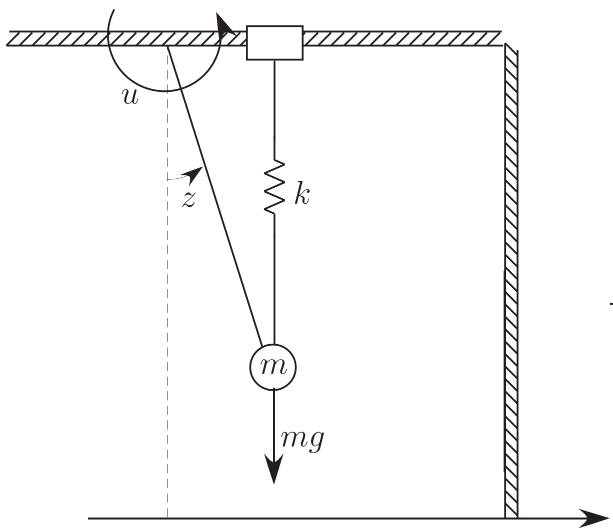
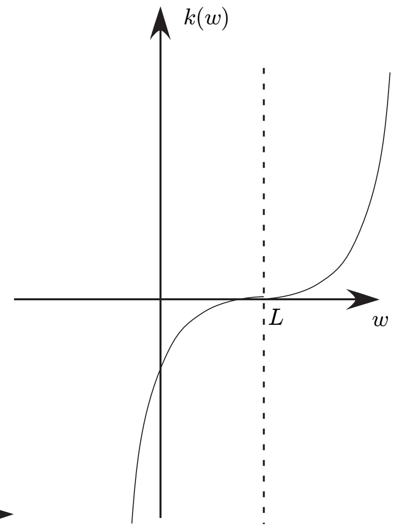
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Appello di Fondamenti di Automatica del 13/07/2011

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.





Si tratta di un pendolo sul quale agisce una coppia u, incenierato in un perno sul quale ruota con costante di attrito viscoso rotazionale trasurabile. Sia z la posizione angolare, m la massa dell'estremita' del pendolo e l la sua lunghezza. Sia g la accelerazione di gravita'. Si suppone che il pendolo sia incernierato a una molla la cui altra estremita' scorre lungo la parete in maniera tale che la molla sia sempre verticale. La molla soddisfa la legge secondo cui $F_e(w) = k(w)$, dove w e' la lunghezza della molla e

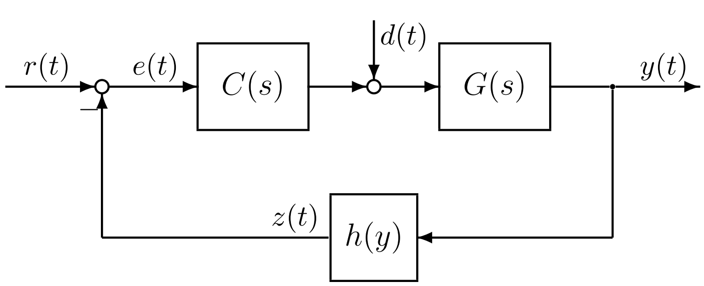
$$k(w) = \begin{cases} -(w-L)^2 & \text{se } w \leq L \\ (w-L)^2 & \text{se } w \geq L \end{cases}$$

come illustrato nella seconda figura (L e' la lunghezza a riposo della molla).

1. Determinare le equazioni del moto del pendolo. Determinare L in modo tale che in condizioni di equilibrio ($u = 0$) si ha $z(t) = 45^o$ per tutti i t.

2. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t) := z(t) - 45^o$ sotto l'ipotesi che sia $u(t)$ che $y(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{(s^2+6s+10)}{s(s+a)}, \qquad h(y) = y$$

dove a e' un parametro reale.

1. Determinare a, sapendo che $s = -2$ é punto doppio del luogo delle radici.
2. Si fissi a pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e punti doppi.
3. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K < 0$. Si determinino eventuali asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e punti doppi.
4. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-3t}. Determinare gli altri modi del sistema.

Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2} \qquad h(y) = y$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (determinare eventuali asintoti e intersezioni con asse reale e immaginario).
3. Determinare il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$ attraverso il criterio di Nyquist.
4. Determinare il margine di fase del sistema al variare di $K > 0$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{20}{1+5s} \qquad h(y) = y$$

1. Si progetti un compensatore stabilizzante $C(s)$, in modo da soddisfare alle seguenti specifiche:
   - errore a regime al gradino pari a circa 0.001;
   - pulsazione di attraversamento pari a circa 20;
   - margine di fase elevato, di circa 90^o.
2. Si progetti un compensatore stabilizzante $C(s)$, in modo da avere un errore a regime al gradino nullo e poli in catena chiusa in -1.

Esercizio 5 (Teorico) Fornire la giustificazione matematica del perche' il margine di fase puo' essere interpretato come indice di robustezza rispetto alla presenza di ritardi nel sistema.

ES 1

$$-J\ddot{z} - mg\ell \sin z + k(\ell\cos z)\,\ell \sin z + u = 0$$

$$z(t) = 45^\circ \quad \forall t \quad \rightarrow \quad \ddot{z}(t) = \dot{z}(t) = 0 \qquad e\ u(t) = 0 \ \forall t$$

$$-mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell + k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\ell = 0$$

$$k\left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = mg \Rightarrow \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2} - L\right)^2 = mg \Rightarrow \frac{\ell\sqrt{2}}{2} - L = \sqrt{mg}$$

$$L = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} - \sqrt{mg}$$

<u>Linearizzare</u>

$$\sin z \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y \qquad \cos z \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$k(\ell\cos z)\ell\sin z \simeq k\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\ell + \frac{\partial}{\partial z}\left[k(\ell\cos z)\ell\sin z\right]_{|z=45^\circ} y$$

$$k\left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\ell = mg\frac{\sqrt{2}}{2}\ell$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[k(\ell\cos z)\ell\sin z\right] = +\cos z\,\ell k(\ell\cos z) - \sin z\cdot 2\ell(\ell\cos z - L)\ell\sin z$$

$$= +\frac{\sqrt{2}}{2}\ell mg - \frac{\sqrt{2}}{2}2\ell^2\underbrace{\left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2} - L\right)}_{\sqrt{mg}}\frac{\sqrt{2}}{2} = +\frac{\sqrt{2}}{2}\ell mg - \ell^2\sqrt{mg}$$

$$-J\ddot{y} - \cancel{mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}} - \cancel{mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}y} + \cancel{mg\ell\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\ell mg} - \ell^2\sqrt{mg}\right]y + u = 0$$

$$-J\ddot{y} - \ell^2\sqrt{mg}\,y + u = 0$$

$$\left(Js^2 + \ell^2\sqrt{mg}\right)Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)/U(s) = \frac{1}{Js^2 + \ell^2\sqrt{mg}}$$

$\boxed{\text{ES. 2}}$ $s^2(s+a)+k(s^2+6s+10)=0$

$s^2+6s+10=0 \Rightarrow s_{12}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm j$

Punti doppi

$$\begin{cases} s^2(s+a)+k(s^2+6s+10)=0 \\ 2s(s+a)+s^2+k(2s+6)=0 \end{cases} \qquad k=-\frac{s(3s+2a)}{2(s+3)}$$

$$s^2(s+a)-\frac{s(3s+2a)}{2(s+3)}(s^2+6s+10)=0$$

$$2s(s+a)(s+3)-(3s+2a)(s^2+6s+10)=0$$

$$2s^3+(6+2a)s^2+6as-3s^3-18s^2-30s-2as^2-12as-20a=0$$

$$s^3+(18+\cancel{2a}-6-\cancel{2a})s^2+(30+12a-6a)s+(20a)=0$$

$$s^3+12s^2+(30+6a)s+20a=0$$

$s=-2$ $\quad -8+12\cdot 4+(30+6a)(-2)+20a=0$

$-8+48-60-12a+20a=0 \quad -20+8a=0 \quad \boxed{a=5/2}$

$$\begin{array}{l|l} s^3+12s^2+45s+50 & s+2 \\ \hline s^3+2s^2 & s^2+10s+25 \\ \hline 10s^2+45s+50 & \\ 10s^2+20s & \\ \hline 25s+50 & \\ 25s+50 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

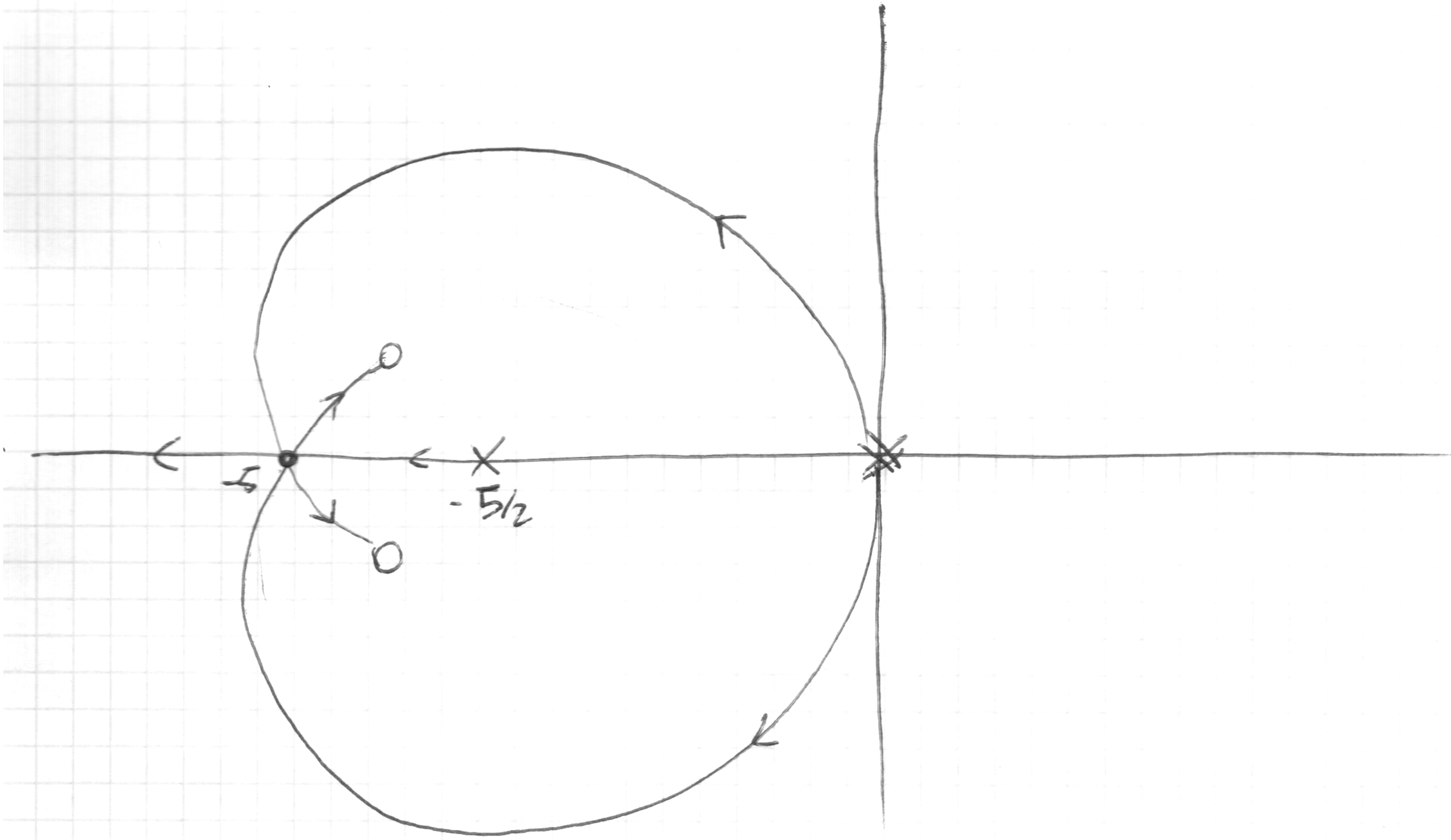
$s_{12}=-5\pm\sqrt{25-25}=-5$

$s=-5$ punto triplo

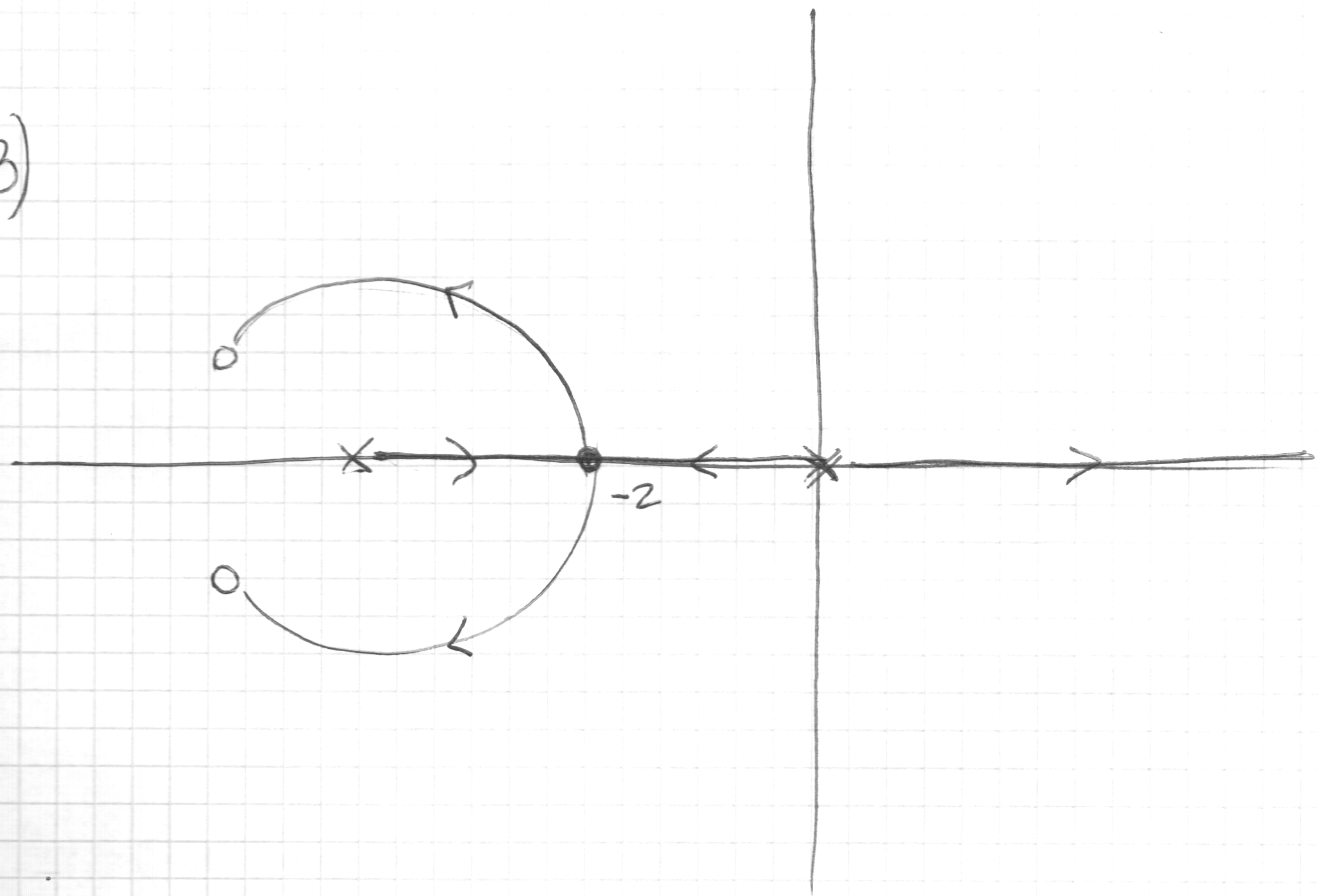
$$\begin{cases} s^2(s+\frac{5}{2})+k(s^2+6s+10)=0 \\ 2s(s+\frac{5}{2})+s^2+k(2s+6)=0 \\ 6s+5+2k=0 \end{cases} \xrightarrow{s=-5} \begin{cases} 25\cdot\frac{5}{2}+k\cdot 5=0 \\ -10(-\frac{5}{2})+25+k(-10+6)=0 \\ -25+2k=0 \end{cases}$$

PUNTO TRIPLO

tutte e tre hanno soluzione $k=25/2$



3)



4) Devo trovare k in modo che $s=-3$ sia soluzione del polinomio $s^2\left(s+\frac{5}{2}\right)+k(s^2+6s+10)$

$$9\left(\frac{5}{2}-3\right)+k(9-18+10)=0$$

$$-\frac{9}{2}+k=0 \qquad k=9/2$$

Il polinomio diventa

$$s^3+\left(\frac{5}{2}+\frac{9}{2}\right)s^2+6\frac{9}{2}s+10\cdot\frac{9}{2}=0$$

$$s^3+7s^2+27s+45=0$$

$$\begin{array}{r|l}
s^3+7s^2+27s+45 & s+3 \\ \cline{2-2}
s^3+3s^2 \qquad\qquad\quad & s^2+4s+15 \\ \hline
4s^2+27s+45 & \\
4s^2+12s \qquad & \\ \hline
15s+45 & \\
15s+45 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

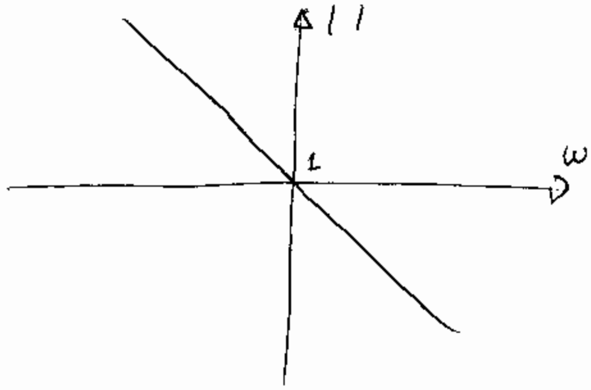
$$s_{1,2}=-2\pm j\sqrt{11}$$

Modi zero $e^{-2t}\cos(\sqrt{11}\,t)$

$e^{-2t}\sin(\sqrt{11}\,t)$

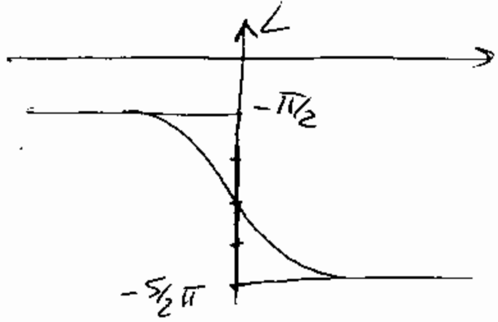
$\boxed{\text{ES 3}}$

Bode



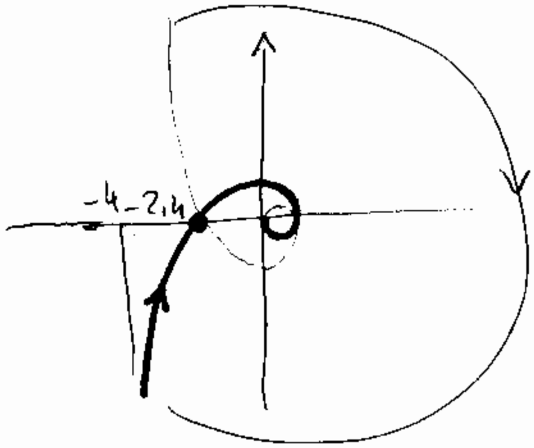
$$G(j\omega) = \frac{(1-\omega^2) - 2j\omega}{j\omega\left[(1-\omega^2)+2j\omega\right]}$$

$$= \frac{(1-\omega^2)^2 - 4\omega^2 - 4j\omega(1-\omega^2)}{j\omega\left[(1-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$



$$Re = -\frac{4(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$

$$Im = -\frac{(1-\omega^2)^2-4\omega^2}{\omega\left[(1-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$



$\omega = 0^+$ $\quad Im = \infty$

$\qquad\qquad Re = -4$

$Im = 0 \iff (1-\omega^2)^2 - 4\omega^2 = 0$

$\omega^2 = x \qquad (x-1)^2 - 4x = 0 \qquad x_{12} \begin{cases} 5.8 \\ 0.17 \end{cases} \to \omega = 0.4 \to Re = -2.4$

Criterio di Nyquist $\quad P = 0 \qquad Z = -N$

$-1/K < -2.4 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0$ Stabile

$-2.4 < -1/K < 0 \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2$ instabile

$$0 < K < 0.45$$

Margine di fase in funzione di K.

Si nota che, variando K, bode ~~moduli~~ fasi non cambia mentre i moduli sono traslati in alto o in basso a seconda che $K < 1$ o $K > 1$

Calcolo ω_A

$K > 0$

$$|KG(j\omega_A)| = 1$$

$$|G(j\omega_A)| = 1/K$$

$$\frac{1}{\omega_A} \frac{\cancel{|(1-\omega_A^2) - 2j\omega_A|}}{\cancel{|(1-\omega_A^2) + 2j\omega_A|}} = \frac{1}{\omega_A} \qquad \omega_A = K$$

$$m_\varphi = \pi + \angle KG(j\omega_A) = \pi + \angle G(jK)$$

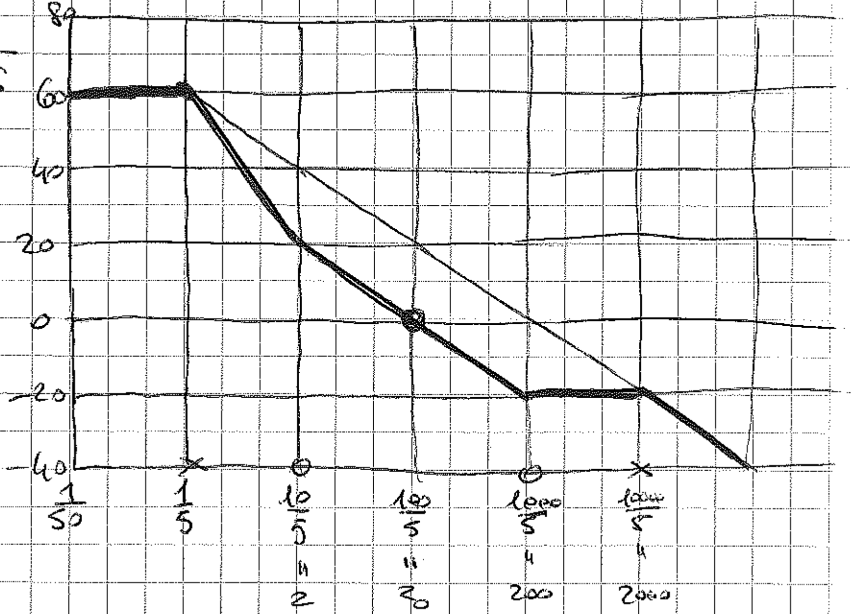
$$= \pi - 4\,\angle 1+jK = \pi - 4\,\mathrm{arctg}\,K$$

ES. 4

1. $K_G K_C = 1/\varepsilon = 1000$ $\qquad K_G = G(0) = 20$

$K_C = 1000/20 = 50$ $\qquad h_C = 0$

$\hat{W}(s) = K_C\, G(s) = \frac{1000}{1+5s}$



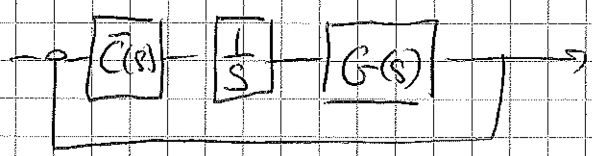
Controllore a sella

$$\bar{C}(s) = \frac{1+\frac{s}{2}}{1+5s}\,\frac{1+\frac{s}{200}}{1+\frac{s}{2000}}$$

Soluzione alternativa
Rete ritardatrice

$$\bar{C}(s) = \frac{1+5s}{1+50s}$$

2.
$$\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\frac{1}{s}G(s) = \frac{20}{5s^2+s} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$\begin{cases} 20X_0 = 1 \\ 20X_1 + Y_0 = 3 \\ 5Y_0 + Y_1 = 3 \\ 5Y_1 = 1 \end{cases}$$

$X_0 = 1/20$

$Y_1 = 1/5$

$5Y_0 + 1/5 = 3$ $\qquad Y_0 = \frac{3 - 1/5}{5} = \frac{14}{25}$

$X_1 = \frac{3 - \frac{14}{25}}{20} = \frac{61}{500}$