

# Chapter 1

## Effetti del controllo in retroazione sulle proprietà dei sistemi

### 1.1 Controllo in retroazione

Dopo aver presentato alcune tecniche per l'analisi dei sistemi, passiamo ad analizzare il problema del controllo. Consideriamo un sistema (vedi figura 1.1) con una sola “variabile controllata”  $y$  alla quale intendiamo far assumere un particolare andamento agendo su una variabile manipolabile  $u$ , che chiameremo “ingresso di controllo”. Il sistema può avere altri ingressi sui quali non siamo in grado di esercitare alcuna influenza e che vengono collettivamente catalogati come “disturbi”. La variabile di controllo viene prodotta da un dispositivo che chiameremo genericamente **regolatore** o **controllore**, il quale genera l'ingresso di controllo  $u$  a partire da alcune di queste informazioni:

1. L'andamento desiderato  $r(t)$  (riferimento) della variabile controllata;
2. Il valore dei disturbi  $d(t)$  che agiscono sul sistema;
3. L'andamento effettivo della variabile controllata  $y(t)$ .

Per quanto riguarda il riferimento  $r(t)$ , nella situazione più comune, l'obiettivo che si pone è quello dell'inseguimento, ossia della proporzionalità, istante per istante, fra  $y(t)$  e  $r(t)$

$$y(t) = \alpha r(t),$$

in cui  $\alpha$  è una costante caratteristica dell'apparato di controllo (costante di regolazione) che è, in generale, una costante dimensionale, dato che, quasi sempre,  $y(t)$  e  $r(t)$  sono grandezze fisiche di natura diversa. In pratica, l'inseguimento non può essere realizzato in modo esatto, per la presenza di disturbi e per l'inerzia del sistema

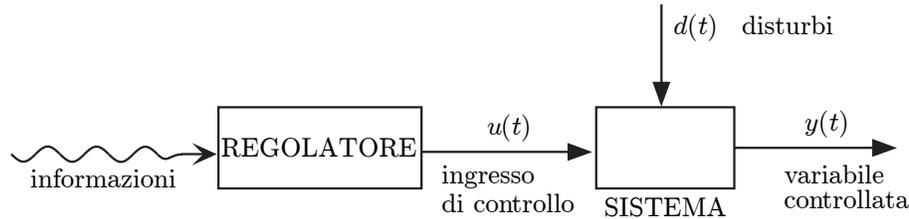


Figure 1.1:

controllato, e si avrà pertanto un **errore di inseguimento**

$$\begin{aligned} e_r(t) &= r(t) - \frac{y(t)}{\alpha} \quad \text{riferito a } r(t), \\ e_y(t) &= \alpha r(t) - y(t) \quad \text{riferito a } y(t). \end{aligned}$$

Se le informazioni utilizzate dal regolatore comprendono soltanto il riferimento ed, eventualmente, i disturbi che agiscono sul sistema, diremo che il controllo è **azione diretta** o **in catena aperta**. Se, invece, al regolatore viene fornita informazione relativa all'andamento effettivo della variabile controllata, il controllo si dice **in retroazione** o **in catena chiusa**.

Nel controllo a catena aperta, il valore della variabile manipolabile  $u(t)$  non dipende da quello dell'uscita controllata  $y(t)$ . Non vi sono quindi percorsi di segnale chiusi in cui, cioè,  $u(t)$  influenza  $y(t)$  e  $y(t)$  influenza  $u(t)$ , percorsi che sono detti “anelli di retroazione” e che sono invece tipici del controllo a catena chiusa.

Per il controllo a catena aperta, l'azione  $u(t)$  che il regolatore esercita sul sistema viene determinata sulla base di un modello matematico del sistema stesso, e tale azione non subisce alterazioni in corrispondenza all'eventuale insorgere di sensibili scostamenti fra l'andamento desiderato  $\alpha r(t)$  e quello effettivo  $y(t)$ . Il vantaggio del controllo a catena chiusa sta proprio nel fatto che esso tiene conto, istante per istante, dell'effettivo errore di inseguimento.

La configurazione di controllo a catena chiusa abbastanza generale è quella in cui un sistema lineare, con ingressi  $u(t)$  e  $d_1(t), d_2(t)$  e uscita  $y(t)$ , viene controllato da un regolatore, pure lineare, che genera in controllo  $u(t)$  a partire dai valori del riferimento  $r(t)$  e dell'uscita da controllare  $y(t)$ , come illustrato in figura 1.2. Questo schema evidenzia che i disturbi in generale possono agire anche sui dispositivi che compongono il sistema di regolazione.

Un caso particolare, che copre però molte situazioni concrete, è dato dallo schema in figura 1.3, in cui

- $r(t)$  è il segnale di riferimento (“set point” quando è costante);
- $y(t)$  è la variabile controllata;

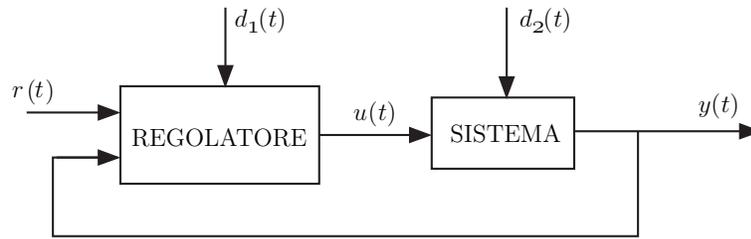


Figure 1.2:

- $e(t)$  è il segnale di errore;
- $d_1(t), d_2(t), d_3(t), d_4(t)$ , sono i disturbi che possono inserirsi in diversi punti dello schema a blocchi che descrive il sistema di controllo;
- $G(s)$  è la funzione di trasferimento del processo da controllare;
- $C(s)$  è la funzione di trasferimento che raccoglie il contributo di un sistema di **compensazione**, dell'amplificatore di segnale e di potenza del dispositivo di controllo e dell'attuatore.
- $H(s)$  è la funzione di trasferimento relativa al sensore o trasduttore di misura. Di solito si tratta di un sistema molto pronto rispetto agli altri e viene spesso approssimato semplicemente con una costante  $H \in \mathbb{R}$ .
- $F(s)$  è la funzione di trasferimento che descrive la presenza di un eventuale filtro sagomatore che in certi casi è utile per ottenere una migliore coerenza tra il segnale di riferimento e il segnale di uscita.

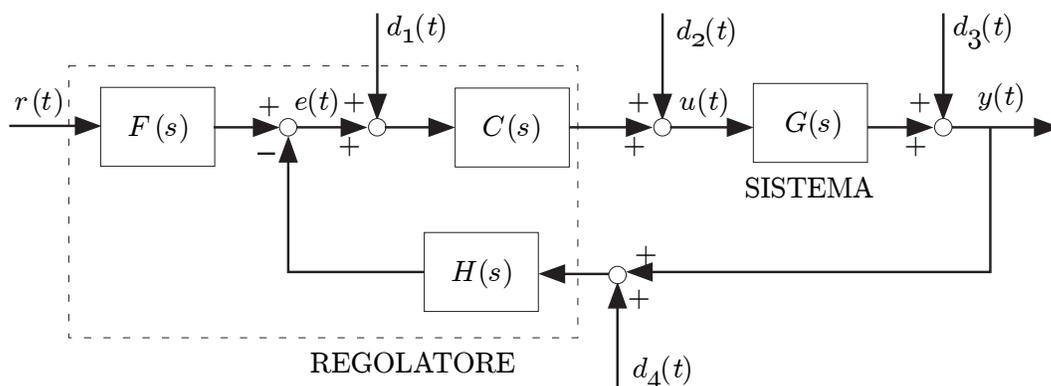


Figure 1.3:

Nota che, scegliendo  $F(s) = \alpha H(s)$ , dove  $\alpha$  è una costante, lo schema precedente (abbiamo tolto i disturbi per semplicità) diventa equivalente a quello descritto in figura 1.4 dove  $\bar{r}(t) = \alpha r(t)$  e  $\bar{e}(t) := \bar{r}(t) - y(t) = H(s)^{-1}e(t)$ . Quindi in questo

caso  $y(t) \simeq \alpha r(t)$  se e solo se  $\bar{e}(t) \simeq 0$ . Possiamo concludere che, nel progetto del controllore  $C(s)$  potremo sempre fare riferimento allo schema semplificato mostrato nella figura 1.5.

Nel caso in cui  $H(s) = H$  costante, allora si può evitare di utilizzare il filtro sagomatore. In tal caso infatti nello schema 1.3 si ha che  $y(t) \simeq r(t)/H$  se e solo se  $e(t) \simeq 0$ .

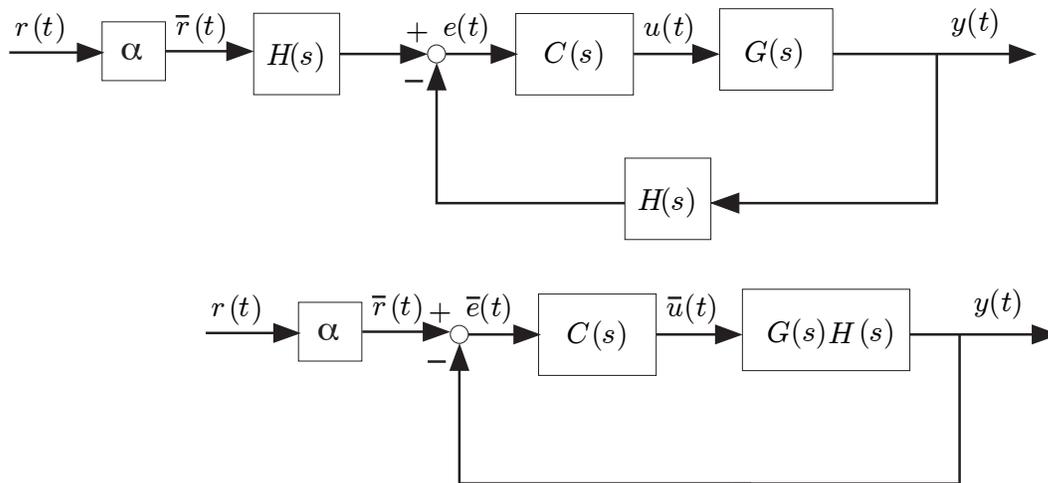


Figure 1.4:

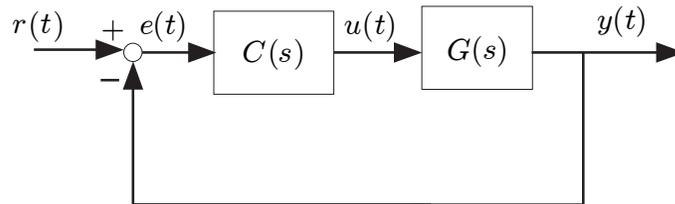


Figure 1.5:

### Esempio 1.1 Controllo di posizione di un motore in continua controllato in tensione

Consideriamo un motore in continua comandato all'armatura, cioè in cui si suppone che la corrente di eccitazione  $i_e(t)$  sia costante. In tal caso, come illustrato nella parte finale del capitolo ??, questo dispositivo può essere modellato come un sistema con due ingressi  $v(t)$  (tensione di armatura) e  $T(t)$  (coppia esterna applicata all'asse del motore) e uscita  $\omega$  (velocità angolare dell'asse del motore). Il tutto è descrivibile dallo schema a blocchi nella figura 1.6. Se siamo interessati a controllare la posizione angolare  $\theta$  invece che velocità angolare  $\omega$  dell'asse del motore, lo schema diventa quello illustrato nella figura 1.6 nel quale semplicemente si ottiene la nuova uscita

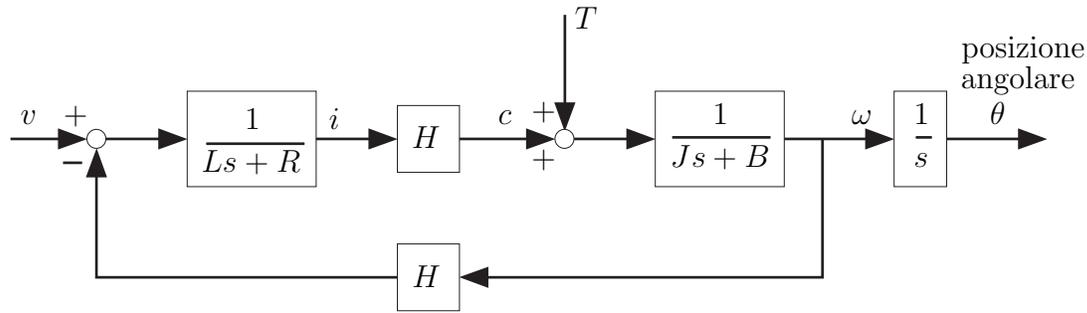


Figure 1.6:

$\theta$  da  $\omega$  attraverso un blocco integratore, dato che la posizione si può ottenere come integrale della velocità.

Attraverso l'algebra degli schemi a blocchi si possono ottenere le funzioni di trasferimento dagli ingressi  $v, T$  all'uscita  $\omega$

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{H}{(Ls + R)(Js + B) + H^2},$$

$$W_{T,\omega}(s) = \frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + B) + H^2}.$$

mentre le funzioni di trasferimento dagli ingressi  $v, T$  all'uscita  $\theta$  saranno

$$W_{v,\theta}(s) = W_{v,\omega}(s) \frac{1}{s}, \quad W_{T,\theta}(s) = W_{T,\omega}(s) \frac{1}{s}$$

Quindi avremo

$$\Theta(s) = W_{v,\theta}(s) V(s) + W_{T,\theta}(s) T(s).$$

dove  $V(s), T(s)$  e  $\Theta(s)$  sono le Laplace trasformate di  $v(t), T(t)$  e  $\theta(t)$ . Si noti che  $W_{v,\theta}(s), W_{T,\theta}(s)$  hanno tre poli di cui uno è nell'origine. Gli altri due poli sono sicuramente stabili (per la regola di Cartesio) e sono reali se e solo se  $(RJ + LB)^2 \geq 4LJ(RB + H^2)$  o equivalentemente se  $(RJ - LB)^2 \geq 4LJH^2$  (e questo è verificato nella maggior parte dei casi pratici in cui si ha quasi sempre che  $L$  è molto piccolo). Dei due poli reali, uno sarà dominante e l'altro sarà non dominante.

Per molti motori in continua si può approssimare le precedenti funzioni di trasferimento con funzioni di trasferimento del primo ordine attraverso l'approssimazione dei poli dominanti. Infatti i poli delle funzioni di trasferimento sono

$$\begin{aligned} p_{12} &= -\frac{LB + RJ}{2LJ} \pm \sqrt{\left(\frac{LB + RJ}{2LJ}\right)^2 - \frac{BR + H^2}{LJ}} \\ &= -\frac{B}{2J} - \frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2LJ} \sqrt{(RJ)^2 - 2LJ(RB + 2H^2) + B^2L^2} \end{aligned}$$

Mella maggior parte dei casi pratici in cui si ha quasi sempre che  $L$  è molto piccolo rispetto agli altri parametri e quindi si può fare la seguente approssimazione

$$\begin{aligned}\sqrt{(RJ)^2 - 2LJ(RB + 2H^2) + B^2L^2} &\simeq \sqrt{(RJ)^2 - 2LJ(RB + 2H^2)} \\ &\simeq RJ - \frac{1}{2RJ}2LJ(RB + 2H^2) \\ &= RJ - \frac{1}{R}L(RB + 2H^2)\end{aligned}$$

Sostituendo nelle espressioni di  $p_{12}$  si ottiene

$$p_1 = -\frac{B}{2J} - \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LJ}\sqrt{(RJ)^2 - 2LJ(RB + 2H^2) + B^2L^2} \simeq -\frac{BR + H^2}{RJ}$$

e

$$p_2 = -\frac{B}{2J} - \frac{R}{2L} - \frac{1}{2LJ}\sqrt{(RJ)^2 - 2LJ(RB + 2H^2) + B^2L^2} \simeq -\frac{R}{L} + \frac{H^2}{JR} \simeq -\frac{R}{L}$$

Il polo dominante è quindi  $p_1$  quindi l'approssimazione dei poli dominanti porta alle seguenti funzioni di trasferimento

$$\begin{aligned}W_{v,\omega}(s) &\simeq \frac{W_{v,\omega}(0)}{1 - s/p_1} = \frac{H}{JR s + BR + H^2}, \\ W_{T,\omega}(s) &\simeq \frac{W_{T,\omega}(0)}{1 - s/p_1} = \frac{R}{JR s + BR + H^2}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Si noti che un modo semplice di ottenere questa approssimazione è semplicemente ponendo  $L = 0$ .

Supponiamo di voler controllare la posizione angolare dell'asse del motore. A tal fine, si usa uno schema di controllo in catena chiusa del tipo mostrato in figura 1.7 nel quale l'angolo  $\theta$  viene tradotto in una tensione  $v_y = K_p\theta$  attraverso una resistenza variabile e poi la differenza  $v_r - v_y$  tra il riferimento di posizione tradotto in tensione  $v_r$  e  $v_y$  alimenta un amplificatore di potenza.

A questo corrisponde lo schema a blocchi mostrato in figura 1.8.

La funzione di trasferimento da  $v_r$  a  $\theta$  è

$$W_{v_r,\theta}(s) = \frac{K_a H}{s[(Ls + R)(Js + B) + H^2] + K_a K_p H}.$$

che ha tre poli e nessun zero. Sotto la condizione  $L$  piccolo si può applicare l'approssimazione dei poli dominanti

$$W_{v_r,\theta}(s) \simeq \frac{K_a H}{s[RJs + RB + H^2] + K_a K_p H}$$

che ha due poli e nessun zero. I calcoli per trovare la funzione di trasferimento  $W_{T,\theta}(s)$  sono simili. In questo sistema di controllo l'unico parametro che si può

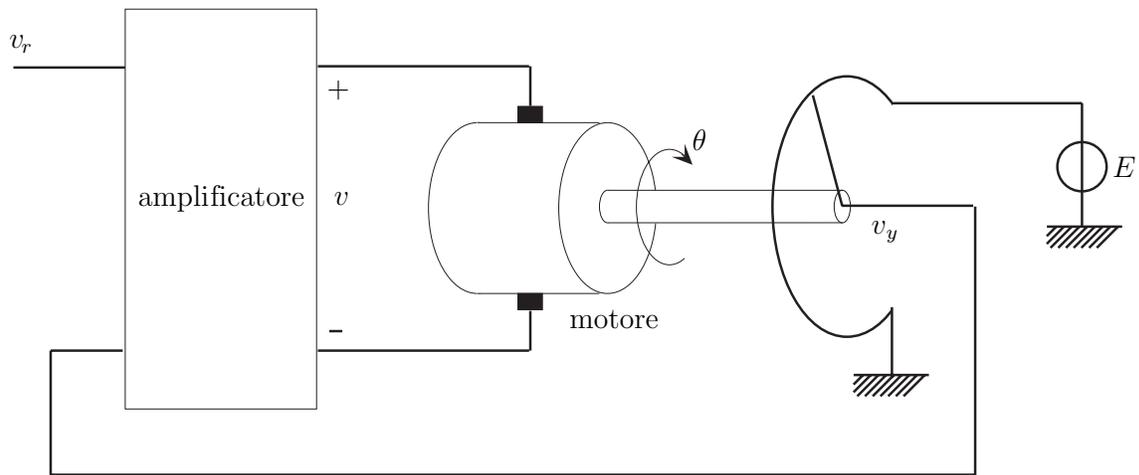


Figure 1.7:

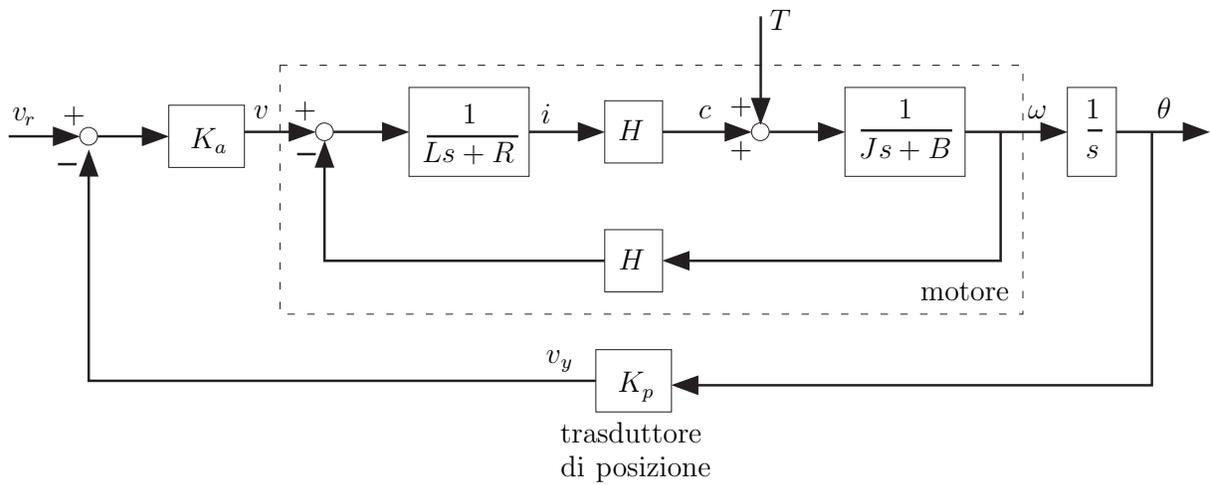


Figure 1.8:

scegliere è l'entità dell'amplificazione  $K_a$ . Al variare di tale parametro varieranno le caratteristiche del sistema di controllo di posizione del motore. Si noti che se  $K_a$  è molto elevato, l'approssimazione dei poli dominanti non è più applicabile. Questo fatto sarà chiarito nell'analisi di stabilità che vedremo in seguito e quando presenteremo il metodo controllo basato sul luogo delle radici.

### Esempio 1.2 Controllo di velocità di un motore in continua controllato in tensione

Consideriamo ancora un motore in continua per il quale però si voglia progettare un sistema di controllo che regoli la velocità di rotazione  $\omega$ . A tal fine, si usa uno schema di controllo in catena chiusa del tipo mostrato in figura 1.9 nel quale la velocità  $\omega$  viene tradotta in una tensione  $v_y = K_p \omega$  attraverso un dinamo (che è un piccolo motore in continua accoppiato al motore da controllare che fornisce una tensione proporzionale alla sua velocità angolare) e poi la differenza  $v_r - v_y$  tra il riferimento di velocità tradotto in tensione  $v_r$  e  $v_y$  alimenta un amplificatore di potenza.

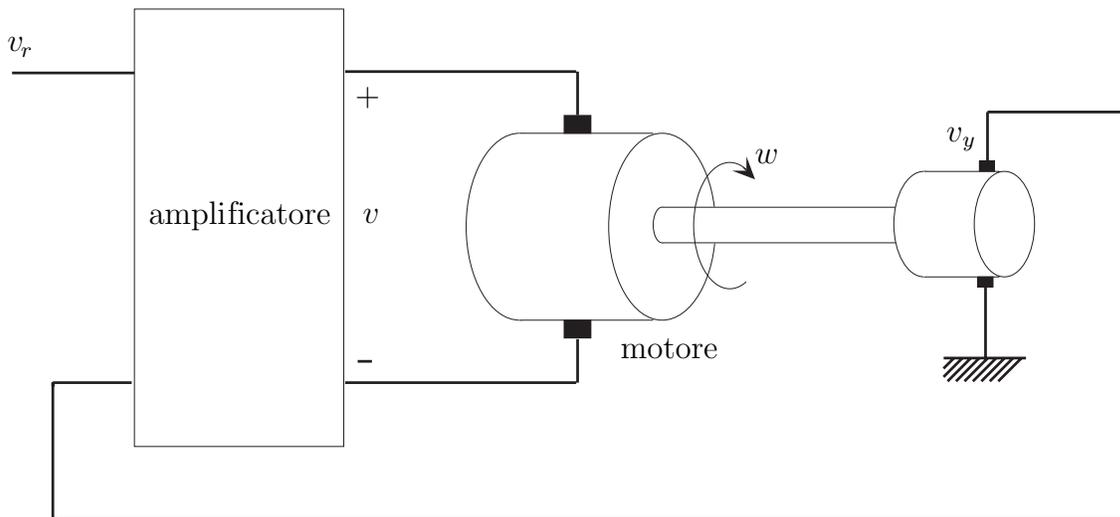


Figure 1.9:

A questo corrisponde lo schema a blocchi mostrato in figura 1.8.

La funzione di trasferimento da  $v_r$  a  $\omega$  è

$$W_{v_r, \omega}(s) = \frac{K_a H}{(Ls + R)(Js + B) + H^2 + K_a K_p H}$$

che ha due poli e nessun zero. Sotto la condizione  $L$  piccolo si può applicare l'approssimazione dei poli dominanti

$$W_{v_r, \omega}(s) \simeq \frac{K_a H}{RJs + RB + H^2 + K_a K_p H}$$

che ha un polo e nessun zero. I calcoli per determinare la funzione di trasferimento  $W_{T, \omega}(s)$  sono simili. In questo sistema di controllo l'unico parametro che si può

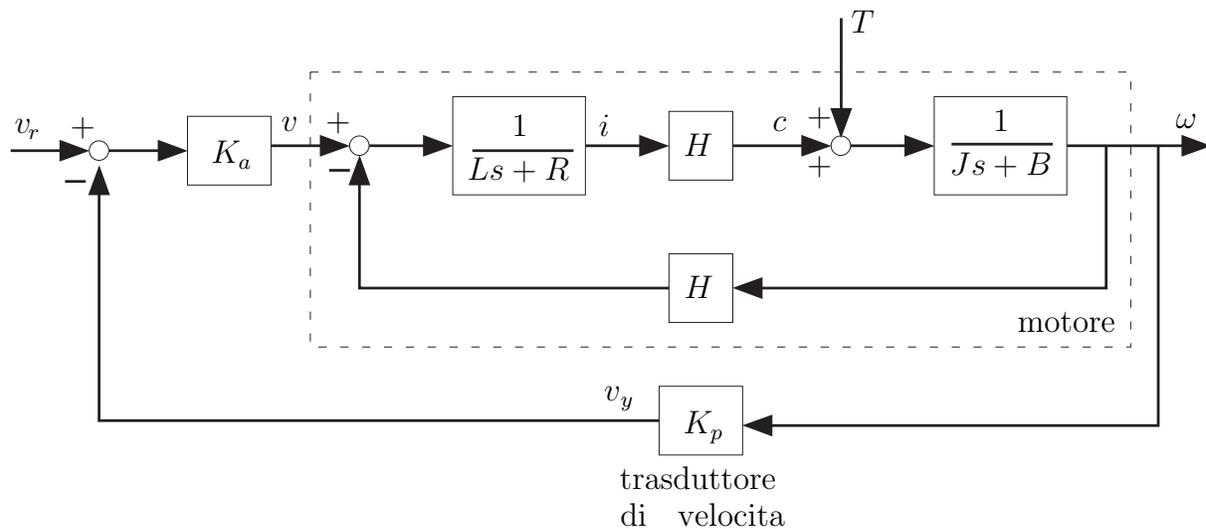


Figure 1.10:

scegliere è l'entità dell'amplificazione  $K_a$ . Al variare di tale parametro varieranno le caratteristiche del sistema di controllo di velocità del motore.

### Esempio 1.3 Controllo di posizione di un pendolo inverso attraverso un motore in continua controllato in tensione

Supponiamo ora di collegare il motore a un pendolo, come da un esempio precedentemente considerato (vedi figura 1.11). Abbiamo già calcolato il modello di tale sistema

$$l\theta^{(2)} - g \sin \theta - \frac{1}{ml} T = 0,$$

che, linearizzato attorno all'angolo  $\theta = 0$ , che corrisponde al pendolo verticale verso l'alto, porta al modello lineare

$$l\theta^{(2)} - g\theta = \frac{1}{ml} T.$$

Quindi, attraverso la trasformata di Laplace, si ottiene

$$T(s) = (ml^2 s^2 - mlg)\Theta(s).$$

Mettendo questa relazione assieme a quelle relative al motore e notando che alla coppia  $T$  applicata dal motore al pendolo corrisponde una coppia contraria applicata dal pendolo sul motore, si ottiene lo schema illustrato nella figura 1.12.

La funzione di trasferimento tra  $v$  e  $\theta$  è data da

$$W_{v,\theta}(s) = \frac{H}{(Ls + R)[(J + ml^2)s^2 + Bs - mlg] + H^2s}$$

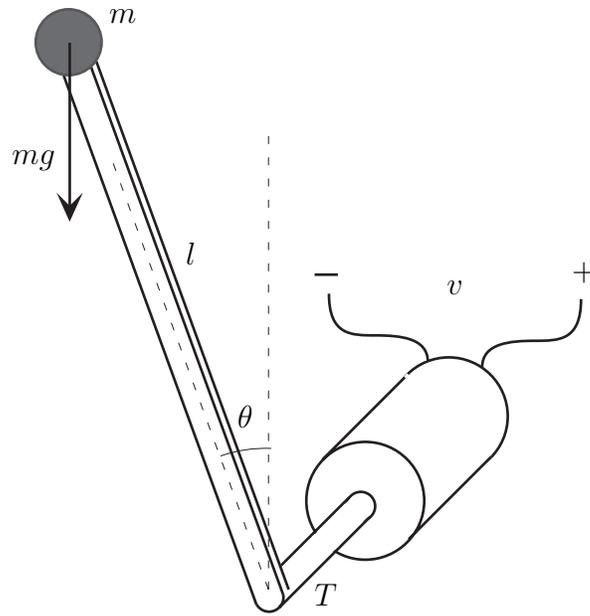


Figure 1.11:

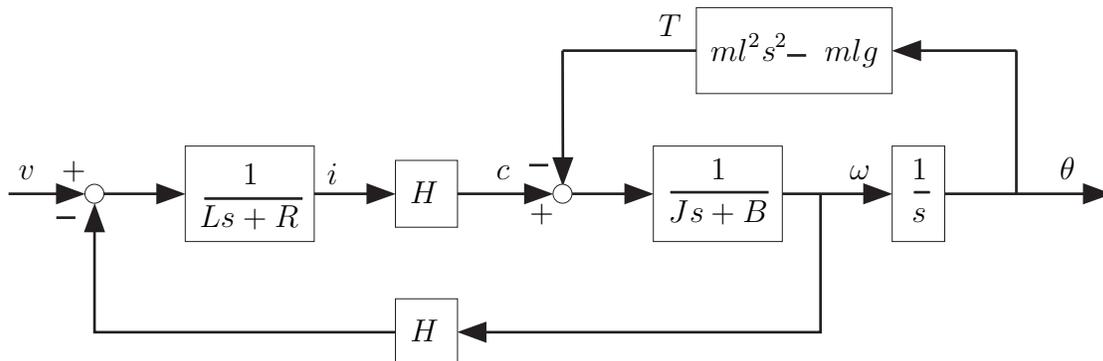


Figure 1.12:

Sotto la condizione  $L$  piccolo si può applicare l'approssimazione dei poli dominanti

$$W_{v,\theta}(s) \simeq \frac{H/R}{(J + ml^2)s^2 + (B + H^2/R)s - mlg}$$

che è un sistema del secondo ordine instabile.

Supponiamo di voler controllare la posizione angolare  $\theta$ . Si può usare lo schema in retroazione mostrato in figura 1.13.

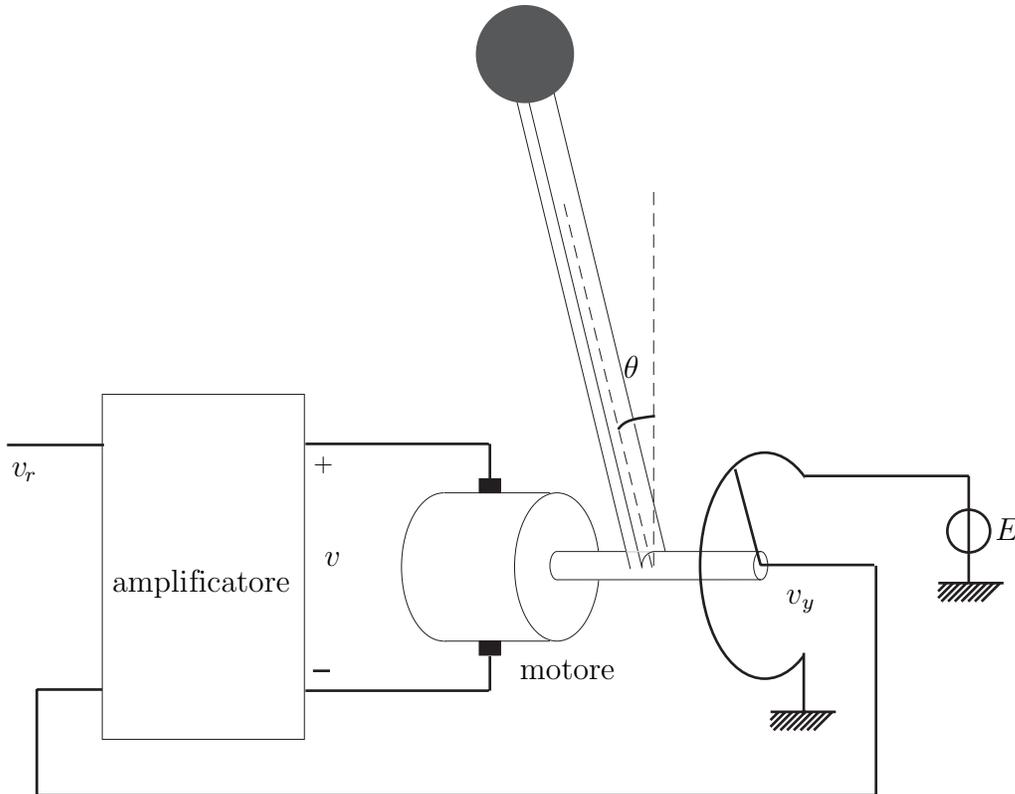


Figure 1.13:

La funzione di trasferimento a catena chiusa è

$$W_{v_r,\theta}(s) = \frac{K_a W(s)}{1 + K_a K_p W(s)} = \frac{K_a H}{(Ls + R)((J + ml^2)s^2 + Bs - mlg) + H^2 s + K_a K_p H}$$

La stabilità di questo sistema è analizzabile attraverso la tabella di Routh. Sempre sotto la condizione  $L$  piccolo si può applicare l'approssimazione dei poli dominanti

$$W_{v_r,\theta}(s) \simeq \frac{K_a H/R}{(J + ml^2)s^2 + \left(B + \frac{H^2}{R}\right)s + \left(-mlg + K_a K_p \frac{H}{R}\right)}$$

E' chiaro che per avere stabilità è sufficiente avere

$$K_a K_p > mlg \frac{R}{H}$$

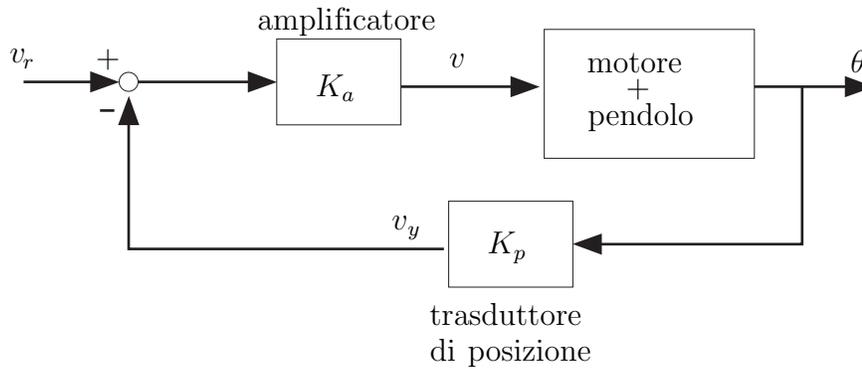


Figure 1.14:

## 1.2 Effetto della retroazione sulla stabilità

Una caratteristica fondamentale della retroazione (rispetto alle connessioni serie e parallelo) è che essa, in generale, può modificare le caratteristiche di stabilità del sistema e quindi permettere da una parte di stabilizzare sistemi instabili, ma dall'altra può portare anche a destabilizzare sistemi stabili. In altre parole, la retroazione porta alla modifica della posizione dei poli della funzione di trasferimento rispetto al sistema originario.

Molto spesso nel progetto del controllo è interessante capire come varia la stabilità di del sistema in catena chiusa al variare di uno specifico parametro. Più precisamente, consideriamo lo schema di controllo illustrato in figura 1.15. Supponiamo che  $C(s)$  (o  $G(s)$  o  $H(s)$ ) dipenda da un parametro  $K$ . Allora il denominatore della funzione di trasferimento a catena chiusa

$$W_{r,y}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}$$

risulta anch'esso influenzato da  $K$ . Cambiando  $K$ , anche gli zeri del denominatore di  $W_{r,y}(s)$  si sposteranno e potranno esserci valori di  $K$  per i quali alcuni di questi poli usciranno del semipiano di stabilità  $\text{Re } s < 0$ . Per determinare i valori di  $K$  che mantengono la stabilità del sistema, è conveniente utilizzare il criterio di Routh-Hurwitz.

**Esempio 1.4** Consideriamo lo schema per il controllo di posizione del motore in continua presentato in precedenza. Abbiamo dimostrato che la funzione di trasferimento tra la tensione di riferimento  $v_r$  e l'angolo  $\theta$  dell'asse del motore risulta

$$W_{v_r,\theta}(s) = \frac{K_a H}{LJ s^3 + (RJ + BL)s^2 + (H^2 + RB)s + K_a K_p H}$$

Per determinare la stabilità di  $W_{v_r,\theta}(s)$  al variare dell'entità dell'amplificazione  $K_a$ ,

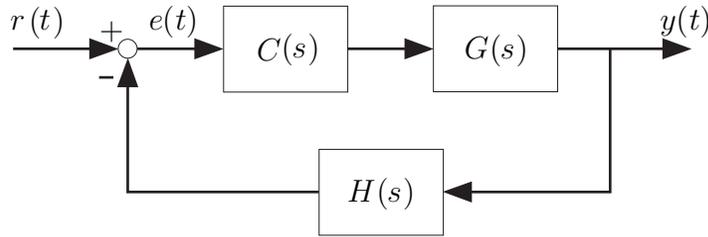


Figure 1.15:

è conveniente ricorrere al criterio di Routh-Hurwitz. La tabella di Routh è

3	$LJ$	$H^2 + RB$
2	$RJ + BL$	$K_a K_p H$
1	$\frac{(RJ + BL)(H^2 + RB) - K_a K_p H L J}{RJ + BL}$	
0	$K_a K_p H$	

Tenendo conto che  $J, B, R, L, H, K_p$  sono tutti numeri positivi, risulta che il sistema è stabile se e solo se

$$0 < K_a < \frac{(RJ + BL)(H^2 + RB)}{K_p H L J}.$$

Facendo riferimento invece al modello semplificato valido nel caso in cui  $L$  è piccolo si può applicare l'approssimazione dei poli dominanti ottenendo la funzione di trasferimento  $W_{v_r, \theta}(s)$  risulta invece

$$W_{v_r, \theta}(s) \simeq \frac{K_a H}{R J s^2 + (R B + H^2) s + K_a K_p H}$$

e quindi in questo caso la regola di Cartesio (il sistema è del secondo ordine) suggerisce che il sistema è stabile se e solo se  $K_p > 0$ . La incongruenza tra le conclusioni ottenute partendo dal modello approssimato e dal modello non approssimato dimostrano che il modello approssimato diventa inattendibile per valori elevati dell'amplificazione.

**Esempio 1.5** Si consideri il sistema illustrato nella figura 1.16. La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta

$$W(s) = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+2)}} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}.$$

Per la regola di Cartesio abbiamo stabilità se e solo se  $K > 0$ . Fissiamo ora  $K = 25$  e aggiungiamo un'altra retroazione come mostrato nello schema illustrato nella figura 1.17. La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta

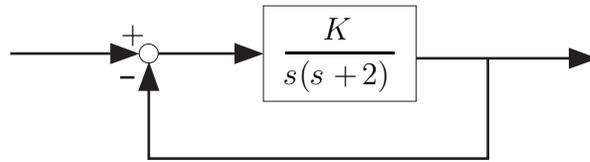


Figure 1.16:

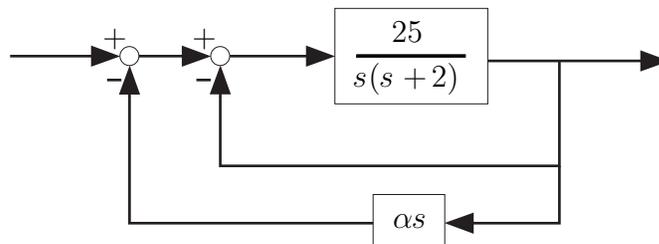


Figure 1.17:

$$W(s) = \frac{\frac{25}{s(s+2)}}{1 + (1 + \alpha s) \frac{25}{s(s+2)}} = \frac{25}{s^2 + 2s + 25\alpha s + 25} .$$

Facciamo variare ora il guadagno di velocità  $\alpha$ . In questo caso, abbiamo stabilità se e solo se  $2 + 25\alpha > 0 \iff \alpha > -\frac{2}{25}$ .

**Esempio 1.6** Consideriamo lo schema mostrato nella figura 1.18.

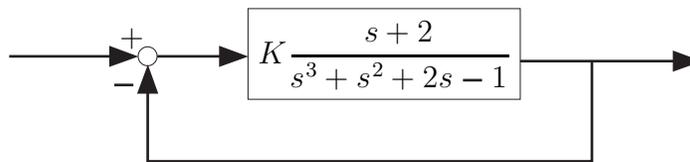


Figure 1.18:

La funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta

$$W(s) = \frac{K(s+2)}{s^3 + s^2 + (K+2)s + (2K-1)} .$$

La tabella di Routh del denominatore è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K+2 \\ 2 & 1 & 2K-1 \\ 1 & -K+3 & \\ 0 & 2K-1 & \end{array}$$

Abbiamo stabilità per  $\frac{1}{2} < K < 3$ .

### 1.3 Effetto della retroazione sulla sensibilità alle variazioni parametriche

Un'importante proprietà del controllo in retroazione è la riduzione della sensibilità alle variazioni dei parametri del sistema in **catena diretta**.

**Definizione 1.7** Sia  $\alpha$  un parametro da cui dipende  $W(s)$ . La **sensibilità di  $W(s)$  rispetto al parametro  $\alpha$**  è definita come

$$S_{\alpha}^W(s) := \frac{\alpha}{W(s)} \frac{\partial W(s)}{\partial \alpha}. \quad (1.2)$$

Si noti che

$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{\partial \ln W(s)}{\partial \ln \alpha}$$

dove il simbolo  $\ln$  indica il logaritmo naturale. Talvolta la sensibilità è definita attraverso la questa formula equivalente invece che attraverso la 1.2. Si noti inoltre che, applicando la definizione di derivata, si ottiene

$$S_{\alpha}^W(s) = \frac{\alpha}{W(s)} \frac{\partial W(s)}{\partial \alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta W(s)}{W(s)}}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}}.$$

Quindi, si può affermare che, se  $\Delta\alpha$  è piccolo, allora

$$\frac{\Delta W(s)}{W(s)} \simeq S_{\alpha}^W(s) \frac{\Delta\alpha}{\alpha},$$

per cui una variazione di  $\alpha$  provoca una variazione di  $W(s)$  e  $S_{\alpha}^W(s)$  indica l'amplificazione della variazione **relativa** di  $\alpha$  sulla la variazione **relativa** di  $W(s)$ . Se interpretiamo  $W(s)$  come la funzione di trasferimento del sistema non retroazionato e quindi a catena aperta, allora  $S_{\alpha}^W(s)$  sarà detta **sensibilità ad anello aperto** rispetto alle variazioni di  $\alpha$ .

Supponiamo di alimentare il sistema con un ingresso  $u(t)$  e che  $U(s)$  sia la sua trasformata di Laplace. L'uscita sarà  $Y(s) = W(s)U(s)$  e una variazione  $\Delta\alpha$  provocherà quindi una variazione  $\Delta Y(s)$  sulla  $Y(s)$  e avremo

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{\Delta W(s)U(s)}{W(s)U(s)} = \frac{\Delta W(s)}{W(s)} \simeq S_{\alpha}^W(s) \frac{\Delta\alpha}{\alpha},$$

quindi  $S_{\alpha}^W(s)$  dà anche la variazione relativa di  $Y(s)$  in corrispondenza di una certa variazione relativa di  $\alpha$ .

È importante notare che la sensibilità è una funzione nella variabile  $s$ , come lo sono le funzioni di trasferimento, e che quindi può essere vista come una funzione di  $j\omega$ . Più precisamente, fissata una pulsazione  $\omega$ , se  $S_\alpha^W(j\omega)$  è grande, significa che una certa variazione  $\Delta\alpha$  del parametro  $\alpha$  porterà una grande variazione della risposta del sistema al segnale di ingresso sinusoidale  $u(t) = \cos(\omega t + \varphi)$  in termini dell'amplificazione e dello sfasamento. Se invece  $S_\alpha^W(j\omega)$  è piccola, significa che, per tale frequenza, la risposta varierà poco al variare di  $\alpha$ . Più in generale, segnali di ingresso che hanno contenuto armonico "ricco" dove  $S_\alpha^W(j\omega)$  è piccola daranno luogo a uscite scarsamente influenzate da  $\alpha$ .

Scriviamo ora  $W(s)$  in forma polare  $W(s) = |W(s)|e^{j\angle W(s)}$  dove  $\angle$  indica la fase di un numero complesso. Si noti che

$$\begin{aligned} S_\alpha^W(s) &= \frac{\alpha}{W(s)} \frac{\partial W(s)}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{|W(s)|e^{j\angle W(s)}} \left[ e^{j\angle W(s)} \frac{\partial |W(s)|}{\partial \alpha} + |W(s)| \frac{\partial (e^{j\angle W(s)})}{\partial \alpha} \right] = \\ &= \frac{\alpha}{|W(s)|} \frac{\partial |W(s)|}{\partial \alpha} + j\alpha \frac{\partial \angle W(s)}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Perciò

$$\operatorname{Re} [S_\alpha^W(s)] = \frac{\alpha}{|W(s)|} \frac{\partial |W(s)|}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ln |W(s)|}{\partial \ln \alpha}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal teorema della derivata della funzione composta. Inoltre

$$\operatorname{Im} [S_\alpha^W(s)] = \alpha \frac{\partial \angle W(s)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \angle W(s)}{\partial \ln \alpha}$$

Supponiamo ora che un componente del sistema di controllo sia influenzato da un parametro  $\alpha$ . Vogliamo ora valutare la relazione tra la sensibilità alle variazioni di  $\alpha$  della funzione di trasferimento del componente che dipende da  $\alpha$  e la sensibilità alle variazioni di  $\alpha$  della funzione di trasferimento ad anello chiuso. Consideriamo

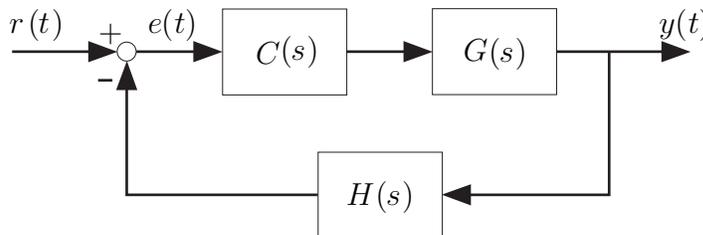


Figure 1.19:

lo schema nella figura 1.19 e supponiamo che una delle tre funzioni di trasferimento  $C(s)$ ,  $G(s)$ ,  $H(s)$  dipenda da un parametro  $\alpha$ . La funzione di trasferimento ad anello chiuso è

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}.$$

Se è  $G(s)$  a dipendere da  $\alpha$ , allora

$$S_\alpha^W = \frac{\alpha}{W} \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{W} \frac{\partial W}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial \alpha} = \alpha \frac{1 + HCG}{CG} \frac{C(1 + HCG) - CGHC}{(1 + HCG)^2} \frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

Si può concludere che

$$\boxed{S_\alpha^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_\alpha^G(s)} \quad (1.3)$$

Si ha quindi che  $S_\alpha^W(s) = S(s)S_\alpha^H(s)$  dove

$$S(s) := \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)}$$

è detta **funzione sensibilità** del sistema in catena chiusa e gioca un ruolo importante per capire se e quanto la sensibilità  $S_\alpha^W(s)$  sia attenuata rispetto alla sensibilità  $S_\alpha^G(s)$ .

Se sappiamo che in un certo intervallo di frequenze  $\omega$  si ha che  $|C(j\omega)|$  è elevato, allora

$$|S_\alpha^W(j\omega)| = \frac{1}{|1 + H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)|} |S_\alpha^G(j\omega)| \ll |S_\alpha^G(j\omega)|$$

e quindi la variazione relativa delle funzioni di trasferimento corrispondente a una variazione del parametro  $\alpha$  è molto minore nel sistema retroazionato che in quello ad anello aperto per frequenze per cui il guadagno  $|C(j\omega)|$  è elevato. Se è  $C(s)$  a dipendere da  $\alpha$ , allora con passaggi analoghi si ottiene una formula analoga alla precedente

$$\boxed{S_\alpha^W(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_\alpha^C(s)} \quad (1.4)$$

Supponiamo infine che sia  $H(s)$  a dipendere da un parametro  $\beta$ . In questo caso si ha che

$$S_\beta^W = \frac{\beta}{W} \frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{\beta}{W} \frac{\partial W}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \beta} = \beta \frac{1 + HCG}{CG} \frac{(CG)^2}{(1 + HCG)^2} \frac{\partial H}{\partial \beta}$$

$$\boxed{S_\beta^W(s) = -\frac{H(s)C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_\beta^H(s)}$$

Si ha quindi che  $S_\beta^W(s) = -T(s)S_\beta^H(s)$  dove

$$T(s) := \frac{H(s)C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}$$

è detta **funzione sensibilità complementare** del sistema in catena chiusa ed è questa che in questo caso gioca un ruolo importante per capire se e quanto la sensibilità  $S_\beta^W(s)$  sia attenuata rispetto alla sensibilità  $S_\beta^H(s)$ . Si noti che

$$S(s) + T(s) = 1$$

e quindi risulta impossibile rendere piccola sia la funzione sensibilità sia la funzione sensibilità complementare. Infatti, nell'intervallo di frequenze in cui  $|C(j\omega)|$  è elevato si ha

$$S_{\beta}^W(j\omega) \approx S_{\beta}^H(j\omega)$$

e quindi, in questo caso, la sensibilità resta invariata.

**Esempio 1.8** Consideriamo il sistema di controllo di posizione del motore in continua presentato in precedenza. Supponiamo di considerare il modello ridotto del motore per il quale la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $v$  e l'uscita  $\theta$  è

$$G(s) = \frac{K_m}{s(s+p)}$$

come da (1.1). Lo schema a blocchi del sistema di controllo risultante è illustrato nella figura 1.20. Questo schema è lo stesso di quello illustrato nella figura 1.19 ponendo  $C(s) = K_a$  e  $H(s) = K_p$ . Le sensibilità di  $G(s)$ ,  $W(s)$  e  $H(s)$  rispetto ai

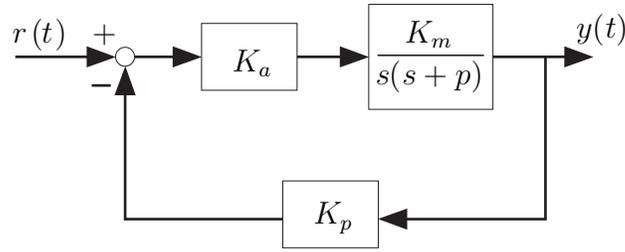


Figure 1.20:

parametri  $K_m, K_p, K_a, p$  sono

$$S_{K_m}^G(s) = \frac{K_m}{G} \frac{dG}{dK_m} = K_m \frac{s(s+p)}{K_m} \frac{1}{s(s+p)} = 1,$$

$$S_p^G(s) = \frac{p}{G} \frac{dG}{dp} = p \frac{s(s+p)}{K_m} \frac{-K_m s}{s^2(s+p)^2} = -\frac{p}{s+p},$$

$$S_{K_a}^C(s) = \frac{K_a}{C} \frac{dC}{dK_a} = 1.$$

$$S_{K_p}^H(s) = \frac{K_p}{H} \frac{dH}{dK_p} = 1.$$

La funzione di trasferimento a catena chiusa è

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)} = \frac{K_a K_m}{s^2 + ps + K_a K_m K_p}.$$

Calcoliamo la sensibilità ad anello chiuso di  $W(s)$  rispetto ai parametri  $K_m, K_p, K_a, p$

$$\begin{aligned}
 S_{K_m}^W(s) &= \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_{K_m}^G(s) = \frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_a K_m K_p}, \\
 S_p^W(s) &= \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_p^G(s) = -\frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_a K_m K_p} \frac{p}{s+p} \\
 &= -\frac{ps}{s^2 + ps + K_a K_m K_p}, \\
 S_{K_a}^W(s) &= \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_{K_a}^C(s) = \frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_a K_m K_p}, \\
 S_{K_p}^W(s) &= -\frac{H(s)C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)} S_{K_p}^H(s) = -\frac{K_a K_m K_p}{s^2 + ps + K_a K_m K_p},
 \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + H(s)C(s)G(s)} &= \frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_a K_m K_p} \\
 \frac{H(s)C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)} &= \frac{K_a K_m K_p}{s^2 + ps + K_a K_m K_p}.
 \end{aligned}$$

Vediamo come la sensibilità si ripercuote sulla variazione del valore a regime della risposta al gradino al variare dei parametri.

Si noti che  $W(s)$  ha poli nel semipiano sinistro e quindi all'ingresso a gradino unitario il sistema reagirà con una risposta forzata che asintoticamente varrà  $W(0)$ . Dai valori delle sensibilità a frequenza nulla

$S_{K_m}^G(0) = 1$	$S_{K_m}^W(0) = 0$
$S_p^G(0) = -1$	$S_p^W(0) = 0$
$S_{K_a}^C(0) = 1$	$S_{K_a}^W(0) = 0$
$S_{K_p}^H(0) = 1$	$S_{K_p}^W(0) = -1$

si può concludere che variazioni di  $K_m, K_a, p$  non porteranno a variazioni nel valore a regime della risposta al gradino. Ciò si poteva osservare direttamente notando che  $W(0) = \frac{1}{K_p}$  è indipendente da  $K_m, K_a, p$ .

Consideriamo un caso concreto in cui  $K_m = 1, K_a = 10, p = 2, K_p = 1, \frac{\Delta K_a}{K_a} = \frac{5}{100} = 5\%$ ,  $r(t) = 2 \cos(0.5t)$ . In questo caso

$$W(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}.$$

Calcoliamo l'uscita forzata. Si noti che

$$|W(j 0.5)| = 1.0203 \quad \angle W(j 0.5) = -0.1022$$

dove il simbolo  $\angle$  indica la fase di un numero complesso. Da ciò risulta che

$$y(t) = 2|W(j 0.5)| \cos(0.5t + \angle W(j 0.5)) = 2.0406 \cos(0.5t - 0.1022).$$

Calcoliamo ora la variazione  $\Delta y$  dovuta alla variazione  $\Delta K_a$

$$\frac{\Delta Y(s)}{Y(s)} = \frac{\Delta W(s)}{W(s)} = S_{K_a}^W(s) \frac{\Delta K_a}{K_a} = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + 2s + 10} 0.05,$$

e quindi

$$\Delta Y(s) = S_{K_a}^W(s) \frac{\Delta K_a}{K_a} Y(s)$$

che può essere interpretato come un sistema con ingresso  $Y(s)$ , uscita  $\Delta Y(s)$  e funzione di trasferimento  $S_{K_a}^W(s) \Delta K_a / K_a$ . Notando infine che l'ingresso  $y$  è sinusoidale con pulsazione  $\omega = 0.5$ , allora possiamo concludere che l'uscita  $\Delta y$  sarà ancora sinusoidale, con la stessa pulsazione, con ampiezza che, rispetto all'ampiezza di  $y$ , sarà amplificata di  $|S_{K_a}^W(j 0.5) \Delta K_a / K_a|$  e con fase che, rispetto alla fase di  $y$ , sarà aumentata di  $\angle S_{K_a}^W(j 0.5) \Delta K_a / K_a$ . Quindi, notando che

$$|S_{K_a}^W(j 0.5)| = 0.1052 \quad \angle S_{K_a}^W(j 0.5) = 1.7136$$

si ottiene che

$$|S_{K_a}^W(j 0.5) \Delta K_a / K_a| = 0.0526 \quad \angle S_{K_a}^W(j 0.5) \Delta K_a / K_a = \angle S_{K_a}^W(j 0.5) = 1.7136$$

e quindi

$$\Delta y(t) = 0.0107 \cos(0.5t + 1.6114)$$

## 1.4 Effetto della retroazione sulla reiezione ai disturbi

L'effetto di un disturbo che entra in un sistema di controllo è completamente determinato dalla funzione di trasferimento dal disturbo all'uscita. Se ad esempio consideriamo lo schema illustrato nella figura 1.21 nel quale il disturbo entra tra il controllore e il sistema da controllare, allora

$$W_{d_1, y}(s) = \frac{1}{1 + C(s)H(s)G(s)}$$

In parole povere, per rendere piccolo l'effetto di  $d_1(t)$  su  $y(t)$  è necessario rendere "piccola" la funzione di trasferimento  $W_{d_1, y}(s)$ . Si noti che  $W_{d_1, y}(s)$  coincide con la funzione sensibilità  $S(s)$  introdotta nella sezione precedente. È chiaro che, per

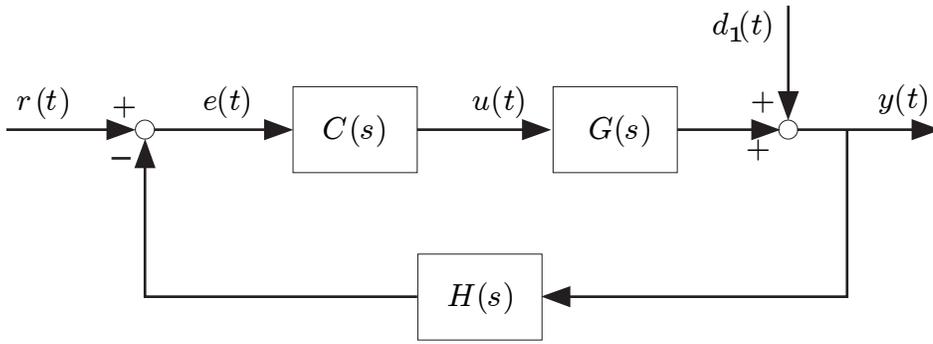


Figure 1.21:

rendere piccolo l'effetto  $d_1(t)$  sull'uscita  $y(t)$ , bisogna rendere piccolo  $|W_{d_1,y}(j\omega)|$  in corrispondenza delle frequenze  $\omega$  in cui il contenuto armonico del disturbo  $d_1(t)$  è alto. Per avere  $|W_{d_1,y}(j\omega)|$  piccolo sarà sufficiente scegliere un controllore  $C(s)$  con  $|C(j\omega)|$  elevato. Infatti, in tal caso, avremo

$$|Y(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)} D_1(j\omega) \right| \simeq \frac{1}{|H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)|} |D_1(j\omega)| \ll |D_1(j\omega)|.$$

Si noti che, se il disturbo entra in un punto diverso dell'anello (vedi figura 1.22) si ha che

$$W_{d_2,y}(s) = -\frac{H(s)C(s)G(s)}{1 + H(s)C(s)G(s)}.$$

Si noti che  $W_{d_2,y}(s) = -T(s)$ , dove  $T(s)$  è la funzione sensibilità complementare introdotta nella sezione precedente. Quindi, come osservato in precedenza, poiché  $S(s) + T(s) = 1$ , risulta impossibile rendere piccole  $W_{d_1,y}(s)$  e  $W_{d_2,y}(s)$  contemporaneamente, ma sarà possibile farlo su intervalli di frequenze diverse. Infatti, per le frequenze  $\omega$  tali che  $|C(j\omega)|$  è elevato, si ha che

$$|Y(j\omega)| = \left| -\frac{H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)}{1 + H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)} D_2(j\omega) \right| \simeq |D_2(j\omega)|.$$

e quindi il disturbo in queste frequenze viene lasciato inalterato. Viceversa per frequenze in cui  $|C(j\omega)|$  è piccolo, si ha che

$$|Y(j\omega)| = \left| \frac{H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)}{1 + H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)} D_2(j\omega) \right| \simeq |H(j\omega)C(j\omega)G(j\omega)| |D_2(j\omega)| \ll |D_2(j\omega)|.$$

Una soluzione a questi obiettivi contrastanti è possibile se i due disturbi hanno bande in frequenza disgiunte. Infatti, per diminuire l'effetto di entrambi i disturbi sull'uscita basta che  $|C(j\omega)|$  sia elevato per le frequenze in cui è attivo il disturbo  $d_1(t)$  e che  $|C(j\omega)|$  sia piccolo per le frequenze in cui è attivo il disturbo  $d_2(t)$ .

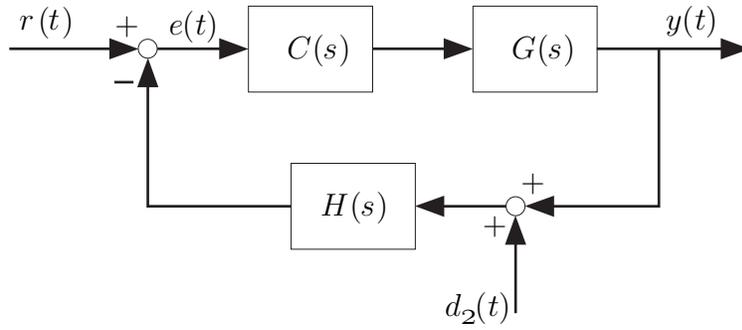


Figure 1.22:

**Esempio 1.9** Il sistema di controllo di velocità per un motore in continua ha lo schema a blocchi mostrato in figura 1.10. La coppia di ingresso  $W$  può essere considerata un disturbo esterno agente sul sistema che tende a influenzare la velocità del motore. Per questo motivo denotiamo la coppia esterna col simbolo  $d$ . Denotiamo inoltre il riferimento esterno col simbolo  $r$ .

Allora avremo che

$$W_{r,\omega}(s) = \frac{K_a H}{(Ls + R)(Js + B) + H^2 + K_a K_p H}$$

$$W_{d,\omega}(s) = \frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + B) + H^2 + K_a K_p H}$$

Se sia il riferimento  $r(t)$  che il disturbo  $d(t)$  sono dei segnali a gradino, allora  $r(t)$  subisce a regime un'amplificazione

$$W_{r,\omega}(0) = \frac{K_a H}{RB + H^2 + K_a K_p H}$$

mentre  $d(t)$  subisce a regime un'amplificazione

$$W_{d,\omega}(0) = \frac{R}{RB + H^2 + K_a K_p H}$$

Se il guadagno  $K_a$  dell'amplificatore è elevato, avremo

$$W_{r,\omega}(0) \simeq \frac{1}{K_p},$$

$$W_{d,\omega}(0) \simeq 0.$$

## 1.5 Effetto della retroazione sul comportamento a regime

Una specifica molto importante è l'errore a regime nella risposta del sistema retroazionato ai segnali canonici a gradino, rampa, rampa parabolica etc., anche perché un segnale di riferimento  $r(t)$  può essere spesso approssimato con una funzione che, a tratti, coincide con gradini, rampe, etc. Per analizzare l'effetto della retroazione sul comportamento a regime è utile riferirsi allo schema semplificato mostrato nella figura refcont.f15s. Abbiamo visto all'inizio del capitolo che, attraverso la scelta opportuna del filtro sagomatore, ci si può sempre ricondurre a questo schema e che inoltre lo scopo del controllo è di cercare di rendere il segnale  $e(t)$  piccolo o possibilmente nullo.

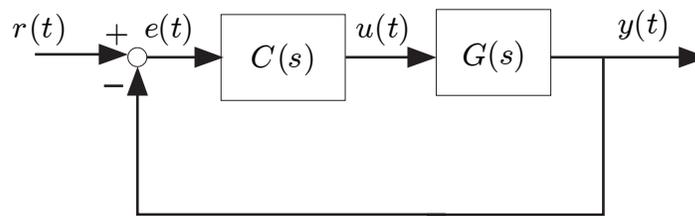


Figure 1.23:

Se indichiamo  $W(s) := C(s)G(s)$ , allora si ha che

$$E(s) = W_{re}(s) R(s)$$

dove

$$W_{re}(s) = \frac{1}{1 + W(s)}.$$

Perché abbia senso parlare di comportamento a regime di  $e(t)$ , dobbiamo ipotizzare che la funzione di trasferimento  $W_{re}(s)$  abbia poli con  $\text{Re } s < 0$  a parte eventuali poli nell'origine. L'analisi delle risposte a regime illustrata nella sezione ?? suggerisce che, se  $r(t)$  è un gradino o una rampa o una rampa parabolica, etc, il valore a regime di  $e(t)$  dipenderà dal tipo e dal guadagno di Bode di  $W_{re}(s)$ . Più precisamente:

(i) Se  $r(t) = \delta^{(-k)}(t)$ , allora

$$e(t) \simeq \bar{K}_B \delta^{(-k-\bar{l})}(t)$$

asintoticamente, dove  $\bar{l}$  è il tipo di  $W_{re}(s)$  e  $\bar{K}_B$  è il guadagno di Bode di  $W_{re}(s)$ . Si noti che, come visto nella sezione ??, se  $-k - \bar{l} \geq 0$ , allora  $e(t)$  converge a zero.

Quindi per avere  $e(\infty)$  piccolo è conveniente avere  $\bar{l}$  negativo e grande in modulo ( $W_{re}(s)$  con tanti zeri nell'origine) e  $\bar{K}_B$  piccolo.

Per concludere è sufficiente determinare come  $W(s)$  influenza il tipo e il guadagno di Bode di  $W_{re}(s)$ . Scrivendo

$$W(s) = \frac{K_B \bar{W}(s)}{s^l}$$

dove  $\bar{W}(0) = 1$ , si ottiene

$$W_{re}(s) = \frac{s^l}{s^l + K_B \bar{W}(s)}$$

Si può concludere che:

(ii) Se  $l$  è il tipo di  $W(s)$  e  $K_B$  è il guadagno di Bode di  $W(s)$ , allora

se $l = 0$	$\bar{l} = 0$	$\left  \bar{K}_B = \frac{1}{1 + K_B} \right $
se $l \geq 1$	$\bar{l} = -l$	$\left  \bar{K}_B = \frac{1}{K_B} \right $
se $l \leq -1$	$\bar{l} = 0$	$\left  \bar{K}_B = 1 \right $

Quindi per avere  $e(\infty)$  piccolo è conveniente avere  $l$  positivo e grande ( $W(s)$  con tanti poli nell'origine) e  $K_B$  grande.

Analizziamo separatamente i tre casi più importanti.

### 1. Risposta al gradino

In questo caso  $k = 1$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{K}_B \delta^{(-1-\bar{l})}(t)$ .

- Se  $l \leq -1$  ( $W(s)$  con zeri nell'origine), allora  $\bar{l} = 0$  e  $\bar{K}_B = 1$  e quindi  $e(\infty) = 1$ .
- Se  $l = 0$  ( $W(s)$  senza poli e zeri nell'origine), allora  $\bar{l} = 0$  e  $\bar{K}_B = \frac{1}{1+K_B}$  e quindi  $e(\infty) = \frac{1}{1+K_B}$ .
- Se  $l \geq 1$  ( $W(s)$  con poli nell'origine), allora  $\bar{l} \leq -1$  e quindi, essendo  $-k - \bar{l} = -1 + l \geq 0$  allora si ha che  $e(\infty) = 0$  (si noti che  $W_{re}(0) = 0$ ).

Riassumendo

$$e(\infty) = \begin{cases} 1 & \text{se } l \leq -1 \\ \frac{1}{1 + K_B} & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l \geq 1. \end{cases}$$

## 2. Risposta alla rampa

In questo caso  $k = 2$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{K}_B \delta^{(-2-\bar{l})}(t)$ .

- Se  $l \leq 0$  ( $W(s)$  senza poli nell'origine e con eventuali zeri), allora  $\bar{l} = 0$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{K}_B \delta^{(-2)}(t)$  e  $e(\infty) = \infty$ .
- Se  $l = 1$  ( $W(s)$  con un polo nell'origine), allora  $\bar{l} = -1$  e  $\bar{K}_B = \frac{1}{1+K_B}$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{1}/K_B \delta^{(-1)}(t)$  e  $e(\infty) = 1/K_B$ .
- e  $l \geq 2$  ( $W(s)$  con almeno due poli nell'origine), allora  $\bar{l} \leq -2$  e quindi, essendo  $-k - \bar{l} = -2 + l \geq 0$  allora si ha che  $e(\infty) = 0$ .

Riassumendo

$$e(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{se } l \leq 0 \\ \frac{1}{K_B} & \text{se } l = 1 \\ 0 & \text{se } l \geq 2. \end{cases}$$

## 3. Risposta alla rampa parabolica

In questo caso  $k = 3$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{K}_B \delta^{(-3-\bar{l})}(t)$ .

- Se  $l \leq 0$  ( $W(s)$  senza poli nell'origine e con eventuali zeri), allora  $\bar{l} = 0$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{K}_B \delta^{(-3)}(t)$  e  $e(\infty) = \infty$ .
- Se  $l = 1$  ( $W(s)$  con un polo nell'origine), allora  $\bar{l} = -1$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{K}_B \delta^{(-2)}(t)$  e  $e(\infty) = \infty$ .
- Se  $l = 2$  ( $W(s)$  con due poli nell'origine), allora  $\bar{l} = -1$  e  $\bar{K}_B = \frac{1}{K_B}$  e quindi  $e(t) \simeq \bar{1}/K_B \delta^{(-1)}(t)$  e  $e(\infty) = 1/K_B$ .
- Se  $l \geq 3$  ( $W(s)$  con almeno tre poli nell'origine), allora  $\bar{l} \leq -3$  e quindi, essendo  $-k - \bar{l} = -3 + l \geq 0$  allora si ha che  $e(\infty) = 0$ .

Riassumendo

$$e(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{se } l \leq 1 \\ \frac{1}{K_B} & \text{se } l = 2 \\ 0 & \text{se } l \geq 3. \end{cases}$$

Dall'analisi appena fatta si vede che avere  $l < 0$  ( $W(s)$  con zeri nell'origine) ha conseguenze disastrose sull'errore a regime, mentre è viceversa vantaggioso avere poli nell'origine. La tabella seguente riassume l'analisi dell'errore a regime ai segnali canonici.

	Gradino	Rampa	Rampa parabolica	
Tipo				
0	$\frac{1}{1 + K_B}$	$\infty$	$\infty$	$W(s) = K_B \bar{W}(s)$
1	0	$\frac{1}{K_B}$	$\infty$	$W(s) = \frac{K_B}{s} \bar{W}(s)$
2	0	0	$\frac{1}{K_B}$	$W(s) = \frac{K_B}{s^2} \bar{W}(s)$

Concretamente, per migliorare la precisione a regime in un sistema di controllo, è talvolta conveniente inserire un integratore nel precompensatore (vedi figura 1.24). Si noti inoltre che per avere errore a regime  $e(t) = 0$ , pur avendo a regime una uscita

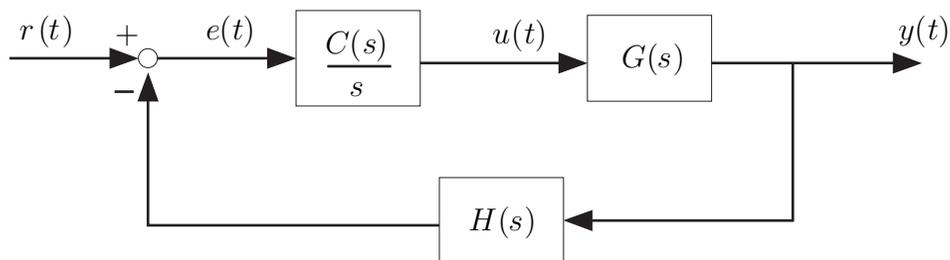


Figure 1.24:

$y(t)$  costante e non nulla, è intuitivo che deve esserci un integratore in catena diretta (vedi figura 1.25).

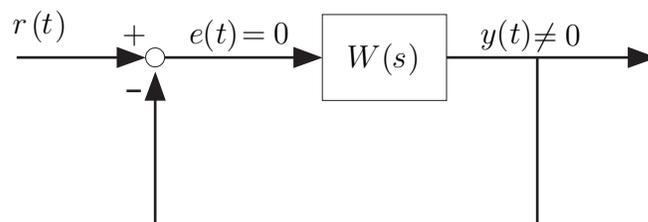


Figure 1.25:

**Esempio 1.10** Consideriamo il sistema di controllo di velocità del motore in continua presentato in precedenza. Il sistema di controllo è rappresentabile dallo schema

1.15 ponendo  $C(s) = K_a$ ,  $H(s) = K_p$  e

$$G(s) = \frac{H}{(Ls + R)(Js + B) + H^2}$$

In questo caso quindi il guadagno d'anello

$$W(s) = \frac{HK_aK_p}{(Ls + R)(Js + B) + H^2}$$

non ha poli nell'origine (è di tipo 1) e quindi l'errore a regime nell'inseguimento di un gradino è

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + \frac{HK_aK_p}{RB + H^2}}$$

Quindi  $e(\infty)$  può essere reso piccolo aumentando l'amplificazione  $K_a$ . Tuttavia in questo sistema di controllo l'errore a regime nell'inseguimento di una rampa è infinito. Per migliorare il comportamento a regime si deve in questo caso utilizzare un controllore  $C(s)$  più complesso perché deve avere un polo nell'origine.

Se invece consideriamo il sistema di controllo di posizione del motore in continua presentato in precedenza, allora la situazione è analoga alla precedente con la differenza che ora

$$G(s) = \frac{H}{s[(Ls + R)(Js + B) + H^2]}$$

In questo caso il guadagno d'anello

$$W(s) = \frac{HK_aK_p}{s[(Ls + R)(Js + B) + H^2]}$$

ha un polo nell'origine e quindi l'errore a regime nell'inseguimento di un gradino è zero, mentre l'errore a regime nell'inseguimento di una rampa è

$$e(\infty) = \frac{RB + H^2}{HK_aK_p}.$$

## 1.6 Effetto della retroazione sul comportamento in transitorio

Come vedremo più ampiamente in seguito, la retroazione porta alla modifica dei poli del sistema retroazionato rispetto al sistema a catena aperta e ciò influisce, oltre che sulla stabilità, anche sul comportamento in transitorio. Facendo l'approssimazione attraverso i poli dominanti, si riesce anche a valutare la relazione che c'è tra la posizione dei poli del sistema retroazionato e i parametri tipici che descrivono il transitorio, quali la sovraelongazione, il tempo di salita, il tempo di assestamento, etc.

**Esempio 1.11** Consideriamo il sistema di controllo di velocità del motore in continua presentato in precedenza. Supponiamo di considerare il modello ridotto del motore per il quale la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $v$  e l'uscita  $\omega$  è

$$G(s) = \frac{K_m}{s + p}$$

come da (1.1). Lo schema a blocchi del sistema di controllo risultante è illustrato nella figura 1.26.

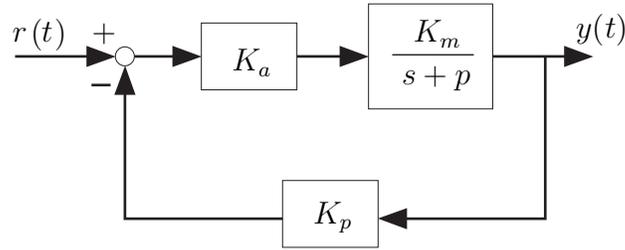


Figure 1.26:

La funzione di trasferimento in catena chiusa è

$$W(s) = \frac{K_a K_m}{s + p + K_a K_m K_p},$$

I poli di  $W(s)$  sono

$$\lambda = -p - K_a K_m K_p$$

Siamo interessati ad analizzare il transitorio al variare dell'amplificazione  $K_a$ . Si noti che in questo caso si ottiene un sistema del primo ordine con costante di tempo

$$\tau = \frac{1}{p + K_a K_m K_p}$$

che può essere reso arbitrariamente piccola aumentando opportunamente il guadagno  $K_a$ .

**Esempio 1.12** Consideriamo il sistema di controllo di posizione del motore in continua presentato in precedenza. Supponiamo di considerare il modello ridotto del motore per il quale la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $v$  e l'uscita  $\theta$  è

$$G(s) = \frac{K_m}{s(s + p)}$$

come da (1.1). Lo schema a blocchi del sistema di controllo risultante è illustrato nella figura 1.27.

La funzione di trasferimento in catena chiusa è

$$W(s) = \frac{K_a K_m}{s^2 + ps + K_a K_m K_p},$$

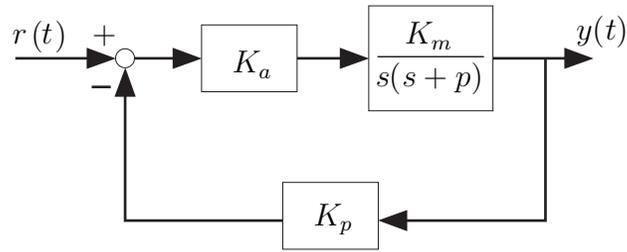


Figure 1.27:

I poli di  $W(s)$  sono

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - K_a K_m K_p} & , \quad K_a K_m K_p < \frac{p^2}{4} \\ -\frac{p}{2} \pm j \sqrt{K_a K_m K_p - \frac{p^2}{4}} & , \quad K_a K_m K_p > \frac{p^2}{4} \end{cases}$$

Quindi, se siamo interessati ad analizzare il transitorio al variare dell'amplificazione  $K_a$ , è conveniente fare riferimento alla figura 1.28 che illustra come si spostano i poli di  $W(s)$  al variare di  $K_a$ . Se abbiamo dei vincoli sul transitorio, ad esempio sul tempo di assestamento e sulla sovraelongazione, questi, come visto in precedenza, si traducono nella condizione che impone che i poli dominanti di  $W(s)$  appartengano alla zona grigia della figura 1.28). Dalla figura si può notare che esisterà un valore critico  $\bar{K}_a$  tale che il transitorio rispetterà i vincoli su sovraelongazione e tempo di assestamento e solo se  $0 < K_a < \bar{K}_a$ . La figura 1.28) illustra un esempio di luogo delle radici.

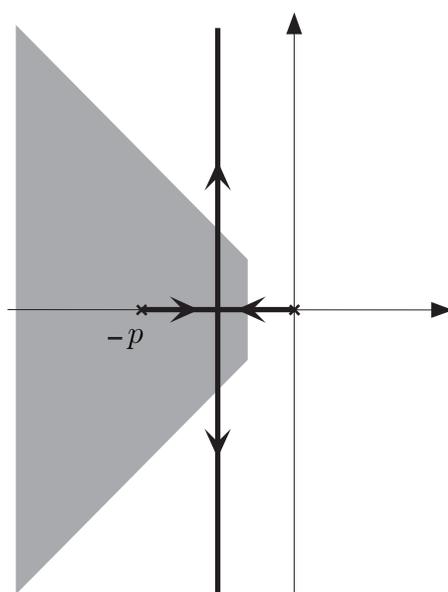


Figure 1.28: