Chapter 1

Introduzione

Le metodologie sviluppate nell'ambito dell'automatica contribuiscono al corretto funzionamento di apparati di tipologie molto diverse. L'automatica é perciò una tecnologia assai **diffusa**. Le applicazioni coprono molti settori che vanno dall'elettronica alla meccanica, dai trasporti all'ingegneria edile, dalle telecomunicazioni alla medicina, ecc.

L'automatica è una delle discipline **classiche** dell'ingegneria, in quanto nasce agli albori della rivoluzione industriale, quando, l'avvento della macchina a vapore, ha reso necessario lo sviluppo di tecniche per rendere utilizzabile la potenza erogata da questi apparati per il funzionamento, ad esempio, di locomotive o di macchine tessili.

Attualmente l'enorme capacità di calcolo dei moderni calcolatori ha portato ad un enorme sviluppo di questa disciplina in due diverse direzioni.

1. La velocità dei **calcolatori** moderni ha reso possibile il loro utilizzo come **controllori**, con conseguenti enormi vantaggi in termini di flessibilità e con costi abbastanza limitati.

2. Attraverso il calcolatore è oggi possibile utilizzare sofisticate metodologie per il progetto di leggi di controllo che permettono di ottenere elevate prestazioni. Vi è inoltre oggi la possibilità di verificare l'efficacia di una tecnica di controllo senza provarla sperimentalmente, ma attraverso **simulazioni** al calcolatore.

Il controllo automatico è necessario a far compiere a macchine appositamente progettate (es. robots) operazioni

1. che richiedono potenze o velocità che l'operatore umano non riuscirebbe a gestire (ad esempio il controllo della potenza di una caldaia a vapore, o della rotta di una nave, o della forma del plasma un un reattore);

2. che debbono essere compiute in ambienti ostili e pericolosi per l'uomo (ad esempio il controllo di posizione di veicoli sottomarini o veicoli spaziali);

3. che debbono essere compiute con precisioni impossibili per operatori umani (ad esempio la micro chirurgia attraverso sistemi a realtà amplificata).

1.1 Definizione del problema del controllo

Controllare un apparato significa farlo evolvere secondo delle regole preassegnate. Di conseguenza gli elementi di partenza del problema del controllo sono:

1. un apparato da controllare;
2. delle regole di funzionamento o specifiche di controllo.

Il controllo è detto automatico se questo interviene in assenza o con un limitato intervento umano. Per ottenere una soluzione di tipo ingegneristico a questo problema dobbiamo precisare i dati del problema in maniera quantitativa.

Una descrizione quantitativa dell'apparato da controllare è chiamata **modello matematico**. Più precisamente determinare un modello matematico consiste per prima cosa nell'individuare le grandezze che riteniamo più significative per la descrizione dell'apparato e nel determinare inoltre una equazione (lineare, non lineare, differenziale, differenziale alle derivate parziali, alle differenze finite, ecc.) che lega tali grandezze. Le grandezze ritenute significative per la descrizione dell'apparato sono dette le **variabili del modello** e sono rappresentate matematicamente da funzioni del tempo (segnali). In questo testo verranno considerati **modelli orientati**, cioè modelli in cui si distinguono le variabili che sono da considerarsi cause, che sono indicate negli schemi che rappresentano in modo grafico il modello come frecce entranti, e le variabili che sono da considerarsi effetti, che sono indicate invece come frecce uscenti. Più precisamente le variabili del modello sono suddivisibili in tre categorie:

1. variabili di ingresso,
2. variabili di disturbo,
3. variabili di uscita.

Le **variabili di ingresso** sono le variabili del modello che possiamo manipolare e il cui andamento può essere in qualche misura impostato nella maniera più opportuna.

Le **variabili di disturbo** sono anche in questo caso variabili il cui andamento viene imposto esternamente al sistema da controllare, ma che evolvono autonomamente. In altre parole non esiste la possibilità di assegnare, anche in parte, il valore di queste variabili.

Le **variabili di uscita** sono le variabili il cui andamento è invece fissato dal modello a partire dalle variabili di ingresso e di disturbo. Alcune di queste variabili sono misurate e utilizzate per generare l'ingresso di controllo (**uscite misurate**).

Altre variabili di uscita rappresentano le grandezze che siamo interessati a far evolvere in maniera assegnata secondo le specifiche (**uscite da controllare**). Negli esempi considerati in questa dispensa le uscite misurate e le uscite da controllare coincideranno.

Osservazione 1.1 Si noti che in alcuni casi i disturbi possono essere misurati direttamente e quindi i loro effetti indesiderati possono essere attenuati utilizzando direttamente tali misure. Quando la misura dei disturbi non è possibile, allora l'unico modo di attenuare il loro effetto è solo indirettamente attraverso l'uscita.

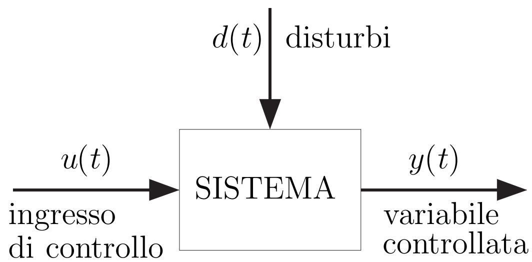

Figure 1.1: Schema che rappresenta il modello con ingressi, uscite e disturbi

Gli ingressi u e i disturbi d sono indicati come frecce entranti nel sistema perchè sono da considerarsi come "cause", mentre le uscite y sono indicate come frecce uscenti perchè possono essere considerate degli "effetti".

Riassumendo:

Il problema del controllo consiste nel far assumere alle uscite $y(t)$ un andamento desiderato limitando il più possibile l'effetto dei disturbi $d(t)$ agendo opportunamente sugli ingressi $u(t)$.

Le specifiche di controllo possono essere abbastanza diverse a seconda della situazione. Si tratta comunque sempre di far seguire all'uscita $y(t)$ un profilo preprogrammato $r(t)$, detto **riferimento**. Se il riferimento è costante, allora il problema è detto di **regolazione**, se invece il riferimento non è costante, allora il problema è detto di **asservimento**.

Illustriamo ora il concetto di modello matematico attraverso un esempio.

Esempio 1.2 Controllo di temperatura.

Si consideri il problema del controllo della temperatura interna a un contenitore attraverso l'utilizzo di una resistenza di riscaldamento (vedi figura 1.3).

Le variabili del sistema sono:

$F_{in}(t) = u(t)$ è il flusso di calore (potenza termica) entrante nel contenitore;

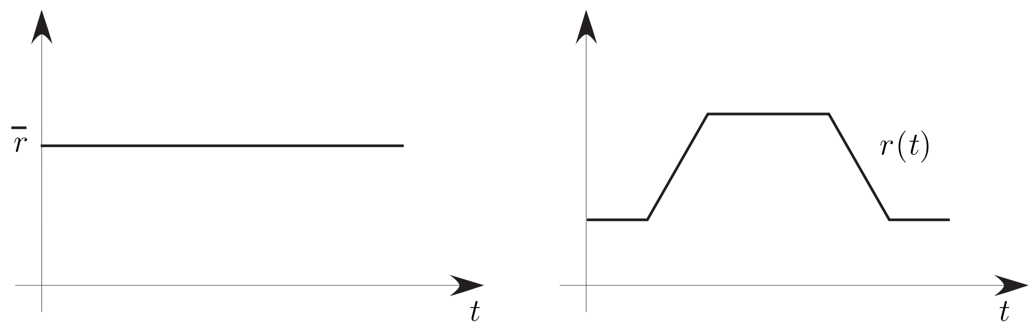

Figure 1.2: Regolazione e asservimento

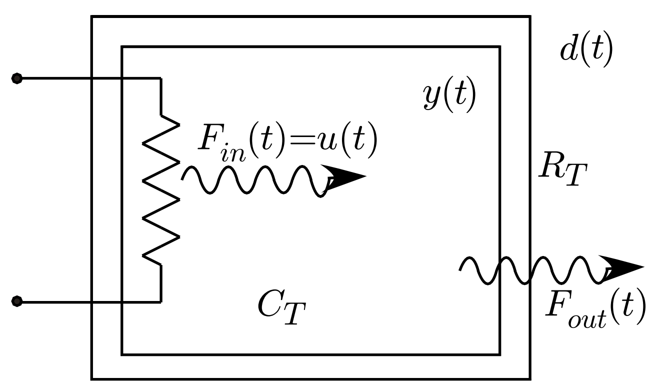

Figure 1.3: Contenitore riscaldato da una resistenza

$d(t)$ è la temperatura all'esterno del contenitore (disturbo);

$y(t)$ è temperatura all'interno del contenitore (uscita).

Per trovare il modello matematico dobbiamo determinare, attraverso le leggi della fisica, quali sono le equazioni che legano i segnali $u(t), d(t), y(t)$. Sia $Q(t)$ la quantità di calore interno al contenitore all'istante t. Se C_T è la capacità termica del contenitore, allora un incremento del calore interno al contenitore ΔQ induce un incremento della temperatura interna al contenitore Δy legata a ΔQ nel modo seguente:

$$C_T \Delta y = \Delta Q$$

da cui segue che

$$C_T \frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dt}.$$

Se R_T è la resistenza termica delle pareti, allora il flusso di calore attraverso le pareti $F_{out}(t)$ è legato alla differenza fra temperatura interna $y(t)$ ed esterna $d(t)$ nel modo seguente

$$F_{out}(t) = \frac{y(t) - d(t)}{R_T}.$$

La resistenza fornisce al contenitore un flusso di calore $u(t) = F_{in}(t)$. Possiamo concludere che

$$C_T \frac{dy}{dt} = \frac{dQ}{dt} = F_{in} - F_{out} = u - \frac{y - d}{R_T}$$

e quindi

$$C_T \frac{dy}{dt} + \frac{1}{R_T} y = \frac{1}{R_T} d + u.$$

Si ottiene così la seguente equazione differenziale che lega l'ingresso, il disturbo e l'uscita

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y = \alpha d + \beta u$$

in cui $\alpha = \frac{1}{R_T C_T}$ e $\beta = \frac{1}{C_T}$.

Analisi del modello Come vedremo nel seguito, la soluzione dell'equazione differenziale precedente, dati l'ingresso $u(t)$, il disturbo $d(t)$ e la condizione iniziale $y(0)$, è

$$y(t) = \underbrace{e^{-\alpha t} y(0)}_{y_\ell(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{-\alpha(t-\sigma)} \beta u(\sigma)\, d\sigma}_{y_f(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{-\alpha(t-\sigma)} \alpha d(\sigma)\, d\sigma}_{y_d(t)}.$$

L'evoluzione è data dalla somma di tre contributi dovuti a tre cause distinte $y(0)$, $u(t)$ e $d(t)$. Si noti che le tre cause contribuiscono in maniera **lineare**. Ipotizziamo che il disturbo, cioè la temperatura esterna, sia costante $d(t) = \bar{d}$. Analizziamo come reagisce il sistema a un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$. Si ottiene

$$y(t) = y(0)e^{-\alpha t} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\bar{u} + \bar{d}\right)\left(1 - e^{-\alpha t}\right).$$

Quindi l'andamento tipico è mostrato in figura 1.2 e a regime (t grande) la temperatura $y(t)$ sarà

$$y(\infty) = \frac{\beta}{\alpha}\bar{u} + \bar{d}.$$

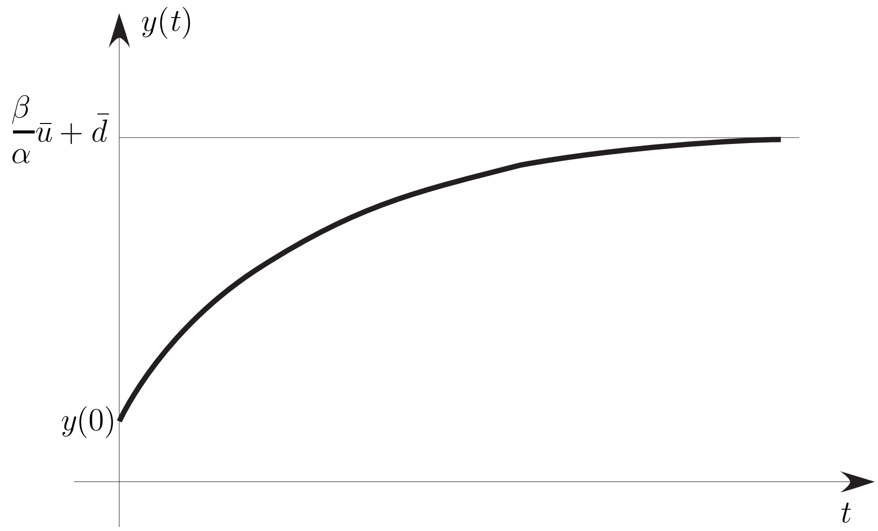

Figure 1.4: Andamento dell'uscita $y(t)$

Una descrizione semplificata del modello che non tiene conto delle condizioni iniziali è fornita dalle funzioni di trasferimento, che legano gli ingressi alle uscite del modello. In questo esempio, se $U(s)$, $D(s)$ e $Y(s)$ sono le trasformate di Laplace di $u(t)$, $d(t)$ e $y(t)$, rispettivamente, come vedremo nel seguito il legame tra queste tre grandezze è

$$Y(s) = W_1(s)U(s) + W_2(s)D(s),$$

dove

$$W_1(s) = \frac{\beta}{s+\alpha} \qquad W_2(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}. \tag{1.1}$$

In questo caso le specifiche di controllo possono consistere nel cercare di mantenere costante la temperatura interna o il far seguire alla temperatura interna un andamento fissato.

1.2 Strategie di controllo

In questo esempio le specifiche di controllo possono consistere nel cercare di mantenere costante la temperatura interna o il far seguire alla temperatura interna un andamento fissato. Esistono vari modi per controllare un sistema e raggiungere questo obiettivo. I due principali sono il controllo in catena aperta (Feedforward) e il controllo in catena chiusa o retroazione (Feedback).

1.2.1 Controllo in catena aperta

Nel controllo in catena aperta si cerca di soddisfare le specifiche di controllo attraverso il progetto di un controllore che genera l'ingresso di controllo a partire dalla conoscenza del modello e dell'andamento del riferimento $r(t)$. In questo caso il controllore risulterà essere un sistema avente $r(t)$ come ingresso, $u(t)$ come uscita. Se il sistema da controllare è affetto da disturbo e se tale disturbo può essere misurato, anche queste misure possono essere utilizzate nel calcolo dell'ingresso da applicare. Questa strategia di controllo è detta a catena aperta, perché in questo caso l'ingresso $u(t)$ è deciso a priori e non viene modificato a seconda del valore reale di $y(t)$. Lo schema che rappresenta il controllo in catena aperta è illustrato nelle figura 1.5.

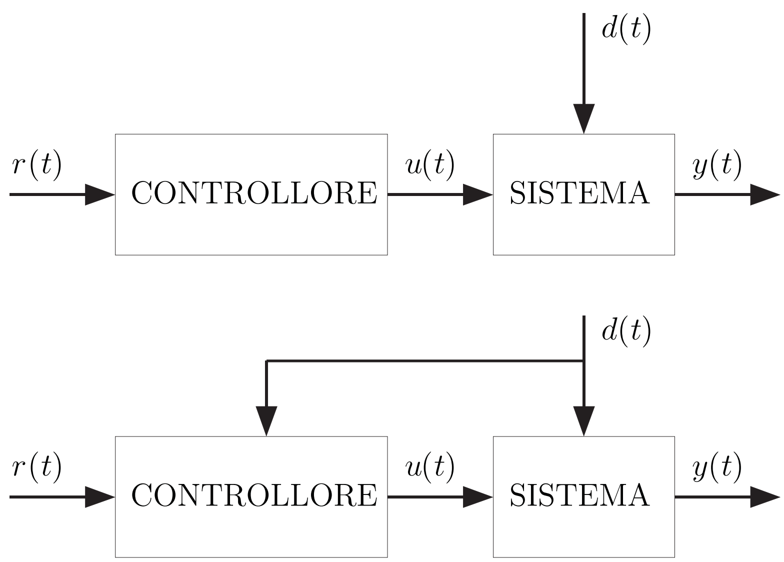

Figure 1.5: Controllo in catena aperta senza e con l'utilizzo delle misure del disturbo

Vediamo un esempio di controllo in catena aperta applicato all'esempio introdotto in precedenza.

Esempio 1.3 Controllo di temperatura in catena aperta

Supponiamo di voler seguire un profilo di temperatura $r(t)$. Definiamo l'errore di inseguimento $e(t) := r(t) - y(t)$. Allora si può scrivere

$$\frac{de}{dt} + \alpha e = \frac{dr}{dt} + \alpha r - \frac{dy}{dt} - \alpha y = \frac{dr}{dt} + \alpha r - \beta u - \alpha d$$

Se imponiamo un ingresso $u(t)$ calcolato come segue

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{dr(t)}{dt} + \alpha r(t)\right) - \frac{\alpha}{\beta}d(t), \tag{1.2}$$

allora si ottiene che

$$\frac{de}{dt} + \alpha e = 0.$$

La soluzione di questa equazione differenziale è $e(t) = e^{-\alpha t}e(0)$ e quindi l'errore di inseguimento tende ad annullarsi. Si noti che la relazione (1.2) può essere espressa nel dominio delle trasformate di Laplace nel modo seguente

$$U(s) = \frac{1}{W_1(s)}R(s) - \frac{W_2(s)}{W_1(s)}D(s), \tag{1.3}$$

dove $W_1(s)$ e $W_2(s)$ sono definite in (1.1). Si noti che il controllo proposto nella formula (1.2) può essere ottenuto in tempo reale attraverso lo schema in figura 1.5, dove il blocco CONTROLLORE è in questo caso un sistema con ingressi $r(t)$ e $d(t)$ e uscita $u(t)$ che opera secondo la formula (1.2) o (1.3).

Si osservi che spesso non è possibile o non è opportuno derivare il riferimento. In questo caso il controllore a catena aperta può essere modificato come segue

$$u(t) = \frac{\alpha}{\beta}r(t) - \frac{\alpha}{\beta}d(t).$$

In questo caso l'errore di inseguimento soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{de}{dt} + \alpha e = \frac{dr}{dt}.$$

In situazioni in cui $r(t)$ varia poco nel tempo in modo da avere una derivata "piccola", possiamo aspettarci che l'errore di inseguimento resti piccolo.

Se siamo in una situazione in cui il disturbo non è misurabile, allora il controllore a catena aperta diventa

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\left(\frac{dr(t)}{dt} + \alpha r(t)\right) - \frac{\alpha}{\beta}\bar{d},$$

dove $\bar{d}$ è una stima della temperatura media esterna. In questo caso l'errore di inseguimento soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{de}{dt} + \alpha e = \alpha\tilde{d},$$

dove $\tilde{d}(t) = d(t) - \bar{d}$. Quindi in questo caso, se $\tilde{d}(t)$ è piccolo, il controllore a catena aperta ha prestazioni accettabili, altrimenti l'errore di inseguimento in questo caso può diventare inaccettabile.

Un'altro motivo che rende il controllo in catena aperta inaffidabile è legato al fatto che questo si basa su un modello che in generale dà solo una descrizione approssimativa del fenomeno che vogliamo controllare. Questa strategia di controllo non è in grado di porre alcun rimedio a discrepanze tra il modello del fenomeno e il fenomeno stesso.

Si osservi infine che limiti tecnologici impongono che $u(t)$ non potrà assumere valori arbitrariamente grandi e che esisterà un valore massimo u_{max} possibile. Ciò impone che il seguente vincolo su $r(t)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta}\{\frac{dr}{dt}(t) + \alpha r(t) - \alpha d_{min}\} \leq u_{max} \\
&\frac{dr}{dt}(t) + \alpha r(t) \leq \alpha d_{min} + \beta u_{max},
\end{aligned}$$

dove d_{min} è una stima del valore minimo della temperatura esterna. In parole povere, se la temperatura esterna diventa troppo bassa rispetto alla potenza del sistema riscaldante, il calore fornito dalla resistenza non sará sufficiente a mantenere la temperatura su livelli accettabili.

1.2.2 Controllo in catena chiusa

Nel controllo in catena chiusa, invece, il controllo sarà effettuato comparando istante per istante $r(t)$ e $y(t)$ e agendo sul sistema da controllare solo se si verificano delle differenze tra i due andamenti. In altre parole, in questo caso il controllore sarà un sistema che a partire da un errore presente tra $r(t)$ e $y(t)$ genera il segnale controllo $u(t)$ in modo tale da compensare tale errore. Lo schema che rappresenta il controllo in catena chiusa è illustrato nelle figura 1.6. Questa strategia di controllo è detta a catena chiusa perché in questo caso, oltre ad avere che l'uscita dipende dall'ingresso, si ha anche che l'ingresso dipende dall'uscita.

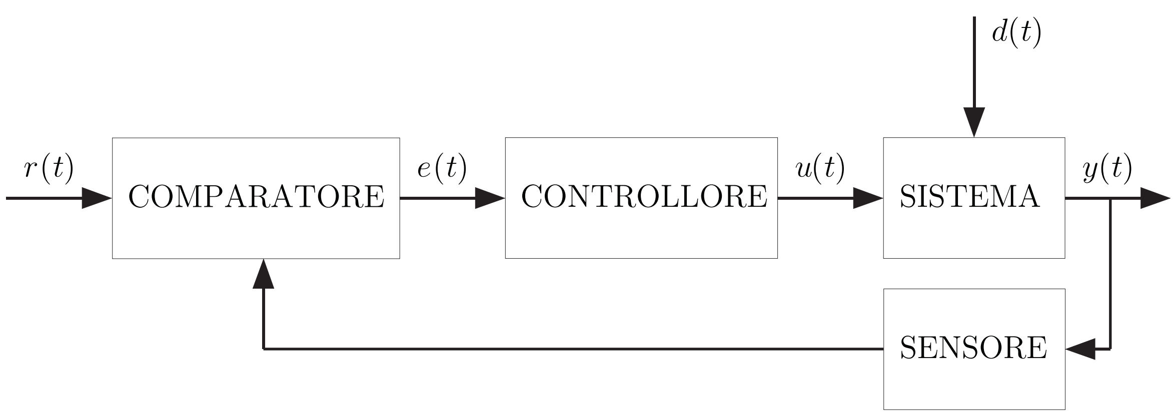

Figure 1.6: Controllo in catena chiusa

1.3 Esempi

Vediamo ora alcuni esempi di sistemi da controllare ai quali si applicano dei controlli a catena aperta e dei controlli in catena chiusa.

Esempio 1.4 Controllo di temperatura in catena chiusa a isteresi

Inseriamo un sensore di temperatura con un amplificatore in grado di fornire una tensione $v_y(t)$ proporzionale alla temperatura interna $y(t)$

$$v_y(t) = Ay(t).$$

Attraverso un comparatore di tensione si confronta $v_y(t)$ con $v_r(t) - \varepsilon$ e $v_r(t) + \varepsilon$, dove $v_r(t) := Ar(t)$ è la traduzione in tensione della temperatura desiderata $r(t)$ e ε è il margine di errore ammesso.

Usiamo quindi lo schema mostrato in figura 1.7, dove il blocco di isteresi ha il funzionamento descritto dalla figura 1.8.

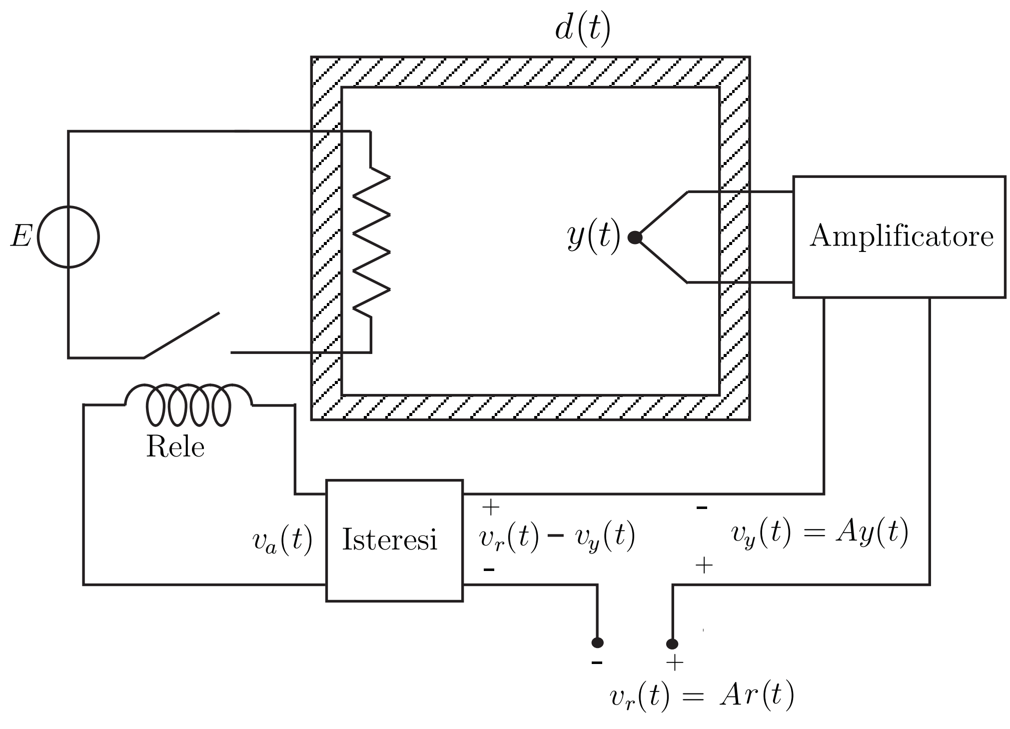

Figure 1.7: Controllo di temperatura in catena chiusa

Nello schema illustrato in figura 1.9 il controllo a catena chiusa viene rappresentato attraverso la interconnessione di vari blocchi ciascuno dei quali rappresenta un componente del sistema di controllo.

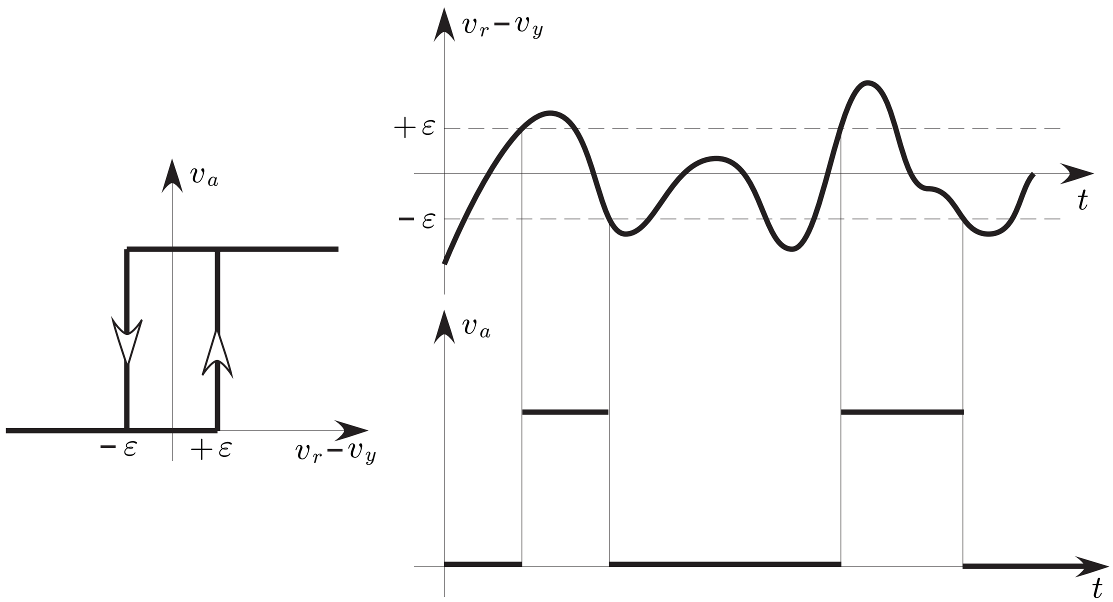

Figure 1.8: Funzione isteresi

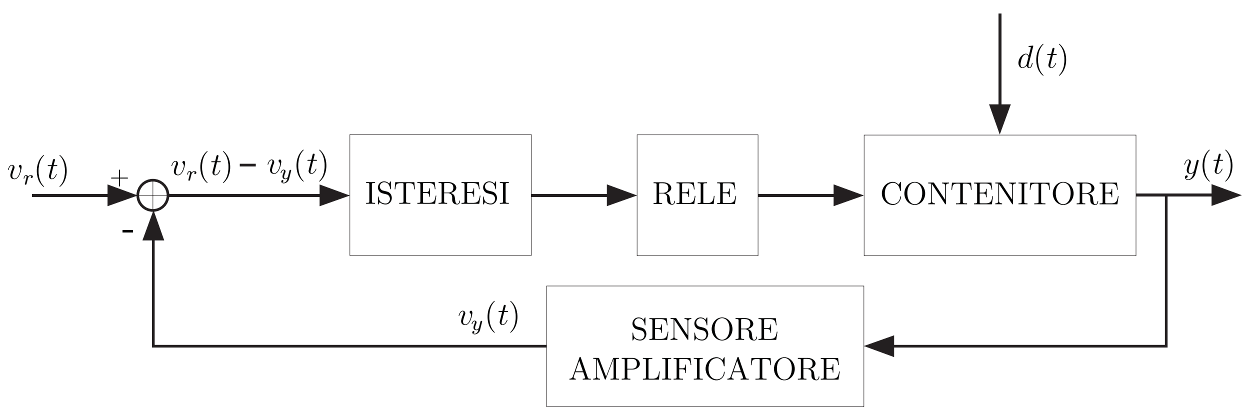

Figure 1.9: Rappresentazione attraverso uno schema blocchi del controllo di temperatura in catena chiusa

Analisi delle prestazioni: Supponiamo per semplicità che la temperatura esterna e la temperatura interna desiderata siano costanti

$$d(t) = \bar{d} \qquad r(t) = \bar{r}.$$

Esistono due regimi di funzionamento:

1. **Riscaldamento spento**: In questo caso $u = 0$ e quindi, come fatto notare in precedenza, in questo caso la $y(t)$ tenderà asintoticamente a $\bar{d}$. Si noti che dobbiamo imporre che

   $$\bar{d} \leq \bar{r} + \varepsilon.$$

   Infatti, a riscaldamento spento, la temperatura $y(t)$ tenderà a $\bar{d}$ che quindi deve essere inferiore alla temperatura massima consentita $\bar{r} + \varepsilon$, altrimenti avremmo bisogno di impianto di raffreddamento.

2. **Riscaldamento acceso**: In questo caso $u = \bar{u}$ e quindi, come fatto notare in precedenza, la $y(t)$ tenderà a $\bar{d} + \frac{\beta}{\alpha}\bar{u}$. Si noti che dobbiamo imporre in questo caso che

   $$\frac{\beta}{\alpha}\bar{u} + \bar{d} \geq \bar{r} - \varepsilon.$$

   Infatti, a riscaldamento acceso, la temperatura $y(t)$ tenderà a $\bar{d} + \frac{\beta}{\alpha}\bar{u}$ che quindi deve essere superiore alla temperatura minima consentita $\bar{y} - \varepsilon$. Questa disuguaglianza può essere usata per dimensionare la potenza dell'impianto di riscaldamento.

   Il conseguente andamento di $y(t)$ è illustrato nella figura 1.10.

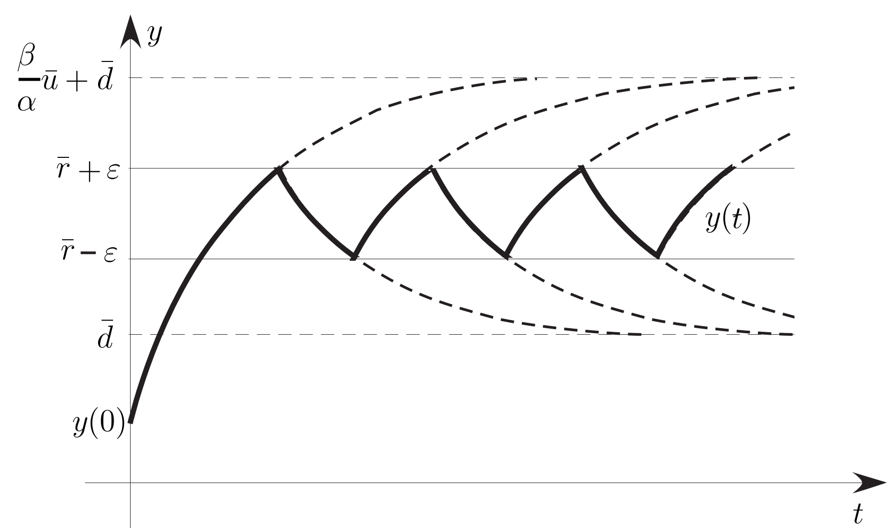

Figure 1.10: Andamento della temperatura nel controllo a isteresi

1.4 Esempio: controllo di velocità di un veicolo

Consideriamo ora un altro esempio attraverso il quale verranno illustrati i concetti introdotti in questo capitolo. L'esempio riguarda il progetto di un sistema di controllo della velocità di un veicolo. Il veicolo è modellato come una massa sottoposta ad una forza (vedi figura 1.11). Inoltre si suppone che la massa sia sottoposta anche ad una forza di attrito viscoso che è proporzionale alla velocità del veicolo e alla forza di gravità che sarà a sua volta proporzionale alla pendenza della strada. Più precisamente, se indichiamo con m la massa del veicolo, con x la sua posizione, con b la costante di attrito viscoso e con d la pendenza della strada (valutata in radianti), allora le leggi della fisica ci suggeriscono che il moto del veicolo può essere descritto dal seguente modello

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} + u - mg\sin(d),$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Poiché il nostro obiettivo è controllare la velocità del veicolo, indichiamo con y questa grandezza cioè

$$y := \frac{dx}{dt}.$$

Notando inoltre che per pendenze d piccole, si ha che $\sin(d) \simeq d$, otteniamo il seguente modello che lega ingresso u e il disturbo d all'uscita y

$$m\frac{dy}{dt} + by = u - mgd$$

che assomiglia molto al modello proposto prima per descrivere il riscaldamento del contenitore.

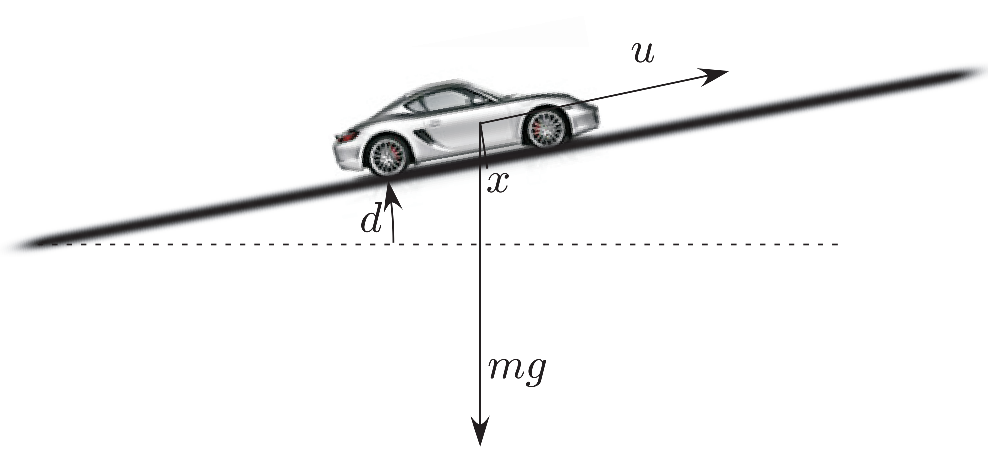

Figure 1.11: Descrizione del modello dell'auto

Cerchiamo ora di progettare un controllore a catena aperta in grado di produrre istante per istante l'ingresso $u(t)$ a partire dalla velocità di riferimento di velocità

$r(t)$ che vogliamo inseguire. Se definiamo l'errore di inseguimento $e(t) := r(t) - y(t)$, otteniamo il seguente legame tra il riferimento r, il disturbo d e l'errore e

$$m\frac{de}{dt} + be = m\frac{dr}{dt} + br - m\frac{dy}{dt} - by = m\frac{dr}{dt} + br - u + mgd.$$

Supponiamo di essere nella situazione di disturbo non misurabile e di non voler derivare il riferimento. Il controllore diventa perciò del tipo

$$u(t) = Kr(t).$$

Sostituendo nell'equazione precedente si ottiene

$$m\frac{de}{dt} + be = m\frac{dr}{dt} + (b - K)r + mgd.$$

Supponiamo che il riferimento e il disturbo siano costanti, cioè $r(t) = \bar{r}$ e $d(t) = \bar{d}$. Allora, per quanto visto in precedenza, si ha che il valore asintotico di $e(t)$ è

$$e(\infty) = \frac{b - K}{b}\bar{r} + \frac{mg}{b}\bar{d}.$$

E' chiaro che la scelta migliore è porre $K = b$ nel qual caso si ottiene

$$e(\infty) = \frac{mg}{b}\bar{d}.$$

In questo caso l'errore è influenzato solo dal disturbo. Tuttavia, la sensibilità dell'errore al disturbo dipende dalle caratteristiche del sistema da controllare e non è influenzabile dal controllore. Infatti, se supponiamo che la costante b sia nota solo in maniera approssimata in modo tale che il controllo è dato da $u = \bar{b}r$ con $\bar{b} \neq b$ allora si otterrà

$$e(\infty) = \frac{b - \bar{b}}{b}\bar{r} + \frac{mg}{b}\bar{d}.$$

che non è modificabile se non migliorando la conoscenza di b.

Cerchiamo ora di progettare un controllore a catena chiusa in grado di produrre istante per istante l'ingresso $u(t)$ a partire dalla differenza tra velocità reale $y(t)$ e la velocità di riferimento $r(t)$ che vogliamo ottenere. In questo caso scegliamo un controllore con la seguente struttura

$$u(t) = K(r(t) - y(t)).$$

In questo caso otteniamo il seguente legame tra il riferimento r, il disturbo d e l'errore e

$$m\frac{de}{dt} + be = m\frac{dr}{dt} + br - m\frac{dy}{dt} - by = m\frac{dr}{dt} + br - Ke + mgd$$

e quindi, spostando a primo membro il termine Ke si ottiene la seguente equazione

$$m\frac{de}{dt} + (b + K)e = m\frac{dr}{dt} + br + mgd.$$

Supponendo che $r(t) = \bar{r}$ e $d(t) = \bar{d}$ costanti, si ottiene che

$$e(\infty) = \frac{b}{b+K}\bar{r} + \frac{mg}{b+K}\bar{d}.$$

In questo caso risulta conveniente scegliere un K molto elevato, che porta a un errore limite che tende a zero. In altre parole, in questo caso, l'errore è influenzato sia dal riferimento che dal disturbo. Tuttavia, la sensibilità dell'errore al riferimento e al disturbo può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo un K sufficientemente grande. La figura 1.12 illustra attraverso degli schemi il controllo in catena aperta e in catena chiusa in questo esempio.

Dall'esempio appena visto possiamo trarre delle conclusioni valide piu' in generale che saranno riprese nei capitoli successivi:

- Il controllo in catena chiuso risulta avere ottime prestazioni se il guadagno e' elevato.

- In tal caso le prestazioni del controllo in catena chiusa risultano essere superiori a quelle del controllo in catena aperta.

- Il guadagno elevato pero' puo' produrre problemi in termini di ingressi costosi, transitori scadenti e possibili instabilita' del sistema controllato.

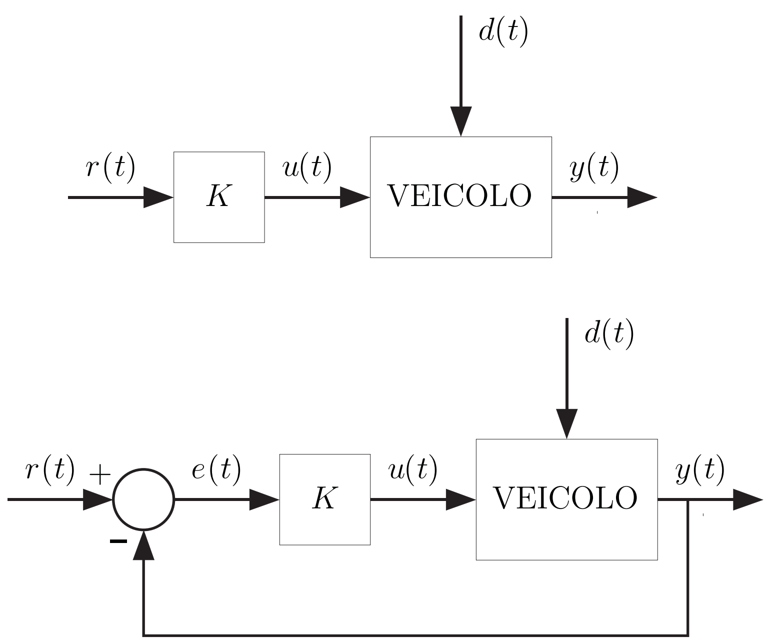

Figure 1.12: Controllo in catena aperta e in catena chiusa della velocità di un veicolo

1.5 Esempio: controllo di livello di un serbatoio

In questa sezione consideriamo un altro esempio che consiste in un sistema elementare di tipo idraulico. Si tratta di un sistema per controllare il livello di liquido in un serbatoio illustrato in figura 1.13. Il serbatoio ha una sezione di area A ed è alimentato da un flusso controllabile di $u(t)$ litri a secondo. Dal serbatoio viene prelevato il liquido con un flusso non controllabile di $d(t)$ litri a secondo. Sia infine $y(t)$ l'altezza del livello del liquido nel serbatoio. Nota che il volume del liquido risulta essere $Ay(t)$. La relazione tra queste grandezze é descritto dall'equazione

$$A\frac{dy}{dt} = u(t) - d(t).$$

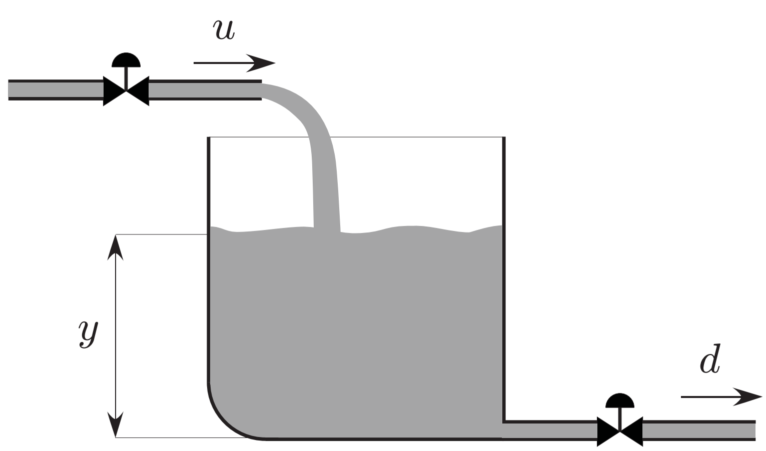

Figure 1.13: Controllo di livello in un serbatoio

In questo sistema possiamo individuare $u(t)$ come segnale di ingresso, $y(t)$ come segnale di uscita e $d(t)$ come segnale di disturbo. Cerchiamo di progettare un controllore a catena aperta in grado di produrre istante per istante l'ingresso $u(t)$ a partire dal livello di riferimento $r(t)$ che vogliamo ottenere. Supponiamo di essere nella situazione di disturbo misurabile. In questo caso possiamo proporre il seguente controllo

$$u(t) = A\frac{dr}{dt} + d(t)$$

che sostituito nell'equazione che descrive il modello risulta

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

Questa equazione implica che l'errore di inseguimento $e(t) = r(t) - y(t)$ resta costante

$$e(t) = e(0).$$

Possiamo concludere che $y(t)$ insegue $r(t)$ a meno di una costante. Se il disturbo non è noto, allora possiamo proporre il controllo

$$u(t) = A\frac{dr}{dt} + \bar{d},$$

dove $\bar{d}$ è una stima del valore medio del disturbo. Se definiamo $\tilde{d}(t) := d(t) - \bar{d}$ che è la differenza tra il valore reale del disturbo e la sua stima, allora possiamo concludere che vale la seguente equazione

$$A\frac{de}{dt} = \tilde{d}(t)$$

da cui segue

$$e(t) = e(0) + \int_0^t \tilde{d}(\sigma)d\sigma.$$

Se $\tilde{d}(\sigma)$ è costante, allora otteniamo un errore di inseguimento che diverge.

Analizziamo ora un controllore a catena chiusa che utilizza un sensore di livello in grado di fornire al controllore il valore $y(t)$. Se utilizziamo un controllore

$$u(t) = K(r(t) - y(t)),$$

allora otteniamo il seguente legame tra il riferimento r, il disturbo d e l'errore e

$$A\frac{de}{dt} + Ke = A\frac{dr}{dt} - A\frac{dy}{dt} + u = A\frac{dr}{dt} + d.$$

Supponendo che $r(t) = \bar{r}$ e $d(t) = \bar{d}$ costanti, si ottiene che

$$e(\infty) = \frac{1}{K}\bar{d}.$$

In questo caso l'errore è influenzato solo dal disturbo e risulta conveniente scegliere un K molto elevato in modo da avere un errore limite piccolo.