  $w_\varepsilon(t) - w_0(t) = \varepsilon t e^{-t}$  che è piccola, se  $\varepsilon$  è piccolo. Possiamo concludere, in questo caso, cancellare una coppia di radici molto vicine porta ad approssimare la vera risposta impulsiva  $w_\varepsilon(t)$  con la risposta impulsiva  $w_0(t)$  che risulta essere una buona sua approssimazione.

## 1.5.2 Diverse rappresentazioni di funzioni di trasferimento

Come già anticipato, esistono diverse maniere di rappresentare una funzione di trasferimento, ciascuna delle quali risulta conveniente nel risolvere specifici problemi relativi al legame tra l'ingresso e l'uscita che la funzione di trasferimento codifica.

Data una funzione di trasferimento  $W(s)$ , la prima rappresentazione che abbiamo introdotto di  $W(s)$  è sotto forma di rapporto di polinomi scritti evidenziandone i coefficienti, cioè nella forma

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

Esistono due rappresentazioni in cui si fattorizzano i polinomi a numeratore e a denominatore che giocheranno un ruolo fondamentale nel seguito. La prima è detta **forma di Evans**

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = K_E \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$

dove  $K_E \in \mathbb{R}$  è detto **guadagno di Evans**,  $z_k \in \mathbb{C}$  sono gli zeri di  $W(s)$  (cioè i numeri complessi  $\bar{s}$  che annullano  $W(s)$ ) e  $p_k \in \mathbb{C}$  sono i poli di  $W(s)$  (cioè i numeri complessi  $\bar{s}$  che mandano all'infinito  $W(s)$ ). La differenza  $n - m$  tra il grado del denominatore e il grado del numeratore è detta **grado relativo** della funzione di trasferimento. Si noti che per  $s$  grande la funzione di trasferimento  $W(s)$  può essere approssimata nel modo seguente

$$W(s) \simeq \frac{K_E}{s^{n-m}}$$

Una seconda forma fattorizzata è detta invece forma di Bode. Questa si ottiene dalla forma di Evans semplicemente raccogliendo gli zeri  $z_k$  a numeratore e i poli  $p_k$  a denominatore (in modo da ottenere termini noti unitari) e moltiplicando tra loro fattori relativi a zeri o poli complessi coniugati (in modo da arrivare a fattori con coefficienti reali). Più precisamente, a partire da un fattore del tipo  $s - z$ , con  $z$  reale, raccogliendo  $z$  si ottiene

$$s - z = -z(1 + sT)$$

dove  $T = -1/z$ . Se partiamo invece da una coppia di fattori  $s - z$  e  $s - \bar{z}$ , dove  $\bar{z}$  è il complesso coniugato di  $z$ , allora, evidenziando parte reale e immaginaria di  $z$  e  $\bar{z}$

$$z = \sigma + i\omega, \quad \bar{z} = \sigma - i\omega$$

si ottiene

$$(s - z)(s - \bar{z}) = (s - \sigma - i\omega)(s - \sigma + i\omega) = s^2 - 2\sigma s + (\sigma^2 + \omega^2) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

dove  $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$  è il modulo di  $z$  e di  $\bar{z}$ , e dove  $\xi = -\sigma/\omega_n$ . Infine, raccogliendo  $\omega_n^2$  si ottiene

$$(s - z)(s - \bar{z}) = \omega_n^2 \left( 1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right)$$

Facendo questa operazione per tutti i fattori a numeratore e a denominatore (a parte quelli relativi a zeri e poli nulli) della forma di Evans, si ottiene la forma seguente

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{K_B}{s^l} \frac{\prod_k (1 + sT_k) \prod_k \left( 1 + 2\xi_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right)}{\prod_k (1 + s\bar{T}_k) \prod_k \left( 1 + 2\bar{\xi}_k \frac{s}{\bar{\omega}_{nk}} + \frac{s^2}{\bar{\omega}_{nk}^2} \right)}$$

dove  $K_B$  è detto **guadagno di Bode** e l'intero  $l$  (che può essere positivo, nullo o negativo) è detto **tipo del sistema**. Si noti che per  $s$  piccolo la funzione di trasferimento  $W(s)$  può essere approssimata nel modo seguente

$$W(s) \simeq \frac{K_B}{s^l}$$

L'ultima rappresentazione di  $W(s)$  che descriviamo è quella in fratti semplici, che abbiamo già utilizzato. Supponiamo che  $W(s)$  sia propria e cioè che il grado del numeratore sia minore o uguale del grado del denominatore. Per prima cosa, per ottenere la rappresentazione in fratti semplici di  $W(s)$  si decompone  $W(s)$  in una costante più una funzione razionale strettamente propria, cioè

$$W(s) = W(\infty) + \bar{W}(s)$$

dove  $\bar{W}(\infty) = 0$  e quindi è una funzione razionale strettamente propria (cioè con il grado del numeratore minore del grado del denominatore). Ogni funzione razionale strettamente propria può essere decomposta in fratti semplici

$$\bar{W}(s) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s - p_i)^k},$$

dove  $p_i$  sono i poli di  $\bar{W}(s)$  (che coincidono con i poli di  $W(s)$ ) e  $\mu_i$  sono le loro molteplicità. Gli  $\beta_{ik}$  possono essere calcolati con la formula dei residui

$$\beta_{ik} = \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{d^{\mu_i - k}}{ds^{\mu_i - k}} [(s - p_i)^{\mu_i} \bar{W}(s)] \Big|_{s=p_i}$$

Possiamo concludere quindi che

$$W(s) = W(\infty) + \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{\beta_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

## 1.6 Il modello di stato

In questa sezione richiameremo brevemente la definizione del modello di stato e descriveremo le sue soluzioni nel caso lineare. Limiteremo la nostra analisi al caso di sistemi con un ingresso ed una uscita.

Consideriamo i segnali di ingresso  $u(t)$  e  $y(t)$  e introduciamo altri  $n$  segnali ausiliari  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ . Il modello in forma di stato è dato dalla seguente famiglia di

equazioni differenziali che legano i precedenti segnali

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t)) \end{aligned}$$

$$y(t) = h(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))$$

dove  $f_1(\dots), \dots, f_n(\dots), h(\dots)$  sono funzioni reali in  $n+1$  variabili in generale non lineari. Il modello di stato consiste quindi in una famiglia di equazioni differenziali del primo ordine. Le variabili  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sono dette variabili di stato e  $n$  è detto l'ordine del modello di stato. Se le funzioni  $f_1(\dots), \dots, f_n(\dots), h(\dots)$  sono lineari, allora il sistema precedente si può riscrivere nella maniera seguente

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \end{aligned}$$

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + du(t)$$

dove  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d$  sono parametri che individuano il modello. Definendo in maniera opportuna il vettori colonna

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

l'equazione differenziale lineare precedente si può riscrivere in forma matriciale nel

modo seguente

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + du(t)$$

dove  $A$  è una matrice  $n \times n$  avente come elementi i parametri  $a_{ij}$ , dove  $B$  è una matrice colonna avente come elementi i parametri  $b_i$  e dove  $C$  è una matrice riga avente come elementi i parametri  $c_i$ . Il legame tra ingresso  $u$  ed uscita  $y$  dato dall'equazione (1.6) è completamente determinato dalle matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $d$ .

### 1.6.1 Soluzioni del modello di stato lineare

In generale non esiste una maniera semplice di ottenere la soluzione dell'equazione differenziale non lineare (1.6). Ci limiteremo quindi a richiamare come si può determinare la soluzione del modello lineare (1.6) attraverso gli strumenti forniti dalla teoria della trasformata di Laplace. Nell'analisi del modello descritto dall'equazione differenziale (1.1), è utile ammettere che l'ingresso  $u$  sia un segnale applicato a partire da un istante iniziale 0 (cioè che  $u(t)$  sia nullo per  $t \leq 0$ ). Usiamo ora la classica formula della Laplace trasformata della derivata di un segnale secondo la quale, per un qualsiasi segnale  $f(t)$  si ha che

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\mathcal{L}[f] - f(0^-)$$

dove

$$f(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} f(t)$$

La precedente formula vale anche per segnali vettoriali, e quindi, definendo  $X(s) = \mathcal{L}[x]$  la trasformata di Laplace di  $x(t)$  e  $U(s) = \mathcal{L}[u]$  la trasformata di Laplace di  $u(t)$ , si ha che

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0^-) = \mathcal{L}[Ax + Bu] = AX(s) + BU(s)$$

Quindi

$$(sI - A)X(s) = x(0^-) + BU(s)$$

e da cui si conclude che

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

e quindi, se  $Y(s) = \mathcal{L}[y]$ , allora

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + dU(s) = C(sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}BU(s) + dU(s) = \\ &= C(sI - A)^{-1}x(0^-) + W(s)U(s) \end{aligned}$$

dove

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + d$$

è detta **funzione di trasferimento**. Si nota che la soluzione è somma di due componenti. La prima è detta risposta libera

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0^-),$$

che dipende solo dalle condizioni iniziali. La seconda, detta risposta forzata

$$Y_f(s) := W(s)U(s) \quad (1.4)$$

dipende invece solo dall'ingresso. Si noti che, siccome l'antitrasformata di Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  è un operatore lineare, si ha che anche nel dominio di tempo la soluzione ammetterà la stessa decomposizione

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

dove  $y_\ell(t)$  è l'antitrasformata di Laplace di  $Y_\ell(s)$ , cioè  $y_\ell = \mathcal{L}^{-1}[Y_\ell]$ , mentre  $y_f(t)$  è l'antitrasformata di Laplace di  $Y_f(s)$ , cioè  $y_f = \mathcal{L}^{-1}[Y_f]$ .

**Esempio 1.2** Si consideri un modello che sia descritto dalle seguenti equazioni di stato

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -x_1(t) + x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_1(t) - x_2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Qui è stato usato il simbolo  $\dot{x}_i(t)$  come notazione abbreviata di derivata del segnale  $x_i(t)$ . Lo stesso modello si può riscrivere nel modo seguente

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [ 1 \quad 0 ]$$

Nota che

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s} & \frac{1}{s^2+2s} \\ \frac{1}{s^2+2s} & \frac{s+1}{s^2+2s} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$Y_\ell(s) = C(sI - A)^{-1}x(0^-) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+2s} & \frac{1}{s^2+2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0^-) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} = \frac{(s+1)x_1(0^-) + x_2(0^-)}{s^2 + 2s}$$

La funzione di trasferimento è data da

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + 2s}$$

Un modo alternativo per determinare la funzione di trasferimento è il operando direttamente sulle equazioni lineari passando alle trasformate di Laplace ed eliminando dalle equazioni algebriche risultanti le variabili di stato. Infatti, denotando  $U(s) := \mathcal{L}[u]$ ,  $Y(s) := \mathcal{L}[y]$ ,  $X_1(s) := \mathcal{L}[x_1]$ ,  $X_2(s) := \mathcal{L}[x_2]$ , si ottiene

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= -X_1(s) + X_2(s) \\ sX_2(s) &= X_1(s) - X_2(s) + U(s) \\ Y(s) &= X_1(s) \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene che

$$X_2(s) = \frac{X_1(s) + U(s)}{s + 1}$$

e, sostituendo nella prima equazione, si ottiene

$$(s + 1)X_1(s) = X_2(s) = \frac{X_1(s) + U(s)}{s + 1}$$

e quindi notando che  $Y(s) = X_1(s)$ , può concludere che

$$(s + 1)Y(s) = X_2(s) = \frac{Y(s) + U(s)}{s + 1}$$

e quindi che

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s + 1)^2 - 1} = \frac{1}{s^2 + 2s}$$

## 1.6.2 Linearizzazione di un sistema non lineare

Spesso nelle applicazioni si ha a che fare con sistemi non lineari, ma i segnali di ingresso e di uscita sono quasi costanti. In questo caso il legame tra i segnali è descrivibile in maniera approssimata attraverso un modello lineare.

Consideriamo il sistema descritto dal modello (1.6) e supponiamo che l'ingresso si possa decomporre come somma di un segnale costante e un segnale piccolo

$$u(t) = \bar{u} + \tilde{u}(t)$$

Supponiamo che i valori costanti  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  e  $\bar{y}$  siano tali che

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}) \\ &\vdots \\ 0 &= f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}) \\ \bar{y} &= h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}) \end{aligned}$$

Questo significa che  $x_1(t) = \bar{x}_1, \dots, x_n(t) = \bar{x}_n$ ,  $u(t) = \bar{u}$  e  $y(t) = \bar{y}$  sono soluzioni costanti dell'equazione differenziale (1.6). In questo caso  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  costituiscono

uno stato di equilibrio del sistema rispetto all'ingresso costante  $\bar{u}$ , mentre  $\bar{y}$  è la relativa uscita di equilibrio. Supponiamo ora di cercare soluzioni  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  e  $y(t)$  di (1.6) sotto l'ipotesi che i segnali  $\tilde{x}_1(t) := x_1(t) - \bar{x}_1, \dots, \tilde{x}_n(t) := x_n(t) - \bar{x}_n, \tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$  e  $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$  siano piccoli. In tal caso si può approssimare  $f_i(x_1, \dots, x_n, u)$  con la sua espansione di Taylor ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} &= \frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n + \tilde{x}_n(t), \bar{u} + \tilde{u}(t)) \\ &\simeq f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1|_{\bar{x}, \bar{u}}} \tilde{x}_1(t) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n|_{\bar{x}, \bar{u}}} \tilde{x}_n(t) + \frac{\partial f_i}{\partial u|_{\bar{x}, \bar{u}}} \tilde{u}(t) \\ &= a_{i1}\tilde{x}_1(t) + \dots + a_{in}\tilde{x}_n(t) + b_i\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto  $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j|_{\bar{x}, \bar{u}}}$  e  $b_i = \frac{\partial f_i}{\partial u|_{\bar{x}, \bar{u}}}$ . Analogamente si osservi che

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y(t) - \bar{y} = h(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1(t), \dots, \bar{x}_n + \tilde{x}_n(t), \bar{u} + \tilde{u}(t)) - \bar{y} \\ &\simeq h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{u}) + \frac{\partial h}{\partial x_1|_{\bar{x}, \bar{u}}} \tilde{x}_1(t) + \dots + \frac{\partial h}{\partial x_n|_{\bar{x}, \bar{u}}} \tilde{x}_n(t) + \frac{\partial h}{\partial u|_{\bar{x}, \bar{u}}} \tilde{u}(t) - \bar{y} \\ &= c_1\tilde{x}_1(t) + \dots + c_n\tilde{x}_n(t) + d\tilde{u}(t) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto  $c_j = \frac{\partial h}{\partial x_j|_{\bar{x}, \bar{u}}}$  e  $d = \frac{\partial h}{\partial u|_{\bar{x}, \bar{u}}}$  e dove abbiamo approssimato la funzione  $h(\dots)$  con la sua espansione di Taylor troncata al primo ordine. Otteniamo così un legame tra le variabili  $\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \tilde{u}(t)$  e  $\tilde{y}(t)$  che è dato da un sistema in forma di stato lineare del tipo (1.6).

**Esempio 1.3** Si consideri un modello che sia descritto dalle seguenti equazioni di stato

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) + x_1(t)u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_1(t) + x_2(t)^2 \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

Qui è stato usato il simbolo  $\dot{x}_i(t)$  come notazione abbreviata di derivata del segnale  $x_i(t)$ .

Cerchiamo ora le evoluzioni di equilibrio  $u(t) = \bar{u}$ ,  $y(t) = \bar{y}$ ,  $x_1(t) = \bar{x}_1$  e  $x_2(t) = \bar{x}_2$ . Le eventuali evoluzioni di equilibrio (se esistono; non è assicurato che l'equilibrio esista e se esiste che questo sia unico) dobbiamo risolvere il seguente sistema di equazioni nonlineari

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{u} \\ 0 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 \\ \bar{y} &= \bar{x}_1 \end{aligned}$$



E' facile dimostrare che non esistono evoluzioni di equilibrio tali che  $\bar{y} < 0$ . Supponiamo di richiedere che l'uscita di equilibrio sia  $\bar{y} = 4$ . E' facile dimostrare che esistono due soluzioni del precedente sistema di equazioni, cioè

$$\bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = 2, \bar{u} = -1/2$$

$$\bar{x}_1 = 4, \bar{x}_2 = -2, \bar{u} = 1/2$$

Linearizziamo ora il modello nell'intorno al primo equilibrio. Si noti che

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \bar{u} = -1/2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = \bar{x}_1 = 4, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2\bar{x}_2 = 4, \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0$$

da cui segue che il sistema linearizzato è dato da

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t) \end{aligned}$$

dove  $\tilde{x}_1(t) := x_1(t) - \bar{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2(t) := x_2(t) - \bar{x}_2$ ,  $\tilde{u}(t) := u(t) - \bar{u}$  e  $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$  e

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [ 1 \quad 0 ]$$

Per determinare la funzione di trasferimento, o si applica la formula secondo cui

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{4(s-4)}{(s+1/2)(s-4)+1}$$

o si opera direttamente sulle equazioni lineari passando alle trasformate di Laplace ed eliminando dalle equazioni algebriche risultanti le variabili di stato. Infatti, denotando  $U(s) := \mathcal{L}[\tilde{u}]$ ,  $Y(s) := \mathcal{L}[\tilde{y}]$ ,  $X_1(s) := \mathcal{L}[\tilde{x}_1]$ ,  $X_2(s) := \mathcal{L}[\tilde{x}_2]$ , si ottiene

$$\begin{aligned} sX_1(s) &= -1/2X_1(s) + X_2(s) + 4U(s) \\ sX_2(s) &= -X_1(s) + 4X_2(s) \\ Y(s) &= X_1(s) \end{aligned}$$

da cui si ottiene che  $X_2(s) = -X_1(s)/(s-4)$  e quindi

$$sX_1(s) = -1/2X_1(s) - X_1(s)/(s-4) + 4U(s)$$

Da questo può concludere che

$$(s + 1/2 + 1/(s-4))X_1(s) = 4U(s)$$

da cui, osservando che  $X_1(s) = Y(s)$ , segue che

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4}{s + 1/2 + 1/(s-4)} = \frac{4(s-4)}{(s+1/2)(s-4)+1}$$

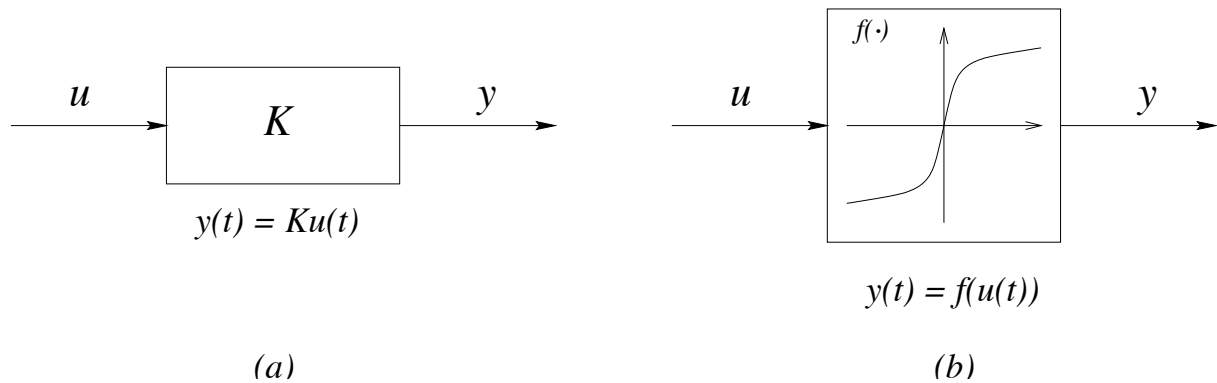
## 1.7 Schemi a blocchi

Come abbiamo già notato, nell'analisi dei sistemi di controllo è spesso conveniente individuare opportuni sottoinsiemi (o blocchi), dotati in genere di un solo ingresso e una sola uscita, e rappresentare il sistema complessivo come il risultato della interconnessione di tali sottoinsiemi elementari.

### 1.7.1 Blocchi elementari

Presenteremo ora una lista di blocchi che più tipicamente intervengono negli schemi che rappresentano sistemi interconnessi.

**Blocchi senza memoria:** Questi blocchi rappresentano sistemi nei quali la relazione tra ingresso e uscita è istantanea. Possono essere lineari e non lineari, a seconda se tale relazione è lineare o non lineare.



**Blocchi dinamici:** Questi blocchi in generale trasformano l'ingresso  $u$  nell'uscita  $y$  in modo che  $y(t)$  all'istante  $t$  non dipenda dall'ingresso  $u(t)$  nel medesimo istante  $t$ , ma anche dal suo andamento in istanti diversi. Un esempio particolarmente interessante di blocco dinamico (vedi figura 1.10) è quello dato dal sistema descritto dalla funzione di trasferimento  $W(s)$ .

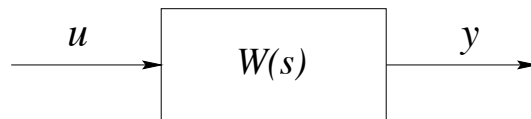


Figure 1.10:

## 1.7.2 Interconnessione dei blocchi

I blocchi possono essere collegati tra di loro direttamente, collegando l'ingresso di uno con l'uscita di un altro. Possono però intervenire altre due situazioni:

Si possono avere dei *punti di diramazione* descritti in figura 1.11. Un punto di diramazione può essere formalmente descritto come un blocco a un ingresso  $u(t)$  e due uscite  $y_1(t), y_2(t)$ , in cui si ha semplicemente  $y_1(t) = u(t)$  e  $y_2(t) = u(t)$ . Si possono avere delle *giunzioni sommanti* descritte in figura 1.11. Una giunzione

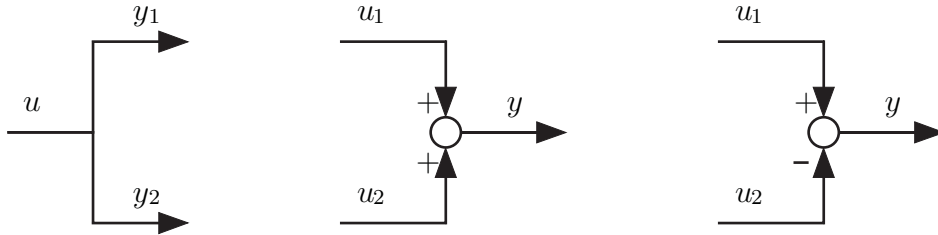


Figure 1.11:

sommante può essere formalmente descritta come un blocco a due ingressi  $u_1(t), u_2(t)$  e una uscita  $y(t)$ , in cui si ha semplicemente  $y(t) = u_1(t) + u_2(t)$  o  $y(t) = u_1(t) - u_2(t)$ .

## 1.7.3 Regole di riduzione

La connessione di più blocchi può essere ridotta ad un unico blocco. Una tale riduzione può essere ottenuta tramite calcoli algebrici o applicando successive riduzioni elementari che passo per passo permettono di ottenere schemi a blocchi tra loro equivalenti composti di un numero decrescente di blocchi fino ad arrivare a uno schema composto da un unico blocco. Vediamo attraverso un esempio prima come funziona il metodo algebrico.

**Esempio 1.4** Il seguente schema a blocchi rappresenta un tipico sistema con controllo a feedback e feedforward.

Interpretando la relazione tra le trasformate di Laplace dei segnali che appaiono nello schema otteniamo

$$\begin{aligned} Y(s) &= W(s)U(s) \\ U(s) &= G_1(s)E(s) + G_2(s)R(s) \\ E(s) &= R(s) - H(s)Y(s) \end{aligned}$$

Da queste tre equazioni cerchiamo ora di eliminare tutte le variabili a parte  $R(s)$  e  $Y(s)$  che sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema

$$Y(s) = W(s)[G_1(s)E(s) + G_2(s)R(s)] = W(s)[G_1(s)(R(s) - H(s)Y(s)) + G_2(s)R(s)]$$

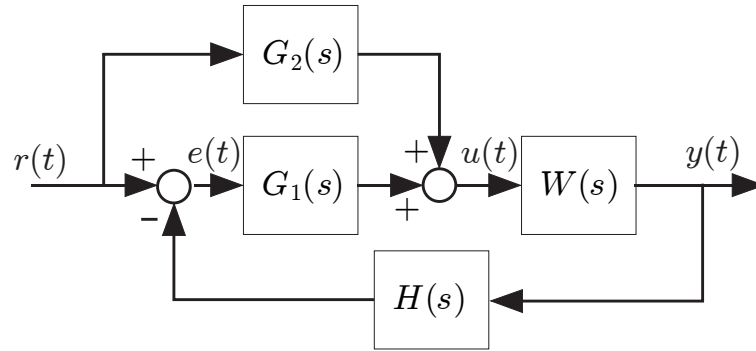


Figure 1.12:

Moltiplicando e raccogliendo i termini in  $Y(s)$  e in  $R(s)$  separatamente si ottiene

$$(1 + W(s)G_1(s)H(s))Y(s) = W(s)(G_1(s) + G_2(s))R(s)$$

da cui segue che

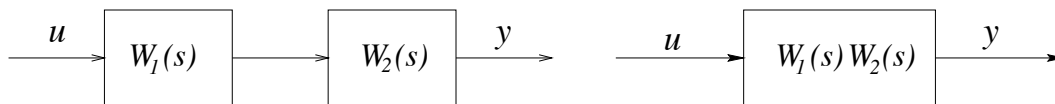
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W(s)(G_1(s) + G_2(s))}{1 + W(s)G_1(s)H(s)}$$

Quindi la relazione tra l'ingresso  $r(t)$  e l'uscita  $y(t)$  si può descrivere da un unico blocco con funzione di trasferimento

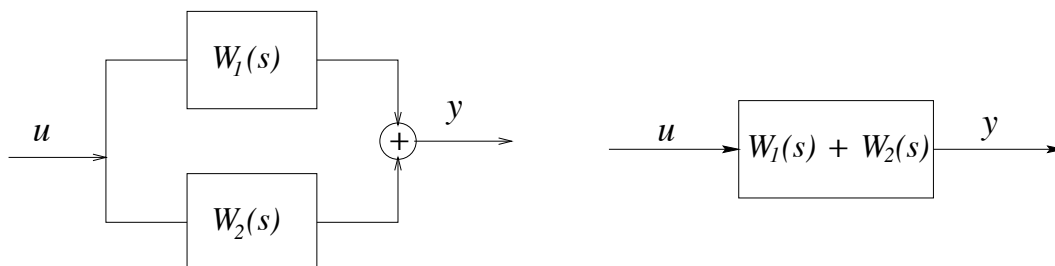
$$\frac{W(s)(G_1(s) + G_2(s))}{1 + W(s)G_1(s)H(s)}$$

Illustriamo ora come si può ridurre uno schema a blocchi ricorrendo applicando successive riduzioni elementari. Cominciamo a mostrare quali siano queste riduzioni elementari.

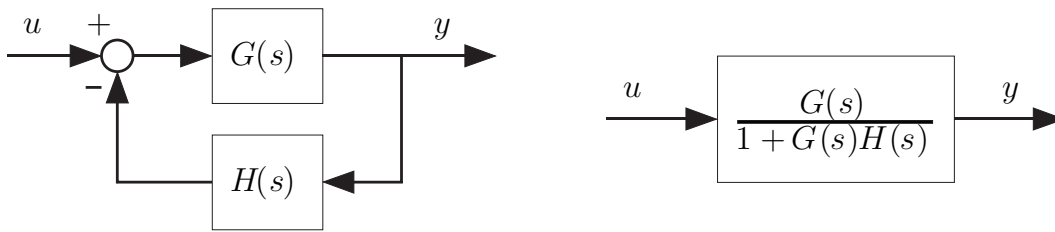
### Riduzione della interconnessione serie



### Riduzione della interconnessione parallelo



### Riduzione della interconnessione retroazione

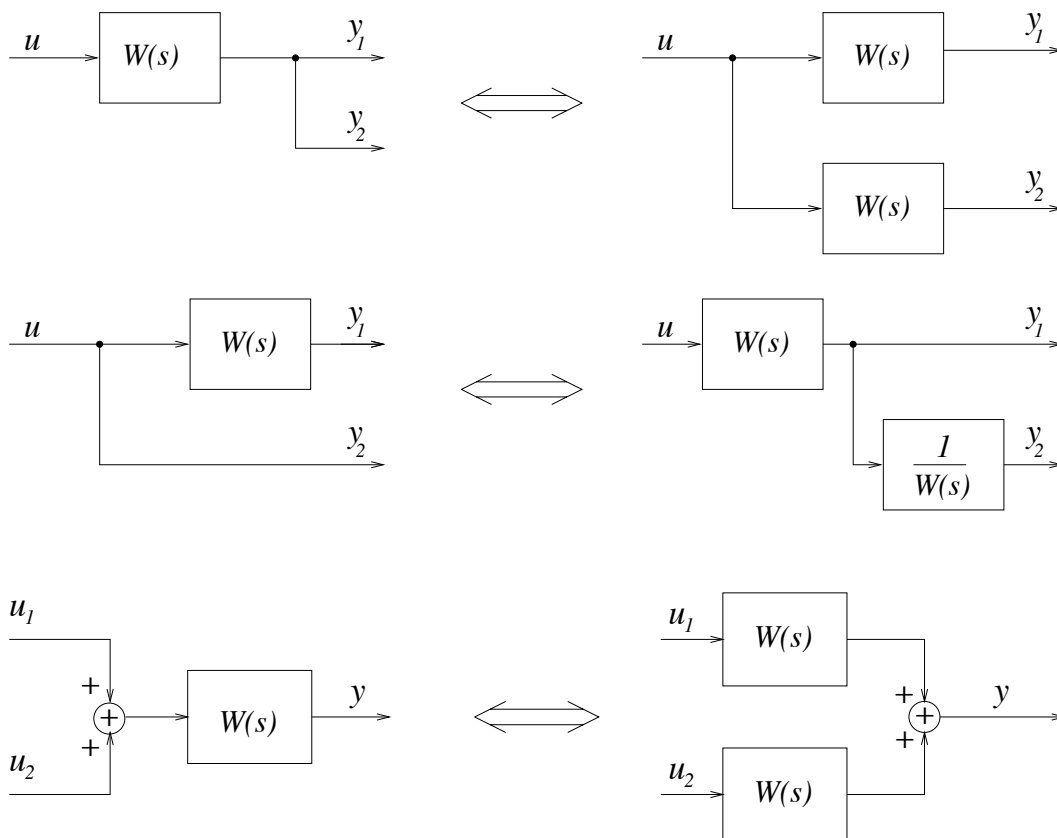


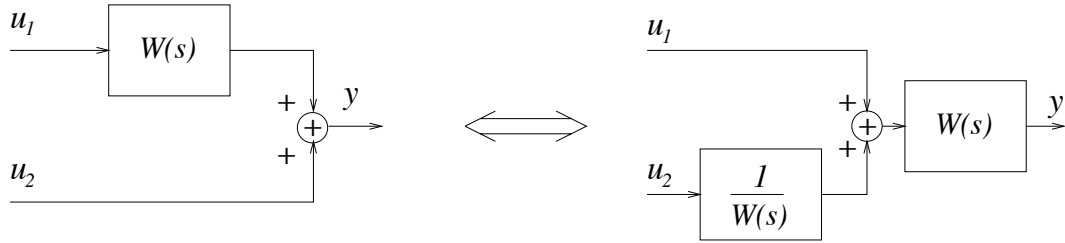
In questo ultimo caso la riduzione è il risultato del seguente calcolo

$$Y(s) = G(s)(U(s) - H(s)Y(s))$$

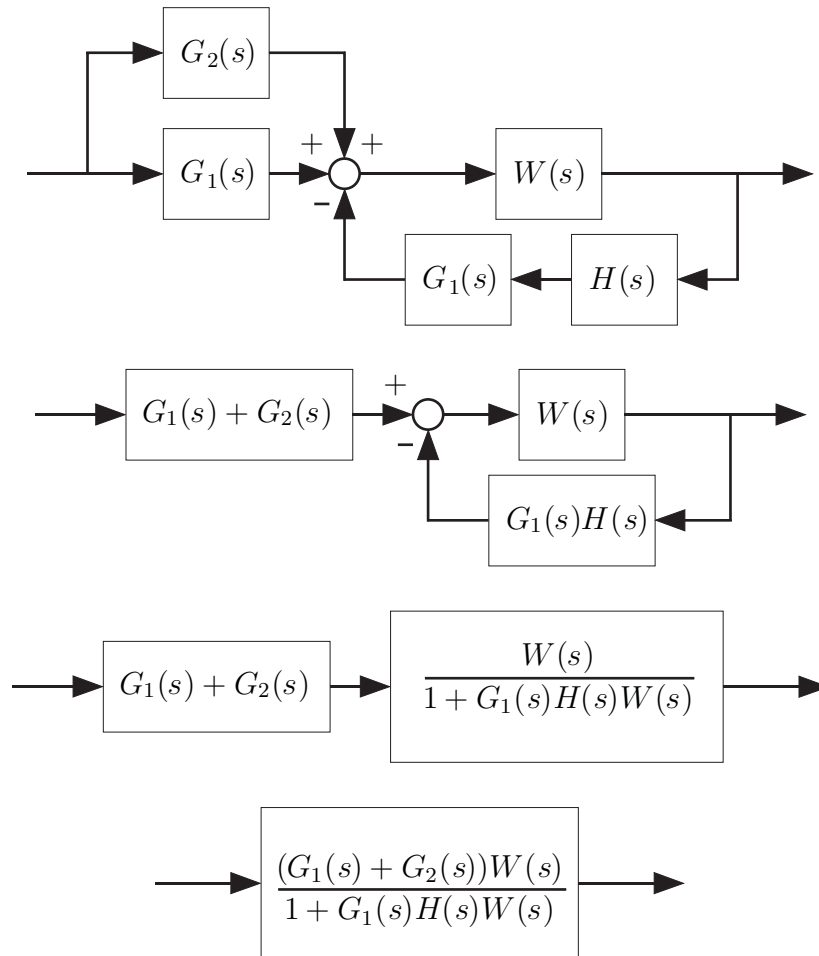
$$(1 + G(s)H(s))Y(s) = G(s)U(s) \xrightarrow{G(s)H(s) \neq -1} Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

**Spostamento dei blocchi:** Per ottenere la riduzione di uno schema a blocchi non è sufficiente applicare le tre regole precedenti. Può essere in generale necessario spostare dei blocchi nello schema. Ciò è in generale possibile, applicando le seguenti regole elementari.





**Esempio 1.5** Si consideri ancora lo schema a blocchi mostrato in figura 1.12. Attraverso i seguenti passi si riesce ad ottenere un unico blocco avente la stessa funzione di trasferimento determinata sopra.



In caso nello schema a blocchi appaiano più ingressi e se i blocchi sono tutti lineari, allora la funzione di trasferimento che lega ciascun ingresso con l'uscita di interesse può essere determinata azzerando tutti gli ingressi a parte quello di interesse e poi procedere con i metodi visti.

**Esempio 1.6** Si consideri il seguente schema a blocchi mostrato in figura 1.13, che coincide con quello precedente a parte il fatto che viene inserito un ingresso supplementare  $d(t)$  che rappresenta un disturbo.

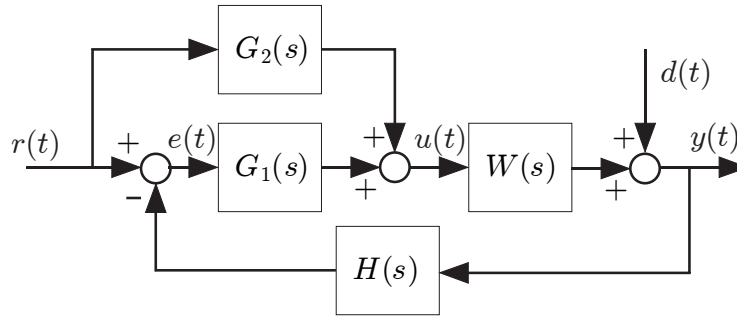


Figure 1.13:

Assumendo che  $r(t) = 0$  si ottiene

$$\begin{aligned} Y(s) &= W(s)U(s) + D(s) \\ U(s) &= G_1(s)E(s) \\ E(s) &= -H(s)Y(s) \end{aligned}$$

Da queste tre equazioni cerchiamo ora di eliminare tutte le variabili a parte  $D(s)$  e  $Y(s)$  che sono rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema

$$Y(s) = W(s)G_1(s)E(s) + D(s) = -W(s)G_1(s)H(s)Y(s) + D(s)$$

Moltiplicando e raccogliendo i termini in  $Y(s)$  e in  $D(s)$  separatamente si ottiene

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + W(s)G_1(s)H(s)}$$

Quindi la relazione tra l'ingresso  $d(t)$  e l'uscita  $y(t)$  si può descrivere da un unico blocco con funzione di trasferimento

$$\frac{1}{1 + W(s)G_1(s)H(s)}$$

In maniera alternativa, applicando le regole di riduzione elementari, si osserva che se  $r(t) = 0$ , allora lo schema precedente è equivalente allo schema a blocchi mostrato in figura 1.14.

E' chiaro che, usando le regole elementari sulla serie e sulla retroazione si ottiene la stessa funzione di trasferimento visto sopra.

## 1.8 Sistemi con ritardo

Mostreremo in questo capitolo una classe di sistemi aventi funzione di trasferimento non razionale che sono importanti in molte applicazioni. Si tratta dei così detti *sistemi con ritardo*. Si tratta di sistemi descritti dall'equazione

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t - T),$$

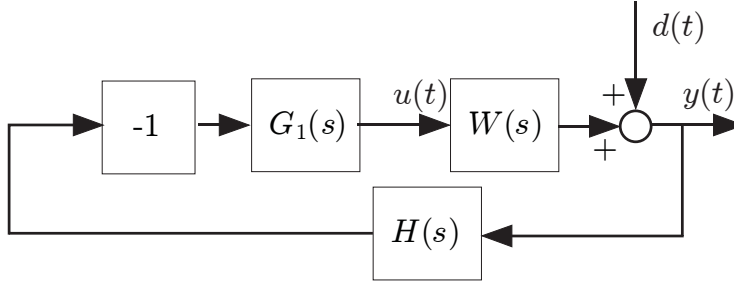


Figure 1.14:

che corrisponde alla equazione differenziale vista in precedenza, ma con la presenza di un ritardo  $T$  nell'ingresso. Questo modello descrive la situazione in cui il comando col quale vorremmo agire sul sistema al tempo  $t$ , in realtà è applicato solo dopo un ritardo per limiti intrinseci dell'attuatore (o del sensore). Utilizzando le trasformate di Laplace si ottiene

$$Y(s) = Y_\ell(s) + e^{-sT}W(s)U(s),$$

dove  $Y_\ell(s)$  è la risposta libera che coincide con la risposta libera del sistema senza ritardo, mentre  $W(s)$  coincide con la funzione di trasferimento del sistema senza ritardo. Quindi il sistema avrà funzione di trasferimento

$$\bar{W}(s) = e^{-sT} \frac{b(s)}{a(s)}$$

**Esempio 1.7** La figura 1.15 mostra un miscelatore che regola il flusso di fluidi a temperature diverse  $T_1, T_2$  in modo tale che il flusso totale miscelato sia costante e uguale a  $f$ . Questo fluido viene riversato in una vasca che contiene una quantità di fluido costante per il fatto che da essa fuoriesce del fluido mescolato a temperatura  $y$  e con flusso  $f$  uguale a quello entrante. Sia  $u$  la temperatura del fluido all'uscita del miscelatore e  $\bar{u}$  la temperatura del fluido che entra nel serbatoio. La temperatura  $u(t)$  sarà regolata dal miscelatore e potrà assumere un valore compreso tra  $T_1$  e  $T_2$

$$u(t) = w(t)T_1 + (1 - w(t))T_2 = T_2 + (T_1 - T_2)w(t)$$

dove  $w(t)$  rappresenta la posizione del comando del miscelatore al tempo  $t$ . Nel serbatoio intervengono due flussi di calore, uno entrante e uno uscente. Nell'intervallo infinitesimo  $dt$  nel contenitore entra una quantità di massa infinitesima  $dm = f dt$  e una quantità di calore infinitesima  $dQ_{in} = cdm \bar{u}$ , dove  $c$  è il calore specifico del fluido. Nello stesso intervallo di tempo fuoriesce dal contenitore la stessa quantità di massa infinitesima  $dm = f dt$  e una quantità di calore infinitesima  $dQ_{out} = cdm y$ . Ne risultano i seguenti flussi di calore

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{in}}{dt} &= c \frac{dm}{dt} \bar{u} = cf\bar{u} \\ \frac{dQ_{out}}{dt} &= c \frac{dm}{dt} y = cfy \end{aligned}$$



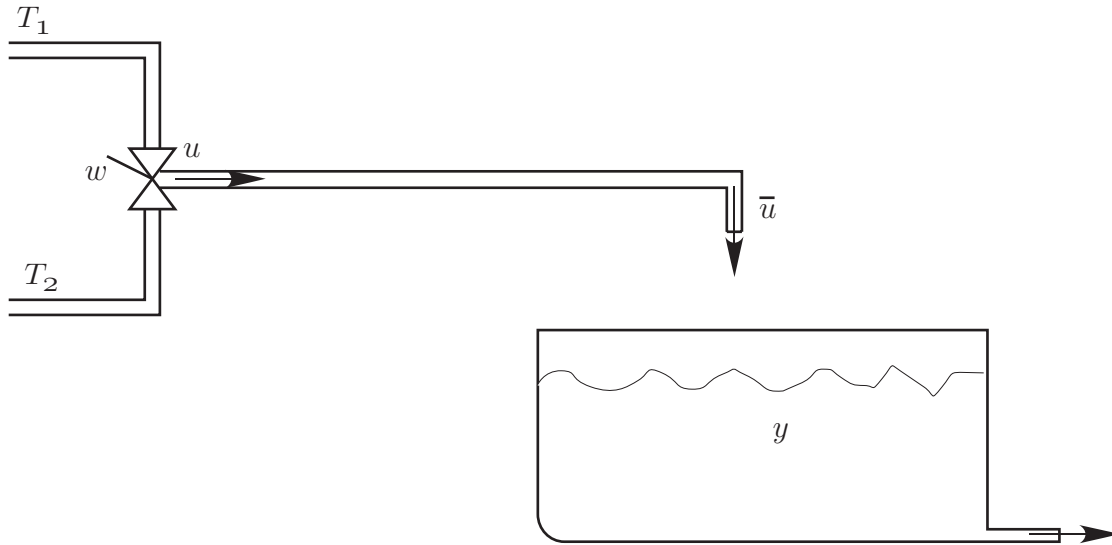


Figure 1.15:

Se il liquido nel serbatoio ha massa  $M$ , allora il flusso di calore complessivo porterà a una variazione di temperatura proporzionale

$$cM \frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ_{in}}{dt} - \frac{dQ_{out}}{dt} = cf(\bar{u} - y)$$

Se la velocità del fluido è  $v$  ed  $L$  è la distanza tra il miscelatore e il serbatoio, allora  $\bar{u}$  sarà ritardata di  $\tau = L/v$  rispetto a  $u$  e quindi il sistema sarà descritto dall'equazione differenziale con ritardo

$$M\dot{y}(t) + fy(t) = fu(t - \tau),$$

che corrisponderà alla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{e^{-s\tau}}{1 + s(M/f)}.$$