

# Chapter 1

## Criterio di Nyquist

Si consideri il sistema in retroazione illustrato nella figura 1.1. La funzione di trasferimento tra  $r$  e  $y$  è

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}. \quad (1.1)$$

Sia  $W(s) := H(s)C(s)G(s)$  il **guadagno d'anello** del sistema.

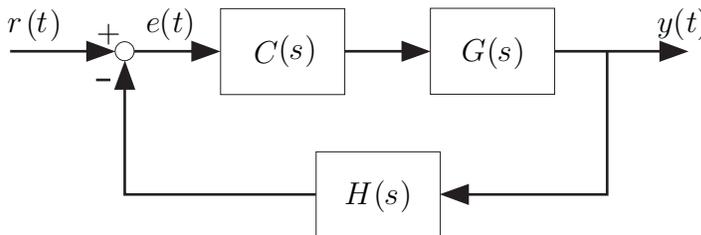


Figure 1.1: Sistema retroazionato

Il problema di determinare la stabilità del sistema retroazionato può essere risolto verificando, ad esempio attraverso la tabella di Routh, che i poli della funzione di trasferimento appartengano al semipiano sinistro del piano complesso. Inoltre, abbiamo verificato che la posizione dei poli influenza il transitorio nella risposta al gradino di un sistema e quindi abbiamo notato che il metodo del luogo delle radici risulta conveniente per progettare un sistema di controllo avente transitorio con caratteristiche preassegnate.

In questo capitolo proporremo un metodo alternativo per la verifica della stabilità di un sistema, basato sulla risposta in frequenza del sistema. Questo criterio di stabilità, detto **criterio di Nyquist** si basa sul cosiddetto diagramma di Nyquist.

Data una funzione di trasferimento  $W(s)$  il **diagramma di Nyquist** di  $W(s)$  coincide semplicemente col sottoinsieme del piano complesso comprendente i punti

$$\{W(j\omega) : \omega \geq 0\}.$$

L'insieme  $\{W(j\omega) : \omega \in \mathbb{R}\}$  è detto invece il **diagramma di Nyquist completo** di  $W(s)$ . Dalla relazione  $W(-j\omega) = \overline{W(j\omega)}$ , si deduce che il diagramma di Nyquist completo si ottiene dal diagramma di Nyquist semplicemente aggiungendo a questo i punti della curva  $\{W(j\omega), \omega < 0\}$  che è esattamente la curva che si ottiene ribaltando il diagramma di Nyquist rispetto all'asse reale (vedi figura 1.2).

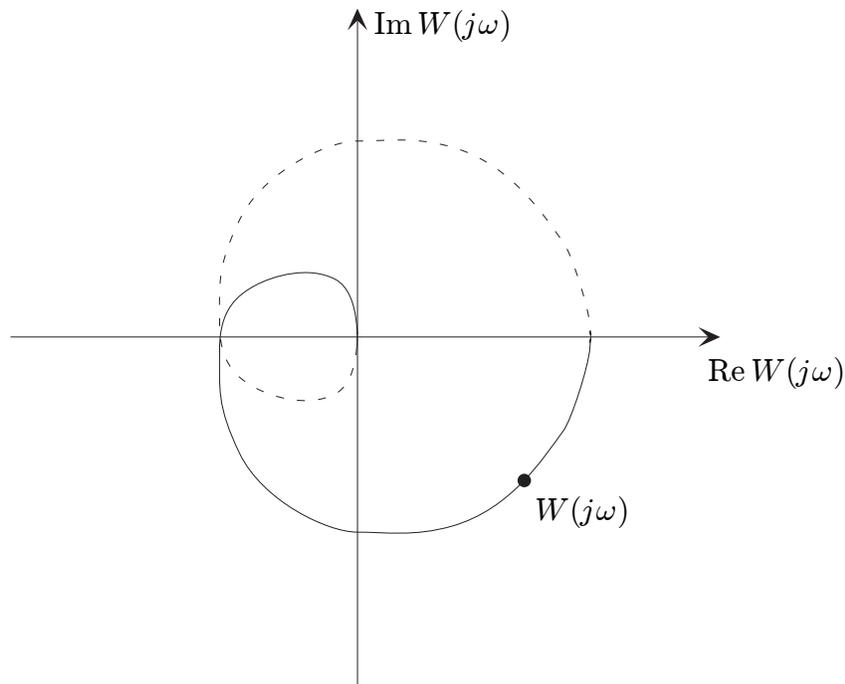


Figure 1.2:

Prima di procedere e illustrare in dettaglio il criterio di Nyquist, facciamo alcune osservazioni fondamentali.

- **Un criterio di stabilità per funzioni di trasferimento non razionali:** Il criterio di Nyquist si basa su di una caratterizzazione della stabilità che è di natura completamente diversa da quella utilizzata finora basata sulla posizione dei poli della funzione di trasferimento. Questa caratterizzazione alternativa vale anche per sistemi descritti da funzioni di trasferimento non razionali ed è fondata su concetti di analisi funzionale molto complessi (le algebre di Banach, vedi pagine 141-150 del libro E. Hille, R. S. Phillips, "Functional Analysis and Semigroups", American Mathematical Society, 1957), che vanno ben oltre lo scopo di questa dispensa. Nel capitolo 1.2 daremo qualche cenno su questo tipo di analisi.
- **Determinazione sperimentale del diagramma di Nyquist:** Ricordiamo che  $W(j\omega)$  assume un ruolo importante, perché essa ci fornisce la risposta

in frequenza del sistema, cioè permette di determinare in maniera immediata la risposta a segnali di tipo sinusoidale. Questo fatto permette di tracciare il diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento senza necessariamente conoscerne la espressione analitica, ma piuttosto determinando sperimentalmente per punti il valore di  $W(j\omega)$ , alimentando il sistema con ingressi sinusoidali di diverse pulsazioni  $\omega$  e valutando ampiezze e fase dell'uscita corrispondente.

- **Carattere locale del criterio di Nyquist:** Come sarà evidenziato nella sezione 1.3 dedicata ai margini di stabilità, in realtà, per la maggior parte dei sistemi, la stabilità del sistema in catena chiusa in figura 1.2 non dipenderà dall'intero diagramma di Nyquist  $\{W(j\omega) : \omega \geq 0\}$ , ma solo dalla sua porzione corrispondente alle pulsazioni che stanno nell'intorno di due pulsazioni critiche  $\omega_A, \omega_B$  che sono così definite

$$|W(j\omega_A)| = 1, \quad \angle W(j\omega_B) = \pi$$

Questo ha come conseguenza che l'analisi di stabilità basata sul diagramma di Nyquist può risultare semplice anche per sistemi con  $W(s)$  di ordine elevato se  $W(j\omega)$  risulta essere regolare nell'intorno di  $\omega_A$  e  $\omega_B$ . Inoltre, in relazione con l'osservazione precedente, nel ricavare sperimentalmente  $W(j\omega)$  ci si può limitare alle pulsazioni che stanno nell'intorno di  $\omega_A$  e  $\omega_B$ .

- **Il criterio di Nyquist e la stabilità robusta:** Sempre nella sezione 1.3 verrà mostrato che dal diagramma di Nyquist sarà possibile determinare non solo se un sistema retroazionato è stabile, ma anche quanto "lontano" è dalla instabilità. Più precisamente si riuscirà a dare degli indici coi quali si potrà valutare quanto si può perturbare  $W(s)$  riuscendo nonostante ciò a conservare la stabilità del sistema in catena chiusa. Questa proprietà è denominata nella teoria del controllo come **robustezza** della proprietà di stabilità del sistema retroazionato. Quantificare la robustezza di un sistema è un problema molto importante nei controlli automatici e molti libri sono dedicati alla sua caratterizzazione.
- **Il diagramma di Nyquist e il transitorio del sistema retroazionato:** Come dalla posizione dei poli e degli zeri del sistema in catena chiusa, anche dal diagramma di Nyquist di  $W(s)$  possono essere determinate le caratteristiche del transitorio del sistema in catena chiusa. Siccome il diagramma di Nyquist di  $W(s)$  sarà influenzato dalla funzione di trasferimento del controllore  $C(s)$  in maniera abbastanza semplice, allora sarà possibile utilizzare il diagramma di Nyquist come strumento di progetto del controllore per l'ottenimento di transitori con le caratteristiche volute. Questo sarà l'argomento del capitolo ?? dedicato al progetto di un sistema di controllo nel dominio della frequenza.

## 1.1 Il criterio di Nyquist per funzioni di trasferimento razionali

In questa sezione enunceremo il criterio di Nyquist per funzioni di trasferimento razionali e ne daremo una semplice dimostrazione.

Come notato precedentemente, se non avvengono cancellazioni tra le funzioni di trasferimento  $H(s)$ ,  $C(s)$  e  $G(s)$ , i poli della funzione di trasferimento  $T_{ry}(s)$  tra l'ingresso  $r(t)$  e l'uscita  $y(t)$  coincidono con gli zeri di  $1 + W(s)$  e quindi per la BIBO stabilità del sistema retroazionato è fondamentale determinare se esistono zeri di  $1 + W(s)$  con parte reale  $\geq 0$ . Questa condizione può essere verificata attraverso il diagramma di Nyquist di  $W(s)$ . Per capire questo fatto è utile introdurre il seguente risultato di analisi complessa.

### 1.1.1 Principio dell'argomento

Per enunciare il criterio di Nyquist è necessario premettere un risultato che costituisce uno dei teoremi fondamentali dell'analisi complessa. Si tratta del lemma dell'indicatore logaritmico o **principio dell'argomento**.

#### Teorema 1.1 Principio dell'argomento

Sia

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow \gamma(t), \end{aligned}$$

una curva semplice chiusa (cioè  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ) in  $\mathbb{C}$  percorsa in senso **orario**, e sia  $F(s)$  una funzione razionale **priva di zeri e poli su  $\gamma$** . Allora

$$\begin{aligned} F(\gamma) : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longrightarrow F(\gamma(t)) \end{aligned}$$

è una curva chiusa (vedi figura 1.3) in  $\mathbb{C}$ , e inoltre il numero  $N$  di aggiramenti dell'origine di  $F(\gamma)$  (contati positivi se percorsi in senso antiorario e negativi se percorsi in senso orario) è dato da

$$N = P - Z,$$

dove

$Z$  è il numero di zeri di  $F(s)$  dentro  $\gamma$  contati con la molteplicità  
 $P$  è il numero di poli di  $F(s)$  dentro  $\gamma$  contati con la molteplicità.

Prima di procedere con la dimostrazione, faremo alcune considerazioni sulla definizione di fase di un numero complesso e di una funzione a valori complessi. Dato un numero complesso  $s \in \mathbb{C}$  **diverso da zero**, la fase di  $s$ , denotata con  $\angle s$ , è un numero

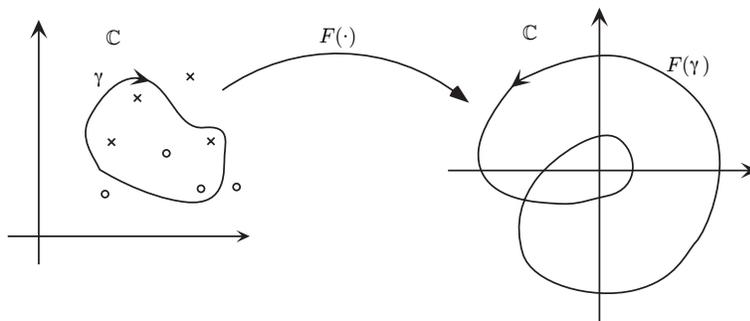


Figure 1.3:

reale definito a meno di multipli di  $2\pi$ . Ogni scelta del multiplo di  $2\pi$  viene detta **determinazione** di  $\angle s$ . Questa ambiguità rimane anche quando si considera la fase di una funzione a valori complessi. Più precisamente sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione tale che  $f(t) \neq 0$  per tutti  $t \in \mathbb{R}$ . Allora in questo caso è per ogni  $t \in \mathbb{R}$  che la fase  $\angle f(t)$  è definita a meno di multipli di  $2\pi$  e quindi ne può risultare un andamento estremamente irregolare. Anche in questo caso le scelte dei multipli di  $2\pi$  fatte per ogni  $t$  porta a una determinazione della  $\angle f(t)$ . E' essenziale in questo caso notare che, se la funzione  $f(t)$  è continua, esisterà una determinazione continua di  $\angle f(t)$ . Anzi ne esisteranno infinite, definite a meno di multipli di  $2\pi$ . Più precisamente, esisterà una funzione continua  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\angle f(t) = \phi(t) + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Questo fa sì che in questo caso una determinazione continua è univocamente individuata se ne diamo il valore in un punto. Inoltre tutte le versioni continue hanno la stessa variazione, cioè lo stesso incremento del valore di  $\angle f(t)$  tra un  $t_1 \in \mathbb{R}$  e un altro  $t_2 \in \mathbb{R}$ .

### 1.1.2 Dimostrazione del teorema 1.1

Si noti che, poiché per ipotesi la curva  $\gamma$  non attraversa poli e zeri di  $F(s)$ , la funzione  $F(\gamma(t))$  è continua e  $F(\gamma(t)) \neq 0$  per ogni  $t \in [0, 1]$ . Sia  $\phi(t)$  una determinazione continua  $\angle F(\gamma(t))$  e definiamo la variazione di  $\phi(t)$  tra 0 e 1 come

$$\Delta\phi(t) := \phi(1) - \phi(0).$$

Si noti che, come notato sopra, la variazione  $\Delta\phi(t)$  è una quantità ben definita. In effetti è facile convincersi  $\Delta\phi$  coincide proprio con  $2\pi N$ .

D'altra parte si noti che

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

e quindi

$$\phi(t) = \angle F(\gamma(t)) = \angle K + \sum_{i=1}^m \angle(\gamma(t) - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(\gamma(t) - p_i)$$

Gli andamenti della funzione  $\angle(\gamma(t) - z_i)$  sono illustrati nella figura 1.4 nei due casi in cui  $z_i$  è dentro o fuori la curva  $\gamma$ .

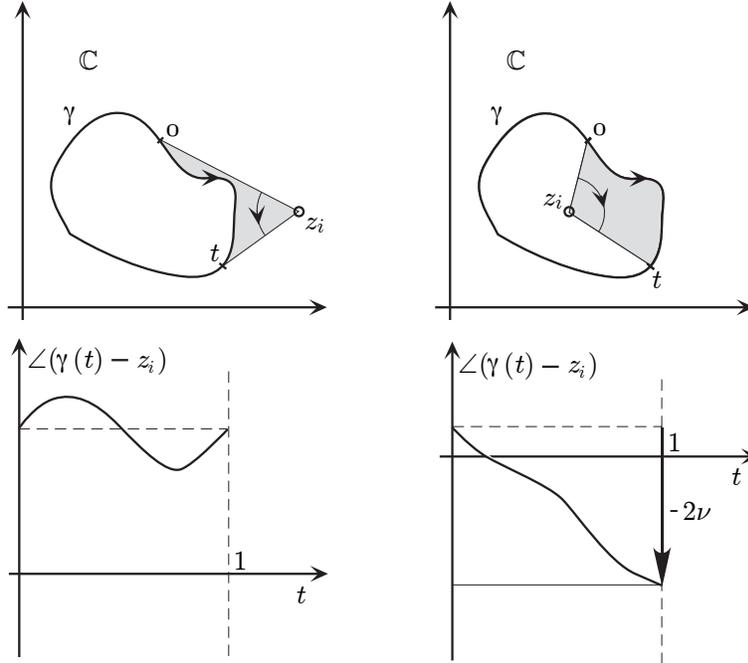


Figure 1.4:

Questi due casi si distinguono dalla variazione

$$\Delta \angle(\gamma(t) - z_i) := \angle(\gamma(1) - z_i) - \angle(\gamma(0) - z_i)$$

Infatti, se  $z_i$  è situato all'esterno di  $\gamma$ , allora  $\Delta \angle(\gamma(t) - z_i) = 0$ , altrimenti  $\Delta \angle(\gamma(t) - z_i) = -2\pi$ . Infine si noti che

$$\Delta \phi(t) = \Delta \angle K + \sum_{i=1}^m \Delta \angle(\gamma(t) - z_i) - \sum_{i=1}^n \Delta \angle(\gamma(t) - p_i) = -2\pi Z - (-2\pi)P$$

dove si è utilizzato il fatto che  $\angle K$  è una funzione costante di  $t$  e quindi  $\Delta \angle K = 0$ . Si deduce quindi che

$$2\pi N = \Delta \phi(t) = 2\pi(P - Z)$$

Cancellando la costante  $2\pi$  si ottiene la tesi. ■

### 1.1.3 Il criterio di Nyquist e la sua dimostrazione

Il principio dell'argomento può essere utilizzato per determinare la posizione degli zeri di  $1 + W(s)$  a partire dal diagramma di Nyquist di  $W(s)$ . Si consideri a tal fine la curva chiusa  $\gamma_R$  costituita dalla porzione di asse immaginario  $[-jR, jR]$  e dalla semicirconferenza  $\{R e^{j\theta} | \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$  (vedi figura 1.5). Questa curva, che si suppone percorsa in senso orario, dipende dal parametro  $R$  che si farà tendere all'infinito.

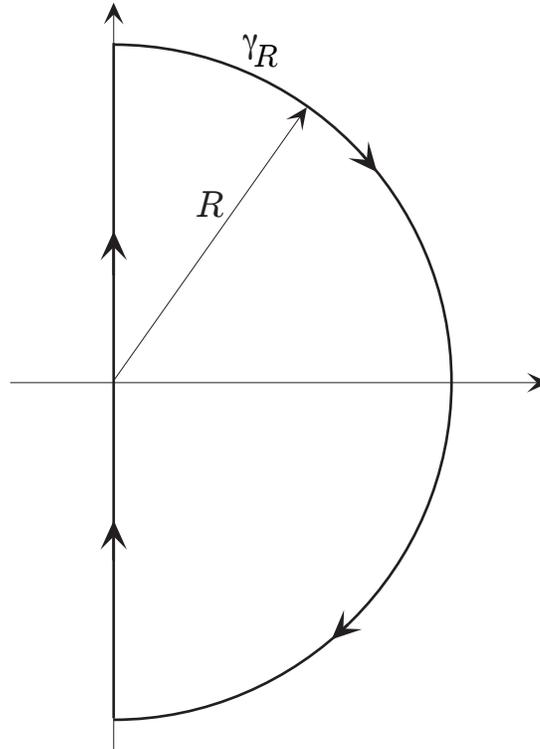


Figure 1.5:

Consideriamo preliminarmente la situazione semplificata nella quale

1.  $1 + W(s)$  non ha zeri né poli sull'asse immaginario;
2.  $1 + W(s)$  non ha zeri né poli all' $\infty$ . Ciò corrisponde ad avere  $1 + W(s)$  propria e  $W(\infty) \neq -1$

Allora  $\gamma_R$  sarà mappata da  $F(s) := 1 + W(s)$  nella curva  $F(\gamma_R)$  che per  $R \rightarrow +\infty$  tende a convergere al diagramma di Nyquist di  $F(s)$ . Ciò è conseguenza del fatto che, dall'ipotesi 2, la porzione di  $\gamma_R$  costituita dalla semicirconferenza  $\{R e^{j\theta} | \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$  tende ad essere mappata da  $F(s)$  in un punto che non è l'origine

$$F(R e^{j\theta}) = 1 + W(R e^{j\theta}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 1 + W(\infty) \neq 0.$$

L'ipotesi 1 assicura che  $\gamma_R$  non tocca i poli e gli zeri di  $F(s)$ . Si noti infine che  $F(s) = 1 + W(s)$  e  $W(s)$  hanno diagrammi di Nyquist che sono l'uno il traslato dell'altro e che i giri che il diagramma di Nyquist di  $F(s)$  fa attorno all'origine coincide con il numero di giri che il diagramma di Nyquist di  $W(s)$  fa attorno al punto  $-1$ . Possiamo così enunciare il seguente criterio.

### Il criterio di Nyquist

Sia  $W(s)$  una funzione razionale e supponiamo che valgano le ipotesi 1. e 2. precedenti. Allora avremo che

$$Z = P - N, \quad (1.2)$$

dove

$N$  è il numero di giri in senso antiorario che il diagramma di Nyquist di  $W(s)$  fa attorno al punto critico  $-1$ ,

$Z$  è il numero di zeri instabili di  $1 + W(s)$ ,

$P$  è il numero di poli instabili di  $1 + W(s)$ .

Si noti che  $P$  coincide con il numero dei poli instabili di  $W(s)$ . Questo dato è sempre noto in anticipo e spesso si ha che  $W(s)$  è stabile e quindi  $P = 0$ . Quindi la formula (1.2) può essere utilizzata per determinare  $Z$ , che coincide con i poli instabili della funzione di trasferimento a catena chiusa (1.1) e quindi permette di stabilire se il sistema retroazionato è stabile o meno.

Si noti che, come per il criterio di Routh Hurwitz, anche il criterio di Nyquist può essere utilizzato per studiare la stabilità di un sistema retroazionato dipendente da un parametro. Consideriamo lo schema illustrato in figura 1.1 dove  $C(s) = K\bar{C}(s)$  e dove  $K$  è un guadagno reale variabile, mentre  $\bar{C}(s)$  è una funzione di trasferimento fissata. Fissiamo  $W(s) := \bar{C}(s)H(s)G(s)$ . Studiare la stabilità in catena chiusa è equivalente a determinare gli zeri instabili di  $1 + KW(s)$ . Per  $K \neq 0$ , gli zeri di  $1 + KW(s)$  coincidono con gli zeri di  $1/K + W(s)$ . Quindi, modificando il ragionamento precedente in maniera opportuna, è possibile adattare il criterio di Nyquist semplicemente indicando con  $N$  il numero di giri in senso antiorario che il diagramma di Nyquist di  $W(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ .

### 1.1.4 Esempi di applicazione del criterio di Nyquist

**Esempio 1.2** Sia  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{s+1}{s+10}.$$

Si può dimostrare che in questo caso il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  è una circonferenza. In effetti si può dimostrare che ogni funzione di trasferimento del tipo

$$W(s) = K \frac{s+\alpha}{s+\beta}.$$

ha diagramma di Nyquist circolare. Si consideri la seguente equazione nelle incognite  $C, R \in \mathbb{R}$  che vogliamo soddisfare per tutti gli  $s$

$$K \frac{s + \alpha}{s + \beta} - C = R \frac{s - \beta}{s + \beta}$$

Da questa si deduce che vale la seguente uguaglianza per tutti gli  $s$

$$Ks + K\alpha - Cs - C\beta = Rs - R\beta.$$

Eguagliando i termini relativi alle stesse potenze di  $s$

$$\begin{cases} K - C = R \\ K\alpha - C\beta = -R\beta \end{cases} \quad \begin{cases} C = K \frac{\alpha + \beta}{2\beta} \\ R = K \frac{\beta - \alpha}{2\beta} \end{cases}.$$

Quindi la precedente equazione ha soluzione. Da ciò possiamo dedurre che

$$|W(j\omega) - C| = |R\tilde{W}(j\omega)| \quad \text{dove} \quad \tilde{W}(s) = \frac{s - \beta}{s + \beta}.$$

Si noti che  $\tilde{W}(s)$  è un passatutto cioè  $|\tilde{W}(j\omega)| = 1$  per tutti gli  $\omega$ , da cui si deduce che

$$|W(j\omega) - C| = |R| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Ciò mostra che il diagramma di Nyquist di  $W(s)$  sta sulla circonferenza di centro  $C$  e raggio  $|R|$ . Nel nostro caso particolare si ha che  $\alpha = 1$  e  $\beta = 10$  e quindi il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  è una circonferenza di centro  $C = 11/20$  e raggio  $|R| = 9/20$  ed è illustrato nella figura 1.6. Si noti che  $G(0) = 1/10$  e che  $G(\infty) = 1$ . Inoltre

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{10 + \omega^2}{100 + \omega^2} \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{9\omega}{100 + \omega^2}$$

e quindi  $\operatorname{Im}[G(j\omega)] \geq 0$  per tutti gli  $\omega > 0$ . Ciò ci permette di concludere che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  percorre mezza circonferenza dal punto  $1/10$  al punto  $1$  in senso orario.

Per applicare il criterio di Nyquist dobbiamo controllarne i giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ . Si noti che in questo caso  $P = 0$ . Se  $-1/K < 1/10$  (cioè  $K > 0$  e  $K < -10$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $1/10 < -1/K < 1$  (cioè  $-10 < K < -1$ ), il diagramma fa un giro in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -1$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 1$  polo instabile in catena chiusa.

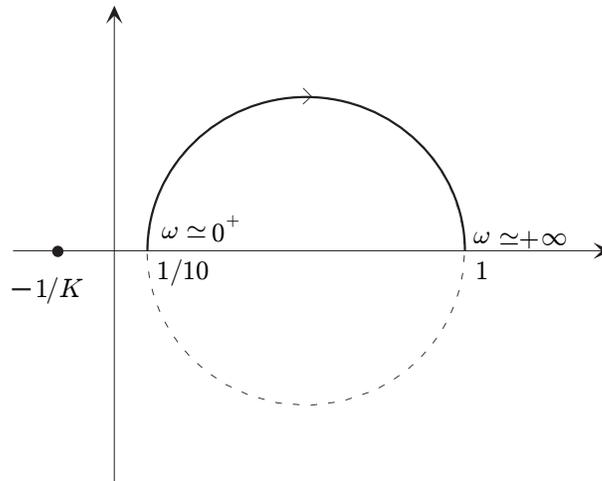


Figure 1.6:

Se  $-1/K > 1$  (cioè  $-1 < K < 0$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

I risultati ottenuti sono confermati dalla regola di Cartesio applicata al polinomio

$$s + 1 + K(s + 10) = (K + 1)s + (K + 10),$$

che suggerisce che, se  $-10 < K < -1$ , allora abbiamo 1 poli instabili in catena chiusa, se  $K < -10$  o  $K > -1$ , allora abbiamo 0 poli instabili in catena chiusa.

**Esempio 1.3** Sia  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}.$$

Per determinare il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  si noti che

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)(j\omega + 3)} = \\ &= \frac{(1 - j\omega)(2 - j\omega)(3 - j\omega)}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 9)} = \\ &= \frac{(6 - 6\omega^2) + j(-11\omega + \omega^3)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(9 + \omega^2)} \end{aligned}$$

Si noti che

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{6 - 6\omega^2}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(9 + \omega^2)} \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{-11\omega + \omega^3}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(9 + \omega^2)}$$

Si noti che possiamo ricavare i seguenti attraversamenti degli assi reale ed immaginario

$\omega$	$\text{Re}[G(j\omega)]$	$\text{Im}[G(j\omega)]$
0	$1/6$	0
1	0	$-1/10$
$\sqrt{11}$	$-1/60$	0
$+\infty$	0	0

Ne risulta il diagramma di Nyquist illustrato nella figura 1.7.

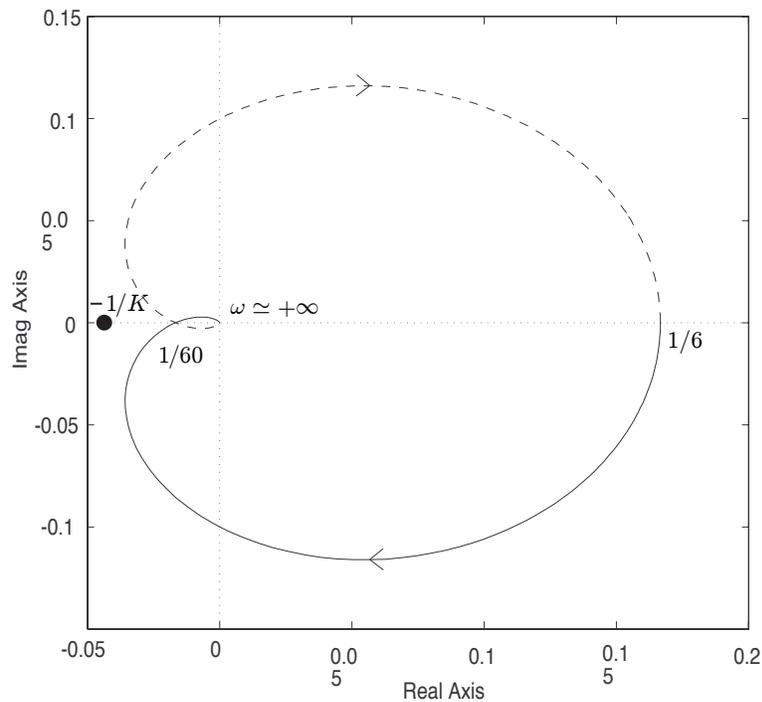


Figure 1.7:

Per applicare il criterio di Nyquist dobbiamo controllare i giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ . Si noti che in questo caso  $P = 0$ .

Se  $-1/K < -1/60$  (cioè  $0 < K < 60$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-1/60 < -1/K < 0$  (cioè  $K > 60$ ), il diagramma fa due giri in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -2$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 2$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $0 < -1/K < 1/6$  (cioè  $K < -6$ ), il diagramma fa un giri in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -2$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 1$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-1/K > 1/6$  (cioè  $-6 < K < 0$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e

quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

Si noti che per  $K = 60$ , il criterio non è applicabile perché in questo caso il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  attraversa il punto critico  $-1/K$ . In effetti in questo caso  $1 + KW(s)$  ha uno zero sull'asse immaginario contro l'ipotesi 1.

I risultati ottenuti sono confermati dal criterio di Routh-Hurwitz. Infatti, la tabella di Routh di  $(s + 1)(s + 2)(s + 3) + K = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + K = 0$  è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 6 + K \\ 1 & \frac{60-K}{6} & \\ 0 & 6 + K & \end{array}$$

Attraverso questa tabella possiamo concludere che, se  $K < -6$ , allora abbiamo 1 polo instabile in catena chiusa, se  $-6 < K < 60$ , allora abbiamo 0 poli instabili in catena chiusa, se  $K > 60$ , allora abbiamo 2 poli instabili in catena chiusa.

**Esempio 1.4** Sia  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{s}{(s + 1)(s + 10)}.$$

Si può dimostrare che anche in questo caso il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  sta su una circonferenza. In effetti si può dimostrare che ogni funzione di trasferimento del tipo

$$W(s) = \frac{Ks}{s^2 + \alpha s + \beta}.$$

ha diagramma di Nyquist circolare. Si consideri la seguente equazione nelle incognite  $C, R \in \mathbb{R}$  che vogliamo soddisfare per tutti gli  $s$

$$\frac{Ks}{s^2 + \alpha s + \beta} - C = R \frac{s^2 - \alpha s + \beta}{s^2 + \alpha s + \beta}.$$

Da questa si deduce che vale la seguente uguaglianza per tutti gli  $s$

$$Ks - Cs^2 - \alpha Cs - \beta C = Rs^2 - \alpha Rs + \beta R.$$

Eguagliando i termini relativi alle stesse potenze di  $s$

$$\begin{cases} -C = R \\ K - \alpha C = -\alpha R \\ -\beta C = \beta R \end{cases} \implies K = -\alpha(R - C) = 2\alpha C \quad \begin{cases} C = \frac{K}{2\alpha} \\ R = -\frac{K}{2\alpha} \end{cases}.$$

Quindi la precedente equazione ha soluzione. Da ciò possiamo dedurre che

$$|W(j\omega) - C| = |R\tilde{W}(j\omega)| \quad \text{dove} \quad \tilde{W}(s) = \frac{s^2 - \alpha s + \beta}{s^2 + \alpha s + \beta}.$$

Si noti che  $\tilde{W}(s)$  è un passatutto cioè  $|\tilde{W}(j\omega)| = 1$  per tutti gli  $\omega$ , da cui si deduce che

$$|W(j\omega) - C| = |R| \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Ciò mostra che il diagramma di Nyquist di  $W(s)$  sta sulla circonferenza di centro  $C$  e raggio  $|R|$ . Nel nostro caso particolare si ha che  $K = 1$ ,  $\alpha = 11$  e  $\beta = 10$  e quindi il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  è una circonferenza di centro  $C = 1/22$  e raggio  $|R| = 1/22$  ed è illustrato nella figura 1.8. Si noti che

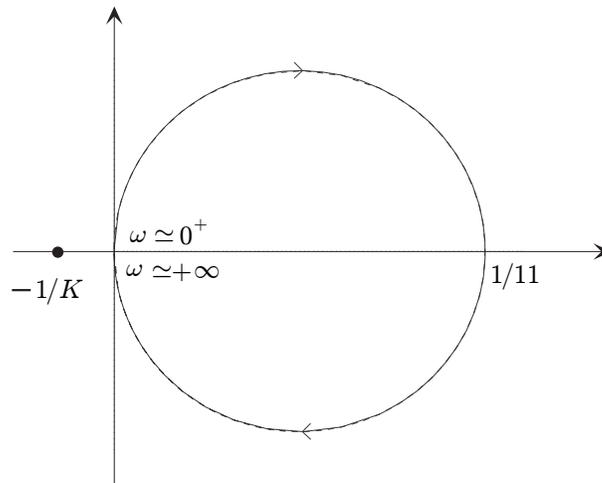


Figure 1.8:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{11\omega^2}{(10 - \omega^2)^2 + 121\omega^2} \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{\omega(1 - 10\omega^2)}{(10 - \omega^2)^2 + 121\omega^2}$$

e quindi  $\operatorname{Re}[G(j\omega)] \geq 0$  per tutti gli  $\omega$ , mentre  $\operatorname{Im}[G(j\omega)] \geq 0$  per tutti gli  $\omega \leq 10$ . Ciò ci permette di concludere che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  percorre la circonferenza in senso orario.

Per applicare il criterio di Nyquist dobbiamo controllarne i giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ . Si noti che in questo caso  $P = 0$ .

Se  $-1/K < 0$  (cioè  $K > 0$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $0 < -1/K < 1/11$  (cioè  $K < -11$ ), il diagramma fa due giri in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -2$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 2$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-1/K > 1/11$  (cioè  $-11 < K < 0$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

I risultati ottenuti sono confermati dalla regola di Cartesio applicata al polinomio

$$s^2 + 11s + 10 + Ks = s^2 + (K + 11)s + 10,$$

che suggerisce che, se  $K < -11$ , allora abbiamo 2 poli instabili in catena chiusa, se  $K > -11$ , allora abbiamo 0 poli instabili in catena chiusa.

**Esercizio 1.5** Dimostrare che il diagramma di Nyquist di

$$K \frac{s^2 + \alpha s + \beta}{s^2 + \gamma s + \beta}$$

è circolare.

### 1.1.5 Analisi dei casi critici

Cerchiamo ora di analizzare le condizioni 1 e 2 e per poi estendere l'applicabilità del criterio di Nyquist anche al caso in cui tali ipotesi siano indebolite.

- 1A.**  $1 + W(s)$  non ha poli sull'asse immaginario se e solo se  $W(s)$  non ha poli sull'asse immaginario;
- 1B.**  $1 + W(s)$  non ha zeri sull'asse immaginario se e solo se *Il diagramma di Nyquist di  $W(s)$  non passa per  $-1$* ;
- 2A.**  $1 + W(s)$  non ha zeri all' $\infty$ , cioè è propria, se e solo se  $W(s)$  è propria;
- 2B.**  $1 + W(s)$  non ha zeri all' $\infty$  se e solo se  $W(\infty) \neq -1$  ;

Abbiamo così tradotto le ipotesi 1 e 2 in quattro ipotesi 1A, 1B, 2A, 2B sulla funzione di trasferimento di anello  $W(s)$ . Quando una di queste quattro ipotesi cade, per determinare  $Z$  (il numero di zeri instabili di  $1 + W(s)$ ), avremo bisogno di informazioni supplementari oltre a  $P$  (numero di poli instabili di  $W(s)$ ). Dei questi casi critici, tratteremo solo il primo che risulta l'unico di rilevanza applicativa.

#### 1A. Presenza di poli sull'asse immaginario

La presenza di poli sull'asse immaginario porta a diagrammi di Nyquist con rami che divergono per  $\omega$  tendente a valori finiti. Per risolvere queste situazioni è conveniente fare riferimento a curve del tipo  $\gamma_{R,\varepsilon}$  che aggirano tali

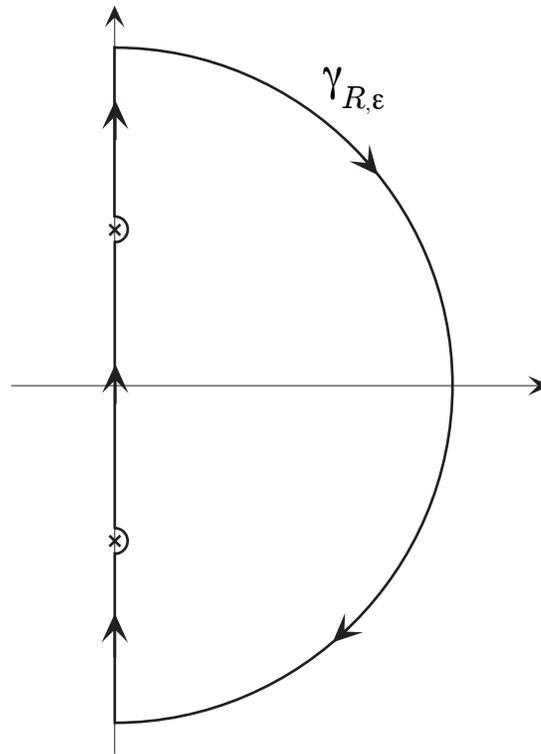


Figure 1.9:

poli senza toccarli con una semicirconfenza di raggio sufficientemente piccolo (vedi figura 1.9). La curva  $\gamma_{R,\epsilon}$  è detta **percorso uncinato**.

Per  $\epsilon$  piccolo e  $R$  grande l'immagine di  $\gamma_{R,\epsilon}$  tenderà ancora a coincidere col diagramma di Nyquist di  $W(s)$  a parte il fatto che le semicirconferenze di raggio  $\epsilon$  tenderanno a diventare circonferenze di raggio dell'ordine di  $1/\epsilon$ . Più precisamente, se  $j\omega_0$  è polo di  $W(s)$ , allora nell'intorno di  $j\omega_0$  avremo che

$$W(s) \simeq \frac{A}{(s - j\omega_0)^\nu},$$

dove  $\nu$  è la molteplicità del polo  $j\omega_0$ , mentre  $A$  è il residuo. Se  $s = j\omega_0 + \epsilon e^{j\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , e  $s$  percorre questa semicirconfenza in senso **antiorario**, allora

$$W(j\omega_0 + \epsilon e^{j\varphi}) \simeq \frac{A}{\epsilon^\nu} e^{-j\nu\varphi},$$

per cui si vede che l'immagine della semicirconfenza di raggio  $\epsilon$  percorsa in senso *antiorario* secondo un angolo di  $\pi$  diventa una curva circolare di raggio  $\frac{|A|}{\epsilon^\nu}$  tendente all' $\infty$ , percorsa in senso *orario* secondo un angolo di  $-\nu\pi$ . È quindi necessario conoscere la molteplicità  $\nu$  del polo immaginario. Questo percorso circolare permette di chiudere il diagramma di Nyquist che altrimenti in questo caso sarebbe una curva non chiusa.

**Osservazione 1.6** Si noti che, da come abbiamo aggirato i poli sull'asse immaginario, questi sono contati come poli stabili e quindi non contribuiscono al computo del numero  $P$ .

**Esempio 1.7** Supponiamo che  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{1}{s(s+10)}.$$

Si osservi che

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+10)} = \frac{\omega + j10}{-\omega(100 + \omega^2)},$$

da cui si deduce che

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{-1}{(100 + \omega^2)} \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{-10}{\omega(100 + \omega^2)}$$

Per il tracciamento del diagramma di Nyquist è utile evidenziare i seguenti punti del diagramma

$\omega$	$\operatorname{Re}[G(j\omega)]$	$\operatorname{Im}[G(j\omega)]$
0	$-1/10$	$-\infty$
$+\infty$	0	0

Abbiamo quindi che per  $\omega \rightarrow 0^+$  si ha un asintoto verticale corrispondente a  $\operatorname{Re} s = -1/10$ . Ne risulta il diagramma di Nyquist illustrato nella figura 1.10. Il diagramma di Nyquist in questo caso deve essere chiuso con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

Quindi per  $K > 0$  si hanno  $N = 0$  aggiramenti antiorari di  $-1/K$ , mentre per  $K < 0$  si hanno  $N = -1$  aggiramenti antiorari di  $-1/K$ . Tenendo conto che  $P = 0$ , dato che il polo nell'origine è da contare come polo stabile, si ottiene che i poli a catena chiusa sono

$$Z = \begin{cases} 0 & \text{per } K > 0 \\ 1 & \text{per } K < 0. \end{cases}$$

Ciò è confermato osservando che i poli in catena chiusa coincidono con gli zeri del polinomio a denominatore  $s^2 + 10s + K$  e la regola di Cartesio ci suggerisce esattamente che se  $K > 0$ , si hanno due radici stabili, mentre se  $K < 0$ , abbiamo una radice stabile e una instabile.

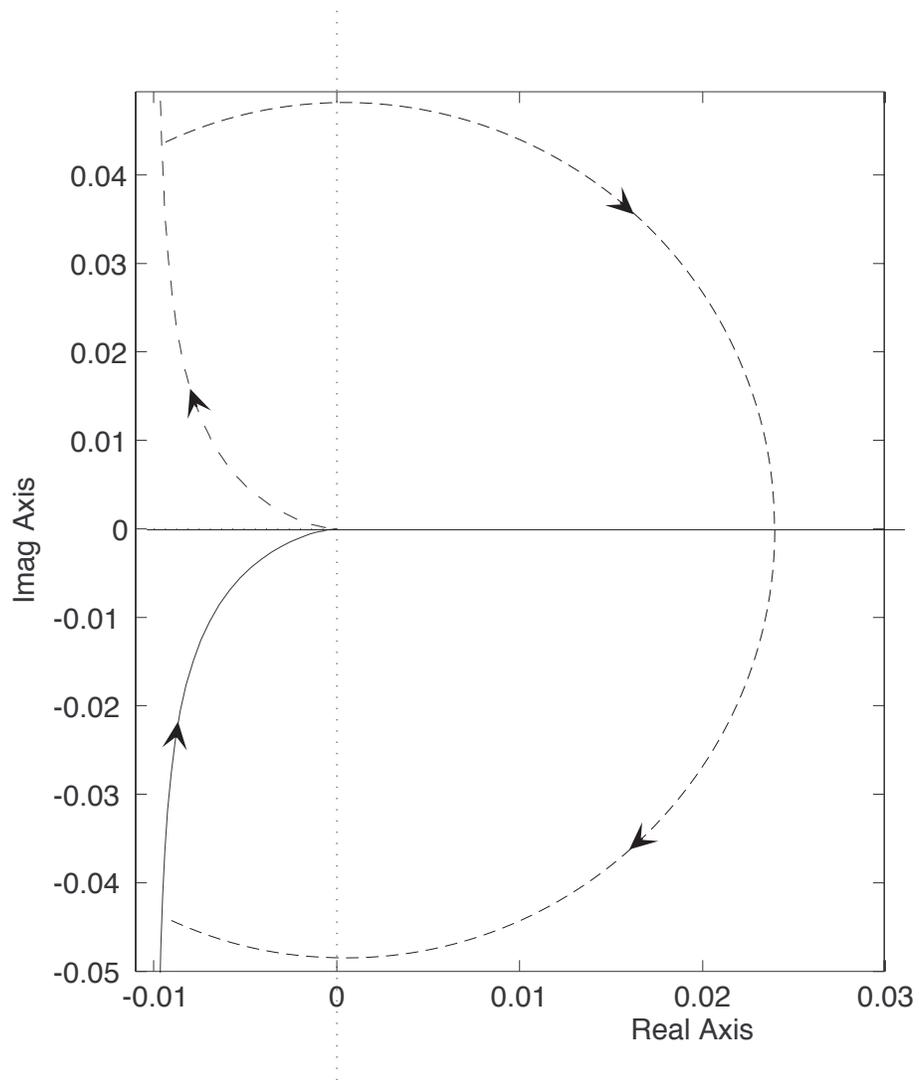


Figure 1.10:

**Esercizio 1.8** Supponiamo che  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+6)}.$$

Si osservi che

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+6)} = \frac{8\omega + j(12 - \omega^2)}{-\omega(4 + \omega^2)(36 + \omega^2)},$$

da cui si deduce che

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{-8}{(4 + \omega^2)(36 + \omega^2)} \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{12 - \omega^2}{-\omega(4 + \omega^2)(36 + \omega^2)}$$

Per il tracciamento del diagramma di Nyquist è utile evidenziare i seguenti punti del diagramma

$\omega$	$\operatorname{Re}[G(j\omega)]$	$\operatorname{Im}[G(j\omega)]$
0	-1/18	$-\infty$
$\sqrt{12}$	-1/96	0
$+\infty$	0	0

Abbiamo quindi che per  $\omega \rightarrow 0^+$  si ha un asintoto verticale corrispondente a  $\operatorname{Re} s = -1/18$ . Ne risulta il diagramma di Nyquist illustrato nella figura 1.11. Il diagramma di Nyquist in questo caso deve essere chiuso con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

Per applicare il criterio di Nyquist dobbiamo controllarne i giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ . Si noti che in questo caso  $P = 0$ .

Se  $-1/K < -1/96$  (cioè  $0 < K < 96$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-1/96 < -1/K < 0$  (cioè  $K > 96$ ), il diagramma fa 2 giri in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -2$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 2$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-1/K > 0$  (cioè  $K < 0$ ), il diagramma fa un giro in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -1$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 1$  poli instabili in catena chiusa.

I risultati ottenuti sono confermati dal criterio di Routh-Hurwitz. Infatti, la tabella di Routh di  $s(s+2)(s+6) + K = s^3 + 12s^2 + 8s + K = 0$  è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 12 & K \\ 1 & \frac{96-K}{12} & \\ 0 & K & \end{array}$$

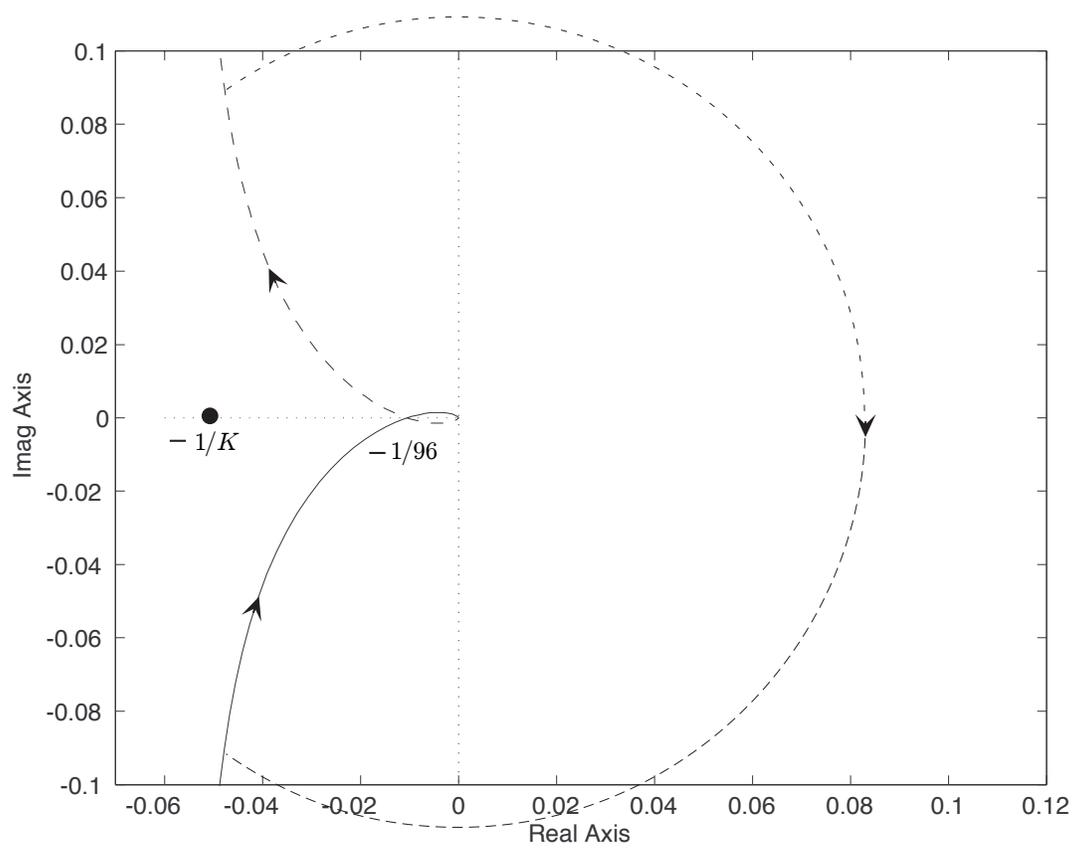


Figure 1.11:

Attraverso questa tabella possiamo concludere che, se  $K < 0$ , allora abbiamo 0 poli instabili in catena chiusa, se  $0 < K < 96$ , allora abbiamo 1 polo instabile in catena chiusa, se  $K > 96$ , allora abbiamo 2 poli instabili in catena chiusa.

**Esercizio 1.9** Supponiamo che  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+4)}.$$

Si osservi che

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{-\omega^2(j\omega + 4)} = \frac{(j\omega + 1)(4 - j\omega)}{-\omega^2(4 + \omega^2)} = \frac{(4 + \omega^2) + 3j\omega}{-\omega^2(4 + \omega^2)}.$$

da cui si deduce che

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = \frac{-(4 + \omega^2)}{\omega^2(4 + \omega^2)} \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = \frac{-3}{\omega(4 + \omega^2)}$$

Quindi  $\operatorname{Re} G(j\omega) \leq 0$  e  $\operatorname{Im} G(j\omega) \leq 0$  per ogni  $\omega > 0$ . Si noti inoltre che per  $\omega \rightarrow 0^+$  si ha

$$\operatorname{Re} G(j\omega) \simeq -\frac{1}{\omega^2}$$

$$\operatorname{Im} G(j\omega) \simeq -\frac{3}{\omega}.$$

Quindi non ci sono asintoti, ma i rami del diagramma di Nyquist vanno all' $\infty$  con un andamento parabolico. Per  $\omega \rightarrow +\infty$  si ha che  $\operatorname{Re} G(j\omega) \rightarrow 0$  e  $\operatorname{Im} G(j\omega) \rightarrow 0$ . Più precisamente, per  $\omega$  grandi si ha

$$G(j\omega) \simeq -\frac{1}{\omega^2},$$

e quindi per  $\omega \rightarrow +\infty$ , il diagramma di Nyquist va a zero lungo il semiasse reale negativo. Ne risulta il diagramma di Nyquist illustrato nella figura 1.12. Il diagramma di Nyquist in questo caso deve essere chiuso con una intera circonferenza percorsa in senso orario.

Per applicare il criterio di Nyquist dobbiamo controllarne i giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ . Si noti che in questo caso  $P = 0$ .

Se  $-1/K < 0$  (cioè  $K > 0$ ), il diagramma non fa giri al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-1/K > 0$  (cioè  $K < 0$ ), il diagramma fa un giro in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -1$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 1$  poli instabili in catena chiusa.

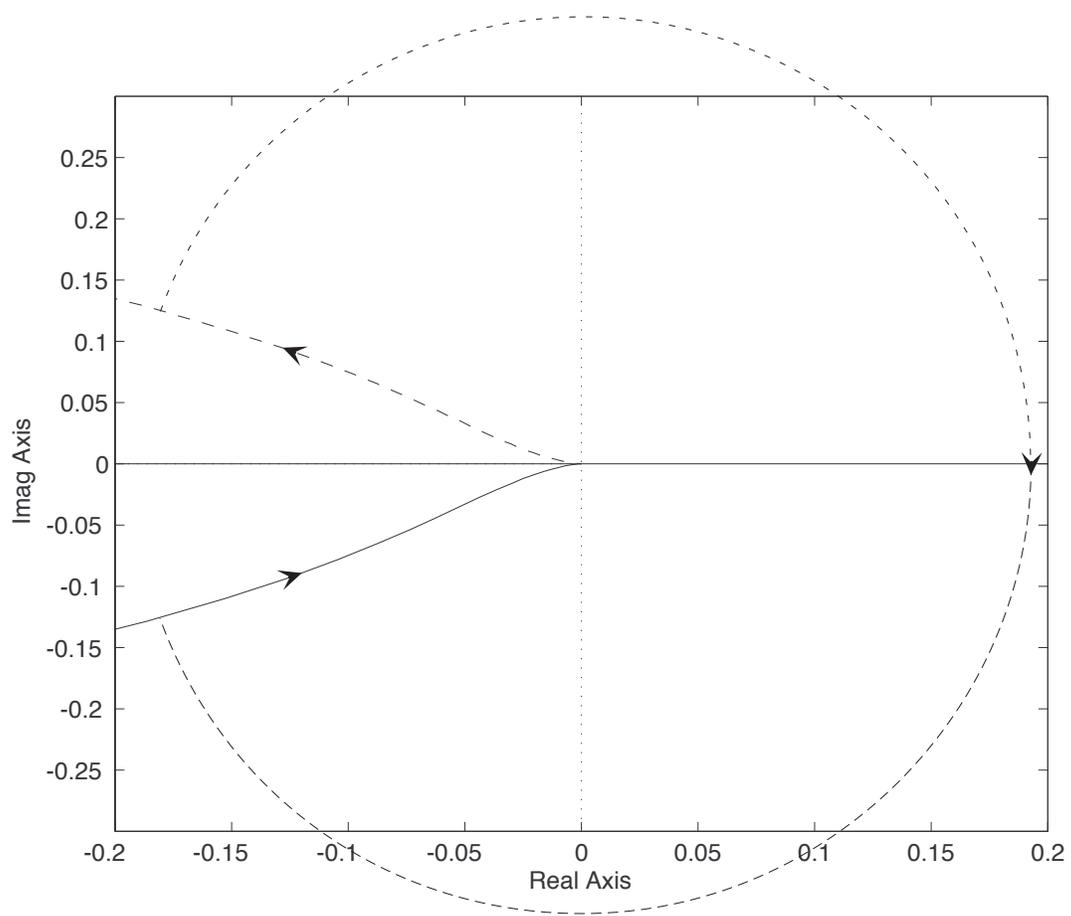


Figure 1.12:

I risultati ottenuti sono confermati dal criterio di Routh-Hurwitz. Infatti, la tabella di Routh di  $s^3 + 4s^2 + Ks + K$  è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K \\ 2 & 4 & K \\ 1 & \frac{3K}{4} & \\ 0 & K & \end{array}$$

Attraverso questa tabella possiamo concludere che, se  $K < 0$ , allora abbiamo 1 polo instabile in catena chiusa, se  $K > 0$ , allora abbiamo 0 poli instabili in catena chiusa.

**Esempio 1.10** Supponiamo che  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = \frac{(1+s)^2}{s^2(s-2)}.$$

Si osservi che

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega + 1)^2}{-\omega^2(j\omega - 2)} = \frac{(j\omega + 1)^2(j\omega + 2)}{-\omega^2(-\omega^2 - 2)} = \frac{2 - 4\omega^2 + j(5\omega - \omega^3)}{\omega^2(4 + \omega^2)}$$

da cui si deduce che

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = \frac{2 - 4\omega^2}{\omega^2(4 + \omega^2)} \quad \operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{5 - \omega^2}{\omega(4 + \omega^2)}$$

Per il tracciamento del diagramma di Nyquist è utile evidenziare i seguenti punti del diagramma

$\omega$	$\operatorname{Re}[G(j\omega)]$	$\operatorname{Im}[G(j\omega)]$
0	$+\infty$	$+\infty$
$1/\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
$\sqrt{5}$	$-2/5$	0
$+\infty$	0	0

Come per l'esempio precedente non ci sono asintoti, ma i rami del diagramma di Nyquist vanno all' $\infty$  come una parabola.

Per  $\omega \rightarrow +\infty$  si ha

$$G(j\omega) \simeq -j\frac{1}{\omega},$$

e quindi per  $\omega \rightarrow +\infty$ , il diagramma di Nyquist va a zero lungo il semiasse immaginario negativo. Ne risulta il diagramma di Nyquist illustrato nella figura 1.13. Il diagramma di Nyquist in questo caso deve essere chiuso con una intera circonferenza percorsa in senso orario.

Per applicare il criterio di Nyquist dobbiamo controllarne i giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ . Si noti che in questo caso  $P = 1$ .

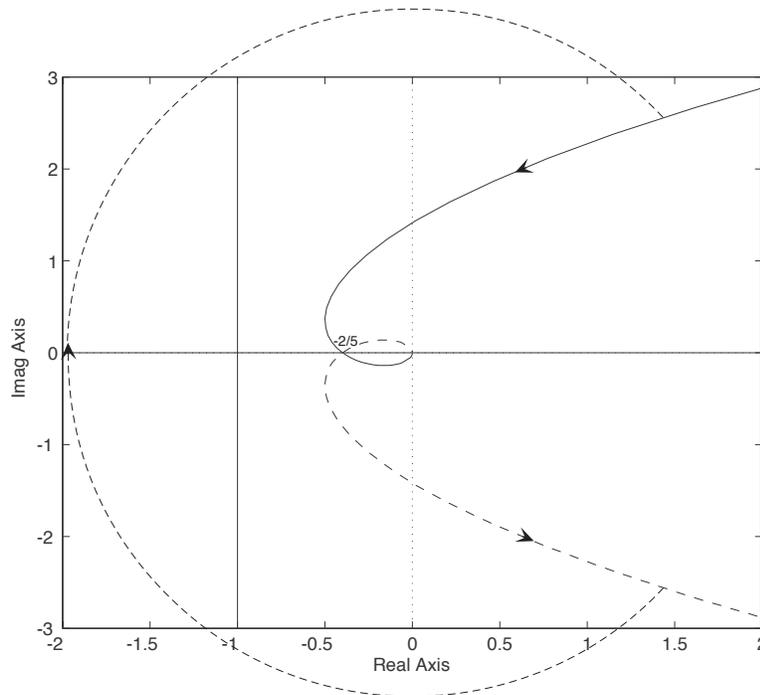


Figure 1.13:

Se  $-1/K < -2/5$  (cioè  $0 < K < 5/2$ ), il diagramma fa un giro in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -1$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 2$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-2/5 < -1/K < 0$  (cioè  $K > 5/2$ ), il diagramma fa un giro in senso antiorario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 1$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $-1/K > 0$  (cioè  $K < 0$ ), il diagramma non fa un giri attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 1$  poli instabili in catena chiusa.

I risultati ottenuti sono confermati dal criterio di Routh-Hurwitz. Infatti, la tabella di Routh di  $s^3 + (K - 2)s^2 + 2Ks + K$  è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2K \\ 2 & K - 2 & K \\ 1 & \frac{K(2K+5)}{K-2} & \\ 0 & K & \end{array}$$

Attraverso questa tabella possiamo concludere che, se  $K < 0$ , allora abbiamo 1 polo instabile in catena chiusa, se  $0 < K < 5/2$ , allora abbiamo 2 poli instabili in catena chiusa, se  $K > 5/2$ , allora abbiamo 0 poli instabili in catena chiusa.

**Esempio 1.11** Supponiamo che  $C(s) = K$ ,  $H(s) = 1$  e

$$G(s) = K \frac{s + 10}{s^2 + 1}.$$

Si osservi che

$$G(j\omega) = \frac{10 + j\omega}{-\omega^2 + 1}$$

da cui si deduce che

$$\operatorname{Re} G(j\omega) = \frac{10}{1 - \omega^2} \quad \operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{\omega}{1 - \omega^2}$$

Si osservi che per  $0 < \omega < 1$  si ha che  $\operatorname{Re} G(j\omega) > 0$  e  $\operatorname{Im} G(j\omega) > 0$ , mentre per  $\omega > 1$  si ha che  $\operatorname{Re} G(j\omega) < 0$  e  $\operatorname{Im} G(j\omega) < 0$ . Per  $\omega = 0$  si ha  $\operatorname{Re} G(j\omega) = 10$  e  $\operatorname{Im} G(j\omega) = 0$ . Per  $\omega \rightarrow 1$ , entrambe  $\operatorname{Re} G(j\omega)$  e  $\operatorname{Im} G(j\omega)$  tendono all'infinito. Per studiare come ci tendono, si osservi che

$$\frac{\operatorname{Re} G(j\omega)}{\operatorname{Im} G(j\omega)} \xrightarrow{\omega \rightarrow 1} 10$$

e che

$$\operatorname{Re} G(j\omega) - 10 \operatorname{Im} G(j\omega) = \frac{10 - 10\omega}{1 - \omega^2} = \frac{10}{1 + \omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 1} 5.$$

Possiamo concludere che per  $\omega \rightarrow 1$  esistono due rami che vanno all' $\infty$  lungo un asintoto obliquo di pendenza 10 e passante per il punto 5. Tali due rami si chiudono all' $\infty$  in senso orario con un angolo di  $\pi$ . Analogamente si ha che per  $\omega \rightarrow -1$  esistono due rami che vanno all' $\infty$  lungo un asintoto obliquo di pendenza  $-10$  e passante sempre per il punto 5. Tali due rami si chiudono all' $\infty$  in senso orario con un angolo di  $\pi$ . Ne risulta il diagramma di Nyquist illustrato nella figura 1.14. In realtà non è difficile rimostrare che più in generale vale che

$$(\operatorname{Re} G(j\omega) - 5)^2 - 100 \operatorname{Im} G(j\omega)^2 = 25$$

da cui si deduce che il diagramma di Nyquist in questo esempio percorre esattamente un'iperbole centrata nel punto dell'asse reale con coordinate  $(5, 0)$ .

Per applicare il criterio di Nyquist dobbiamo controllarne i giri che il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  fa attorno al punto critico  $-1/K$ . Si noti che in questo caso  $P = 0$ .

Se  $-1/K < -0$  (cioè  $K > 0$ ), il diagramma non fa un giri attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = 0$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 0$  poli instabili in catena chiusa.

il diagramma fa un giro in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -1$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 2$  poli instabili in catena chiusa.

Se  $0 < -1/K < 10$  (cioè  $K < -1/10$ ), il diagramma fa un giro in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -1$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 1$  poli instabili in catena chiusa.

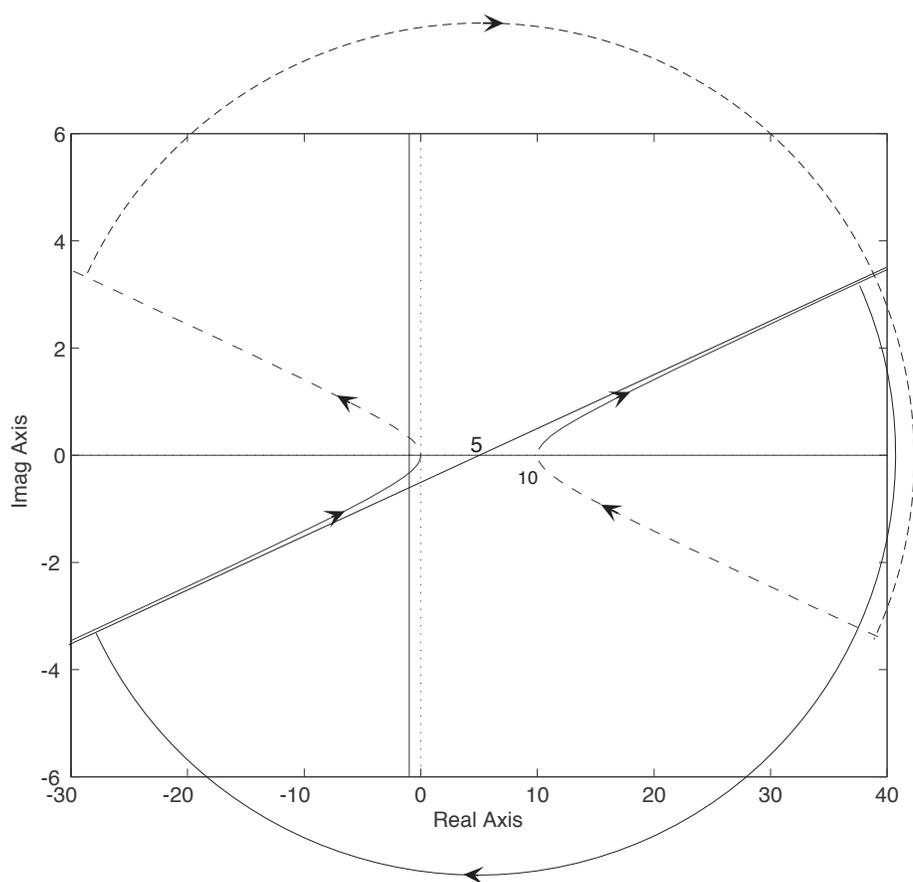


Figure 1.14:

Se  $-1/K > 10$  (cioè  $-1/10 < K < 0$ ), il diagramma fa 2 giri in senso orario attorno al punto  $-1/K$  e quindi abbiamo  $N = -2$  e quindi abbiamo  $Z = P - N = 2$  poli instabili in catena chiusa.

Attraverso la regola di Cartesio otteniamo lo stesso risultato. Infatti il polinomio di cui dobbiamo verificare la stabilità in questo caso è  $(s^2 + 1) + K(s + 10) = s^2 + Ks + 1 + 10K = 0$ . Possiamo quindi concludere che, se  $K < -1/10$ , allora abbiamo 1 polo instabile in catena chiusa, se  $-1/10 < K < 0$ , allora abbiamo 2 poli instabili in catena chiusa, se  $K > 0$ , allora abbiamo 0 poli instabili in catena chiusa.

## 1.2 Il criterio di Nyquist per sistemi con funzioni di trasferimento non razionali e per sistemi con ritardo

Come detto nell'introduzione al capitolo, il criterio di Nyquist si basa su di una caratterizzazione della stabilità che è di natura completamente diversa da quella utilizzata finora e che era basata sulla posizione dei poli della funzione di trasferimento. Daremo in questa sezione solo un cenno a queste tecniche che sono basate sul concetto di algebra di Banach (vedi E. Hille, R. S. Phillips, "Functional Analysis and Semigroups", American Mathematical Society, 1957).

Si consideri il seguente insieme di distribuzioni

$$A = \left\{ w(t) + \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta(t - T_i) : \int_0^{\infty} |w(t)| dt < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} |w_i| < \infty \right\}$$

Possiamo considerare  $A$  come l'insieme di tutte le possibili risposte impulsive di sistemi ingresso uscita BIBO stabili. Si noti che questo insieme è chiuso rispetto alla somma e alla convoluzione, cioè se  $\phi_1, \phi_2 \in A$  allora  $\phi_1 + \phi_2 \in A$  e  $\phi_1 * \phi_2 \in A$ . Inoltre ad ogni elemento  $\phi = w(t) + \sum_{i=1}^{\infty} w_i \delta(t - T_i) \in A$  possiamo associare una norma

$$\|\phi\| := \int_0^{\infty} |w(t)| dt + \sum_{i=1}^{\infty} |w_i|$$

che è essenzialmente la norma 1 di  $\phi$ . Ogni distribuzione in  $\phi \in A$  ammette Laplace trasformata che denominiamo  $\Phi(s) := \mathcal{L}[\phi](s)$ . Si noti che se  $\phi \in A$ , allora

$$|\Phi(s)| \leq \|\phi\| \quad \text{per tutti } s \in \mathbb{C} \text{ tale che } \operatorname{Re} s \geq 0$$

**Teorema 1.12** Sia  $\phi \in A$ . Allora esiste  $\psi \in A$  tale che  $\phi * \psi = \delta$  se e solo se

$$\inf\{|\Phi(s)| : s \in \mathbb{C} \text{ tale che } \operatorname{Re} s \geq 0\} > 0$$

Intuitivamente chiedere che il precedente estremo inferiore sia  $> 0$  significa richiedere che  $\Phi(s)$  non abbia zeri instabili che diventerebbero poli instabili di  $1/\Phi(s)$  che dovrebbe essere la trasformata di Laplace di  $\psi$ . Il teorema precedente ha una dimostrazione molto complessa che viene qui omessa (vedi pagine 141-150 del libro E. Hille, R. S. Phillips, "Functional Analysis and Semigroups", American Mathematical Society, 1957).

Vediamo ora la relazione tra il teorema precedente e il criterio di Nyquist. Si consideri il sistema in figure 1.1 e supponiamo che i tre sistemi con funzione di trasferimento  $C(s), G(s), H(s)$  siano sostituiti con sistemi descritti da risposte impulsive  $c, g, h \in A$  quindi BIBO stabili. Sia  $w := c * g * h \in A$ . Il teorema precedente assicura che, se  $W(s)$  è la trasformata di Laplace di  $w$  e se

$$\inf\{|1 + W(s)| : s \in \mathbb{C} \text{ tale che } \operatorname{Re} s \geq 0\} > 0 \quad (1.3)$$

allora esiste  $\psi \in A$  tale che  $\psi * (1 + w) = \delta$ . Questo fatto implica che, siccome

$$e(t) = r(t) - w * e(t)$$

e quindi

$$(\delta + w) * e(t) = r(t)$$

allora, convolvendo ambo i membri con  $\psi$  si ottiene

$$e(t) = \psi * r(t)$$

e inoltre

$$y(t) = g * c * e(t) = g * c * \psi * r(t)$$

Possiamo concludere che, siccome  $g * c * \psi \in A$ , il sistema è BIBO stabile.

Quindi la condizione (1.3) assicura la stabilità per sistemi in catena chiusa. Resta da capire la relazione tra il criterio di Nyquist e la condizione (1.3). Si osservi che

$$\mathcal{C}_w := \{W(s) : s \in \mathbb{C} \text{ tale che } \operatorname{Re} s \geq 0\} \subset \mathbb{C}$$

è una regione limitata di numeri complessi che ha come frontiera il diagramma di Nyquist di  $W(s)$ . La condizione (1.3) indica che  $-1 \notin \mathcal{C}_w$  e questo fatto è equivalente al fatto che il diagramma di Nyquist non circonda il punto  $-1$ . Notando che  $W(s)$  è la funzione di trasferimento di un sistema BIBO stabile, si può notare che si tratta del criterio di Nyquist nel caso in cui  $P = 0$ .

Si osservi che in realtà la condizione (1.3) è equivalente più precisamente al fatto che il punto critico  $-1$  non appartiene alla chiusura di  $\mathcal{C}_w$ . Il che vuol dire che per avere stabilità deve essere escluso anche l'eventualità che  $-1$  sia nella chiusura del diagramma di Nyquist. Un caso in cui questo avviene è illustrato in un esempio proposto nel seguito.

Un conseguenza notevole dei fatti appena illustrati è che il criterio di Nyquist può essere applicato ai sistemi con ritardo e in particolare ai sistemi in retroazione come

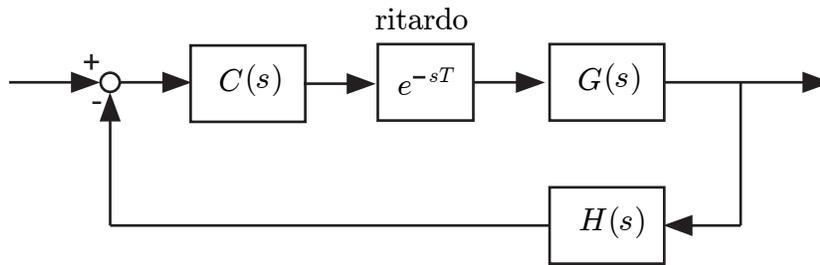


Figure 1.15:

quelli mostrati in figura 1.15 in cui  $W(s) = C(s)G(s)H(s)$  è una funzione di trasferimento razionale stabile.

In questo caso il problema è tracciare il diagramma di Nyquist di  $e^{-sT}W(s)$  e di determinare se questo aggira il punto  $-1$ . L'unico aspetto tecnico rilevante è che, come sottolineato sopra, il diagramma deve avere distanza finita positiva dal punto  $-1$ .

**Esempio 1.13** Si consideri lo schema in figura 1.15 con

$$W(s) = G(s)C(s)H(s) = \frac{K}{s+1}$$

I diagrammi di Nyquist di  $\frac{1}{s+1}$  e di  $\frac{e^{-s}}{s+1}$  sono mostrati in figura 1.16. Per quanto mostrato in precedenza, il sistema in catena chiusa è stabile se e solo se il diagramma di Nyquist di  $\frac{e^{-s}}{s+1}$  non circonda  $-1/K$ .

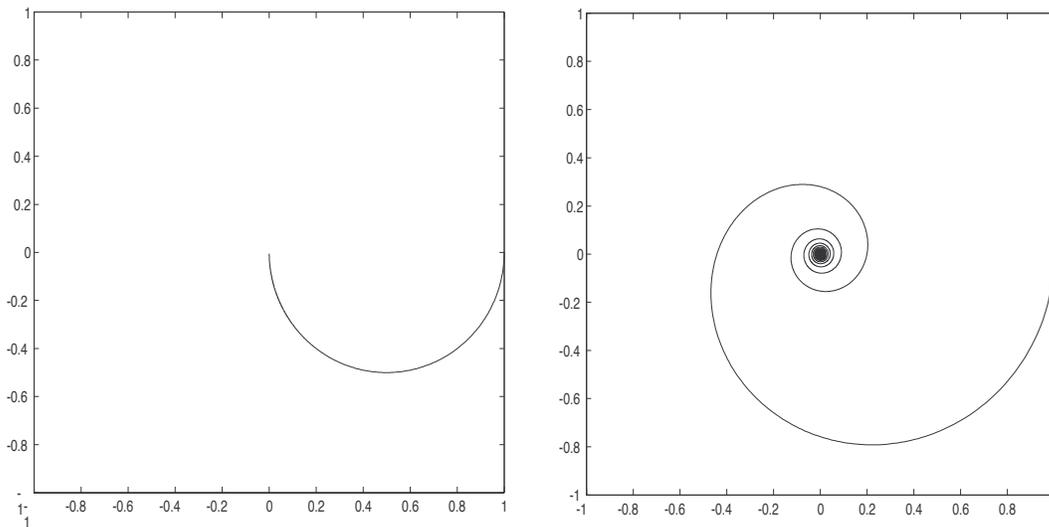


Figure 1.16:

**Esempio 1.14** Si consideri lo schema in figura 1.15 con

$$W(s) = G(s)C(s)H(s) = K \frac{s}{s+1}$$

e  $H(s) = 1$ . I diagrammi di Nyquist di  $\frac{s}{s+1}$  e di  $\frac{se^{-s}}{s+1}$  sono mostrati in figura 1.17. Poiché il diagramma di Nyquist è in questo caso una spirale che tende asintoticamente al cerchio unitario, allora, per quanto mostrato in precedenza, il sistema in catena chiusa è stabile se e solo se  $-1/K < -1$ . Nel caso  $-1/K = -1$  (cioè  $K = 1$ ) il diagramma di Nyquist di  $\frac{e^{-s}}{s+1}$  non circonda  $-1/K$  pur tuttavia appartenendo alla sua chiusura e quindi il sistema è instabile. Si noti che questo tipo di patologie si possono verificare solo se  $W(s)$  non è strettamente propria.

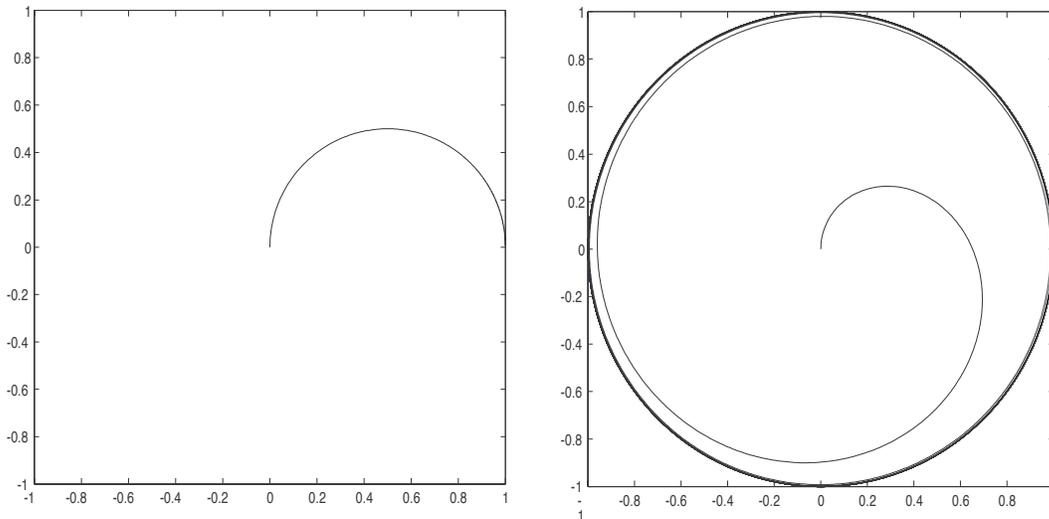


Figure 1.17:

Con qualche passaggio tecnico è possibile dimostrare che il criterio di Nyquist per sistemi con ritardo è applicabile anche nei casi in cui  $W(s)$  ha poli nell'origine.

**Esempio 1.15** Si consideri infine lo schema in figura 1.15 con

$$W(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

e  $H(s) = 1$ .

I diagrammi di Nyquist di  $\frac{K}{s(s+1)}$  e di  $\frac{Ke^{-s}}{s(s+1)}$  sono mostrati in figura 1.18. Per quanto mostrato in precedenza, il sistema in catena chiusa è stabile se e solo se il diagramma di Nyquist di  $\frac{Ke^{-s}}{s(s+1)}$  non circonda  $-1/K$ .

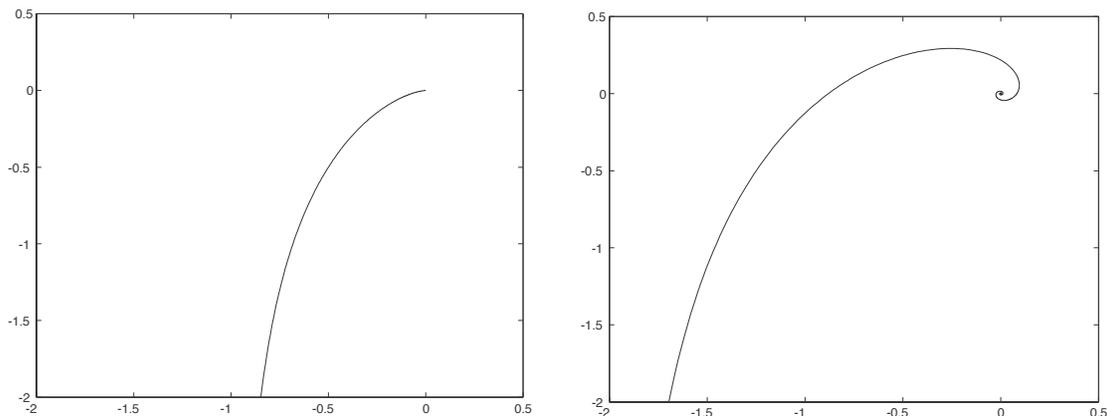


Figure 1.18:

### 1.3 Margini di stabilità

In molti casi, oltre a riconoscere se un sistema ad anello chiuso è stabile, è importante valutare anche quanto esso sia prossimo all'instabilità cioè avere un'idea del tipo e dell'entità delle perturbazioni che possono essere ammesse pur conservando la stabilità. Questa proprietà, detta la **robustezza** della stabilità del sistema, è importante in quando i modelli da cui partiamo sono sempre approssimazioni del sistema vero e quindi avere una stabilità non robusta porta ad avere rischi elevati che il sistema vero non sia stabile. Il diagramma di Nyquist rende possibile determinare il livello di robustezza del sistema in quanto la distanza del diagramma dal punto critico  $-1$  dà una buona stima della robustezza del sistema. Come chiarito dall'esempio 1.19, mentre il diagramma di Nyquist permette di determinare il livello di robustezza del sistema retroazionato, la distanza dei poli dominanti dall'asse immaginario non dà una misura di robustezza.

Consideriamo il sistema in retroazione illustrato in figura 1.1 e sia  $W(s) := C(s)G(s)H(s)$ . Supponiamo che il sistema retroazionato sia stabile. Il **margin di stabilità**  $m$  è definito come la distanza del diagramma di Nyquist dal punto  $-1$  (vedi figura 1.19), cioè

$$m := \min_{\omega \in \mathbb{R}} |1 + W(j\omega)|$$

E' chiaro che il margine di stabilità così definito dia un'idea della perturbazione che può essere ammessa su  $W(s)$  sotto la condizione che la stabilità del sistema in catena chiusa sia mantenuta. Si noti anche che se  $S(s)$  è la funzione sensibilità introdotta nel capitolo ??, allora di ha che

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} |S(j\omega)| = \max_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{|1 + W(j\omega)|} = \frac{1}{\min_{\omega \in \mathbb{R}} |W(j\omega) + 1|} = \frac{1}{m}$$

Quindi rendere grande il margine stabilità  $m$  è equivalente a rendere piccola la funzione sensibilità  $S(s)$  che porta ad avere benefici sia in termini di sensibilità a

variazioni di certi parametri, sia in termini di reiezione a disturbi che entrano in certi punti della catena di retroazione.

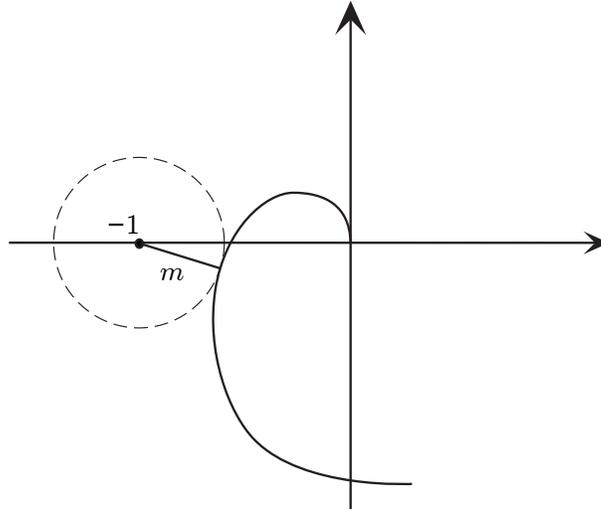


Figure 1.19:

Tuttavia il margine stabilità  $m$  ha il difetto di essere difficile da valutare e soprattutto difficile da manipolare attraverso la scelta del controllore  $C(s)$ . Per questo motivo si introducono altri due margini collegati a  $m$  che sono più semplici da gestire. Questi sono il **margine di guadagno** e il **margine di fase**. La loro validità è limitata a casi in cui  $W(s)$  ha alcune proprietà. Consideriamo la forma di Bode di  $W(s)$

$$W(s) = \frac{K_B}{s^l} \bar{W}(s)$$

dove  $K_B$  è il guadagno di Bode di  $W(s)$  e  $l$  è il tipo. Supponiamo che

1.  $W(s)$  abbia guadagno di Bode positivo.
2.  $W(s)$  sia stabile cioè abbia poli nel semipiano a parte reale negativa a parte eventuali poli sull'asse immaginario ( $P = 0$ ).
3.  $W(s)$  non abbia zeri e/o poli sull'asse immaginario a parte eventuali zeri o poli nell'origine.
4. Esiste unico  $\omega_A$  tale che  $|W(j\omega_A)| = 1$ .

Sotto queste ipotesi<sup>1</sup> definiamo il margine di fase di  $W(s)$ . Sotto le ipotesi precedenti la funzione

$$\begin{array}{l} ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C} \\ \omega \mapsto W(j\omega) \end{array}$$

<sup>1</sup>In realtà le condizioni 3. e 4. possono essere eliminate. Ad esempio la condizione 3. può essere eliminata facendo riferimento al diagramma di Nyquist relativo a percorsi in cui i poli e zeri sull'asse immaginario sono evitati attraverso semicirconferenze di raggio piccolo.

è continua e quindi la fase  $\angle W(j\omega)$  è univocamente determinata una volta che fisso un valore di tale funzione. Fissiamo allora questa funzione ponendo<sup>2</sup>

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle W(j\omega) = -l \frac{\pi}{2}$$

Sotto queste ipotesi risulta ben definito il numero<sup>3</sup>

$$m_\phi := \pi + \angle W(j\omega_A)$$

che è detto **marginale di fase**.

Inoltre, se vale la seguente condizione

$$5. \text{ Esiste unico } \omega_B \text{ tale che } \angle W(j\omega_B) = -\pi.$$

allora si può definire il **marginale di ampiezza** o **marginale di guadagno** come

$$m_a := 20 \log_{10} \frac{1}{|W(j\omega_B)|} = -|W(j\omega_B)|_{\text{dB}}$$

dove  $|a|_{\text{dB}} := 20 \log_{10} |a|$  è la valutazione in decibel di  $|a|$ .

**Teorema 1.16** Sotto le ipotesi precedenti abbiamo che

$$\text{Il sistema in catena chiusa è stabile} \iff m_\phi > 0$$

**Teorema 1.17** Sotto le ipotesi precedenti abbiamo che

$$\text{Il sistema in catena chiusa è stabile} \iff m_a > 0$$

Si può dare la seguente interpretazione grafica dei precedenti risultati. Supponiamo di avere un sistema in retroazione nel quale  $W(s)$  abbia diagramma di Nyquist simile a quello mostrato in figura (1.20).

Possono essere individuate due pulsazioni:

$\omega_B =$  pulsazione di attraversamento semiasse reale;

<sup>2</sup>Osserva che questa condizione è giustificata dal fatto che (vedi forma di Bode)

$$\angle W(j\omega) = \angle K_B - \angle(j\omega)^l + \angle \bar{W}(j\omega) = \angle K_B - l\angle j\omega + \angle \bar{W}(j\omega)$$

e quindi, siccome  $K_B > 0$  e  $\bar{W}(0) = 1$ , per  $\omega = 0^+$  si ha che

$$\angle W(j\omega) = -l \frac{\pi}{2}$$

a meno di multipli di  $2\pi$ .

<sup>3</sup>Le definizioni della funzione  $\angle W(j\omega)$  e di marginale di fase saranno ulteriormente chiarite nel capitolo dedicato al diagramma di Bode.

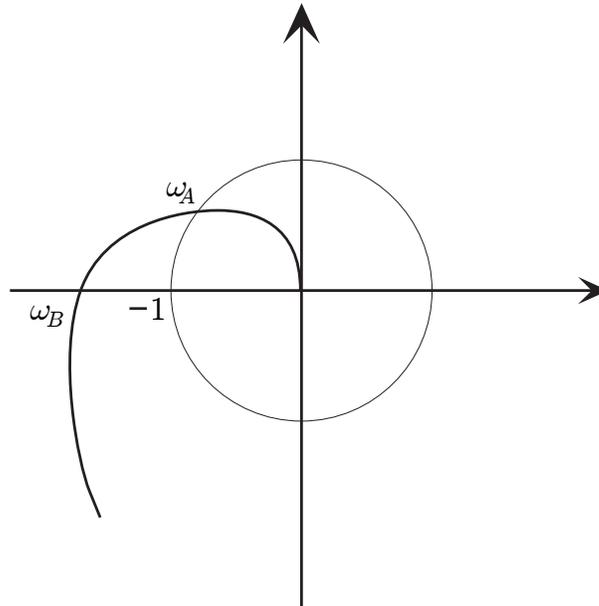


Figure 1.20:

$\omega_A$  = pulsazione di attraversamento della circonferenza unitaria.

Se  $W(s)$  non ha poli instabili, allora attraverso il criterio di Nyquist si riesce a dedurre la stabilità in catena chiusa (vedi figura 1.21) attraverso i due margini di stabilità introdotti. Si noti che per  $W(s)$  con diagramma di Nyquist semplice, avere margine di fase e margine di ampiezza grandi assicura che il margine di stabilità  $m$  sia grande.

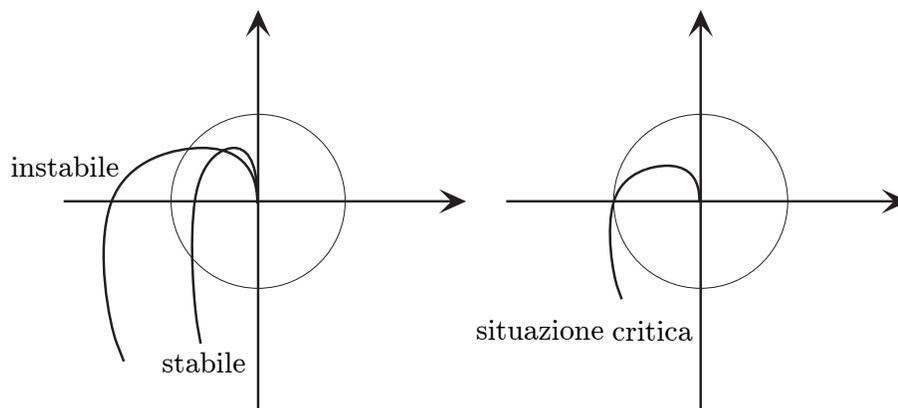


Figure 1.21:

**Esempio 1.18** Si consideri la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\sqrt{2}}{s + 1}.$$

E' facile verificare che questa funzione di trasferimento soddisfa alle condizioni 1, 2, 3 e 4. Inoltre attraverso facili calcoli si ottiene che  $\omega_A = 1$ . La fase di  $W(j\omega)$  risulta essere in questo caso

$$\angle W(j\omega) = -\text{arctg}(\omega)$$

da cui segue che

$$m_\varphi = \pi + \angle W(j\omega_A) = \pi - \text{arctg}(1) = \frac{3}{4}\pi$$

che è un margine di fase positivo che assicura la stabilità del sistema retroazionato.

Si consideri ora la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\sqrt{2}}{s^4(s+1)}.$$

E' facile verificare che anche questa funzione di trasferimento soddisfa alle condizioni 1, 2, 3 e 4 e che  $\omega_A = 1$ . La fase di  $W(j\omega)$  risulta essere in questo caso

$$\angle W(j\omega) = -2\pi - \text{arctg}(\omega)$$

da cui segue che

$$m_\varphi = \pi + \angle W(j\omega_A) = -\pi - \text{arctg}(1) = -\frac{5}{4}\pi$$

che è un margine di fase negativo che assicura la instabilità del sistema retroazionato.

### 1.3.1 Interpretazione del margine di guadagno e di fase

Consideriamo un sistema a catena chiusa stabile e supponiamo che sia caratterizzato da un margine di guadagno  $m_a$ . Perturbiamo il sistema inserendo in catena diretta un guadagno  $K$  (vedi figura 1.22).

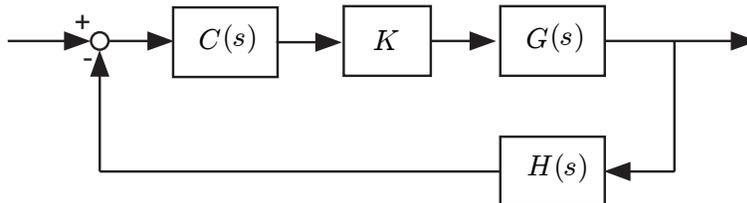


Figure 1.22:

Per quanto osservato sopra, il sistema rimane stabile per tutti i valori  $K$  positivi tali che

$$|K|_{\text{dB}} < m_a,$$

quindi il margine di guadagno dà un'idea di quanto si possa perturbare il guadagno del sistema mantenendo la stabilità.

È possibile ottenere una interpretazione simile del margine di fase nel quale, al posto di una perturbazione in termini del guadagno, si deve considerare una perturbazione in termini di presenza di un ritardo. Infatti consideriamo lo schema perturbato mostrato in figura (1.23).

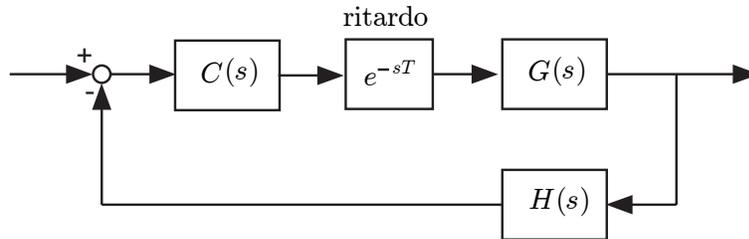


Figure 1.23:

Per analizzare come la stabilità del sistema, e in particolare il margine di fase, al variare dell'entità del ritardo  $T$ , si osservi che

$$\begin{aligned} |e^{j\omega T} H(j\omega)W(j\omega)| &= |H(j\omega)W(j\omega)| \\ \angle e^{j\omega T} H(j\omega)W(j\omega) &= \angle(H(j\omega)W(j\omega)) - \omega T. \end{aligned}$$

Quindi la pulsazione di attraversamento  $\omega_A$  non cambia al variare di  $K$  e il margine di fase diventa

$$m_\varphi' = m_\varphi - \omega_A T.$$

dove  $m_\varphi$  è il margine di fase relativo al sistema non perturbato  $W(s)$ .

Il sistema perturbato rimane stabile fintanto che il margine di fase resta positivo, cioè  $m_\varphi' > 0$ . Questo vale se e solo se il ritardo  $T$  soddisfa

$$0 \leq T < \frac{m_\varphi}{\omega_A}.$$

Possiamo dedurre quindi che il margine di fase dà un'idea di quanta perturbazione, in termini di ritardo, possiamo introdurre nel sistema pur mantenendo la stabilità.

**Esempio 1.19** Si consideri il sistema retroazionato illustrato in figura 1.24 dove

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Il diagramma di Nyquist di  $G(s)$  è mostrato in figura 1.25. Il margine di fase di  $KG(s)$  dipende da  $K$ . In effetti il margine di fase di  $KG(s)$  è determinabile ottenendo la pulsazione  $\omega_A$  in corrispondenza della quale il diagramma di Nyquist

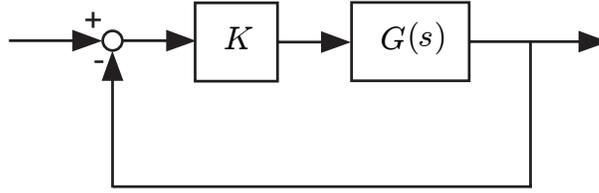


Figure 1.24:

di  $G(s)$  interseca il cerchio di raggio  $1/K$ . Ipotizziamo che  $K > 0$ . Dalla figura 1.25 si nota che il margine di fase decresce in  $K$  e che tende a zero per  $K \rightarrow \infty$ . Più precisamente si ha che

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1}{\omega^2(4 + \omega^2)}$$

e quindi se indichiamo con  $x_A := \omega_A^2$ , si ha che

$$\frac{1}{x_A(4 + x_A)} = \frac{1}{K^2}$$

da cui si desume che  $x_A^2 + 4x_A - K^2 = 0$  e quindi  $x_A = \sqrt{K^2 + 4} - 2$ . Quindi si vede che  $x_A$ , e quindi anche  $\omega_A$ , cresce in  $K$  e tende a infinito quando  $K \rightarrow \infty$ . Infine si noti che

$$m_\varphi = \pi + \angle KG(j\omega_A) = \pi + \angle G(j\omega_A) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_A}{2}\right)$$

da cui si può notare che  $m_\varphi$  decresce in  $\omega_A$  e quindi anche in  $K$  e che tende a zero per  $\omega_A \rightarrow \infty$  e quindi per  $K \rightarrow \infty$ .

Vogliamo ora trovare i valori di  $K$  per i quali il margine di fase  $m_\varphi$  è compreso tra  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{2}$ . Si osserva a tal fine che questi valori di margine di fase si ottengono per tutti i  $K$  tali che  $\omega_A \geq 2$  e quindi per  $x_A \geq 4$ . Dai conti precedenti si vede che  $x_A = 4$  se e solo se  $K = 4\sqrt{2}$  e quindi  $m_\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  se e solo se  $K \leq 4\sqrt{2}$ .

Utilizziamo ora questo esempio per verificare che, come detto prima, mentre il diagramma di Nyquist permette di determinare il livello di robustezza del sistema retroazionato, la distanza dei poli dominanti dall'asse immaginario non dà questa informazione. Si noti infatti che il sistema a catena chiusa ha poli che coincidono con le radici del polinomio  $s^2 + 2s + K$  che, per  $K \geq 4$ , sono

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K^2 - 4}$$

che sono i poli dominanti e che distano dall'asse immaginario esattamente 1, indipendentemente da  $K$  per tutti i  $K \geq 4$  (vedi figura ??). Da questo fatto potremmo concludere che per  $K \geq 4$  il sistema è stabile con una robustezza indipendente dal valore di  $K$ . In realtà, questo non è vero. In effetti per  $K$  molto elevato il sistema retroazionato perde robustezza in quanto una piccola perturbazione può destabilizzarlo.

Questo fatto, intuibile dal diagramma di Nyquist e dal fatto che il margine di fase tende a zero per  $K$  che tende all'infinito, sarà verificato formalmente ricorrendo a

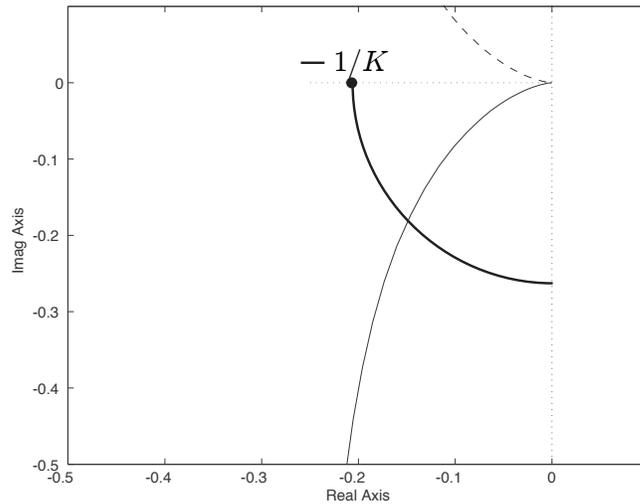


Figure 1.25:

due tipi di perturbazione. La prima consiste in un ritardo piccolo e quindi trascurato in prima analisi. In effetti se la vera funzione di trasferimento  $G(s)$  fosse

$$G(s) = \frac{e^{-sT}}{s(s+2)}$$

allora, per quanto visto prima, risulta che il sistema retroazionato vero sarebbe stabile se e solo se  $T < m_\varphi/\omega_A$  e, sapendo che per  $K \rightarrow \infty$  si ha che  $m_\varphi \rightarrow 0$  e  $\omega_A \rightarrow \infty$ , si desume che per  $K$  molto elevati il sistema retroazionato diventa instabile anche per ritardi  $T$  relativamente piccoli. Quindi la stabilità del sistema retroazionato è meno robusta per  $K$  molto elevati. Alla stessa conclusione si perviene se supponiamo che la vera  $G(s)$  sia

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(1+s\tau)}$$

dove la costante di tempo  $\tau$  è molto piccola e quindi  $-1/\tau$  è un polo ad altissima frequenza trascurato in prima approssimazione. Siccome il sistema retroazionato vero ha denominatore  $s(s+2)(1+s\tau) + K = \tau s^3 + (1+2\tau)s^2 + 2s + K$ , allora, ricorrendo alla tabella di Routh, si vede che, per  $K \geq 4$ , si ha stabilità se e solo se

$$0 < \tau < \frac{2}{K-4}$$

da cui si può concludere ancora che la stabilità del sistema retroazionato è meno robusta per  $K$  molto elevati poiché l'insieme dei  $\tau$  che danno la stabilità si riduce.