Compitino di Fondamenti di Automatica del 18/11/2011- **TEMA A**

Cognome e nome: ________________________________ Matr.: __________
Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1A. Si consideri il seguente sistema nonlineare

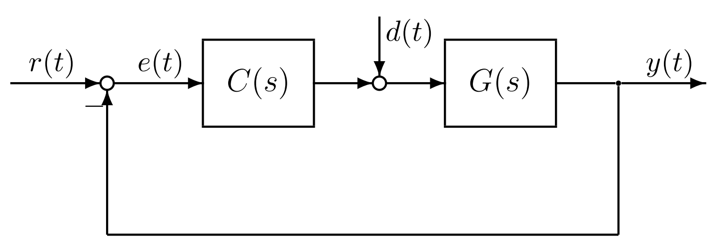
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - 2x_2 - u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

1. Supponiamo di alimentare il sistema con un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, dove $\bar{u}$ è una costante ≥ 0. Determinare le evoluzioni di equilibrio $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$, $y(t) = \bar{y}$ al variare di $\bar{u} \geq 0$.

2. Determinare la linearizzazione del sistema nonlineare attorno ai precedenti punti di equilibrio al variare di $\bar{u} \geq 0$ e le corrispondenti funzioni di trasferimento.

3. Determinare la BIBO stabilita' delle precedenti funzioni di trasferimento al variare di $\bar{u} \geq 0$.

Esercizio 2A. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+a}{s-b}$$

con $a, b > 0$.

1. Determinare le funzioni di trasferimento $T_{re}(s)$ e $T_{de}(s)$ del sistema in catena chiusa dagli ingressi $r(t)$ e $d(t)$ all'uscita $e(t)$. Studiare la stabilita' di $T_{re}(s)$ e $T_{de}(s)$ al variare di K.

2. Supponiamo che a, b abbiano valori nominali $a = 2,\ b = 1$. Determinare la funzione sensibilita' di T_{re} rispetto alle variazioni del parametro a. Sapendo che $\Delta a/a = 10\%$, determinare la variazione relativa del guadagno in continua di T_{re} al variare di K.

3. Supponiamo che a, b abbiano valori nominali $a = 2,\ b = 1$. Supponiamo ora che $r(t) = 2$ e che $d(t) = t$. Determinare l'andamento a regime di $e(t)$ al variare di K.

4. (**facoltativo**) Supponiamo che $K = 0$ e $d(t) = \sin(t)$. Determinare a, b sapendo che a regime $y(t) = -\cos(t)$.

Esercizio 3A. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente. Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+b}{(s+3)(s+6)}$$

dove $b > 0$. Si consideri il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$.

1. Determinare b sapendo che -2 è punto doppio del luogo.
2. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$ sapendo che il luogo contiene un unico punto doppio.
3. Determinare i modi del sistema in catena chiusa per il valore di K che corrisponde al punto doppio del luogo.

Esercizio 4A. Attraverso la tabella di Routh determinare il numero di radici instabili del polinomio

$$s^4 + 2s^3 - s + 1$$

Compitino di Fondamenti di Automatica del 18/11/2011- **TEMA B**

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1B. Si consideri il seguente sistema nonlineare

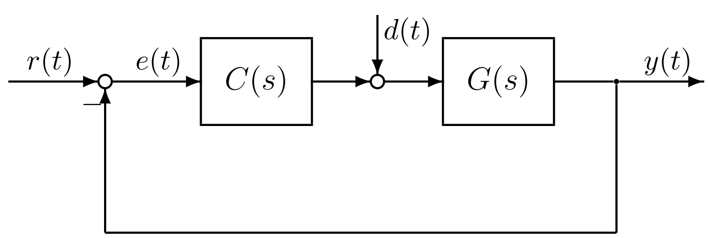
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - 2x_2 - 2u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

1. Supponiamo di alimentare il sistema con un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$, dove $\bar{u}$ è una costante ≥ 0. Determinare le evoluzioni di equilibrio $x_1(t) = \bar{x}_1$, $x_2(t) = \bar{x}_2$, $y(t) = \bar{y}$ al variare di $\bar{u} \geq 0$.

2. Determinare la linearizzazione del sistema nonlineare attorno ai precedenti punti di equilibrio al variare di $\bar{u} \geq 0$ e le corrispondenti funzioni di trasferimento.

3. Determinare la BIBO stabilita' delle precedenti funzioni di trasferimento al variare di $\bar{u} \geq 0$.

Esercizio 2B. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s-b}{s+a}$$

con $a, b > 0$.

1. Determinare le funzioni di trasferimento $T_{ry}(s)$ e $T_{dy}(s)$ del sistema in catena chiusa dagli ingressi $r(t)$ e $d(t)$ all'uscita $y(t)$. Studiare la stabilita di $T_{ry}(s)$ e $T_{dy}(s)$ al variare di K.

2. Supponiamo che a, b abbiano valori nominali $a = 1,\ b = 2$. Determinare la funzione sensibilita' di T_{ry} rispetto alle variazioni del parametro a. Sapendo che $\Delta a/a = 10\%$, determinare la variazione relativa del guadagno in continua di T_{ry} al variare di K.

3. Supponiamo che a, b abbiano valori nominali $a = 1,\ b = 2$. Supponiamo ora che $r(t) = 2$ e che $d(t) = t$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ al variare di K.

4. (**facoltativo**) Supponiamo che $K = 0$ e $d(t) = \sin(t)$. Determinare a, b sapendo che a regime $y(t) = \cos(t)$.

Esercizio 3B. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente. Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+a)}$$

dove $a > 0$. Si consideri il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$.

1. Determinare a sapendo che -3 è punto doppio del luogo.
2. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$ sapendo che il luogo contiene un unico punto doppio.
3. Determinare i modi del sistema in catena chiusa per il valore di K che corrisponde al punto doppio del luogo.

Esercizio 4B. Attraverso la tabella di Routh determinare il numero di radici instabili del polinomio

$$s^4 + s^3 - 2s + 2$$

$\boxed{ES\,1A}$

1. $0 = \bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2 - \bar{u}$

$0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ $\qquad \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$

$\bar{x}^2 - 2\bar{x} - \bar{u} = 0$ $\qquad \bar{x} = 1 \pm \sqrt{1+\bar{u}}$ $\qquad$ 2 equilibri

$\bar{y} = \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1 \pm \sqrt{1+\bar{u}}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2\bar{x} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$sX_1 = 2\bar{x}X_1 - 2X_2 - U$

$sX_2 = X_1 - X_2 \Rightarrow (s+1)X_2 = X_1$

$Y = X_2$

$s(s+1)X_2 = 2\bar{x}(s+1)X_2 - 2X_2 - U$

$\left(s(s+1) - 2\bar{x}(s+1) + 2\right) Y = -U$

$$\frac{Y}{U} = \frac{-1}{s^2 + (1-2\bar{x})s + 2 - 2\bar{x}}$$

3. BIBO $\iff \bar{x} < 1/2 \iff 1 \pm \sqrt{1+\bar{u}} < 1/2$

$\pm\sqrt{1+\bar{u}} < -1/2$

$\sqrt{1+\bar{u}} < -1/2$ MAI

$-\sqrt{1+\bar{u}} < -1/2 \iff \sqrt{1+\bar{u}} > 1/2 \iff 1+\bar{u} > 1/4$

$\iff \bar{u} > -\frac{3}{4} \iff$ sempre

$\boxed{\text{ES. 2A}}$

1) $T_{re}(S) = \frac{\cancel{CG}}{1+CG} = \frac{S(S-b)}{S(S-b)+k(S+a)}$

$T_{de}(S) = \frac{-G}{1+CG} = \frac{S(S+a)}{S(S-b)+k(S+a)}$

denominatore $\quad S^2+(k-b)S+ak \quad \boxed{k>b}$

2) $S_a^{T_{re}}(S) = \frac{a}{T_{re}} \frac{\partial T_{re}}{\partial a} = a \frac{\cancel{S(S-b)+k(S+a)}}{\cancel{S(S-b)}} \frac{-\cancel{S(S-b)}k}{[S(S-b)+k(S+a)]^{\cancel{2}}}$

$= \frac{-ak}{S(S-b)+k(S+a)} \underset{b=1}{\overset{a=2}{=}} \frac{-2k}{S(S-1)+k(S+2)}$

per $S=0$

$S_a^{T_{re}}(0) = -1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta T_{re}(0)}{T_{re}(0)} \simeq -10\% = \frac{\Delta a}{a}$

3) $E(S) = T_{re}(S)R(S) + T_{de}(S)D(S)$

$= \frac{S(S-b)}{S(S-b)+k(S+a)} \frac{2}{S} + \frac{\cancel{S}(S+a)}{S(S-b)+k(S+a)} \frac{1}{S^{\cancel{2}}}$

$e(t) = T_{re}(0)2 + \left.\frac{T_{de}(S)}{S}\right|_{S=0} = 0.2 + \frac{a}{ka} = \frac{1}{k}$

4) $y(t) = \sin(t+\frac{\pi}{2}) = |G(j)|\cos(t+\angle G(j))$

Quindi $\quad |G(j)| = 1 \quad \angle G(j) = -\frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow G(j) = -j$

$G(j) = \frac{j+a}{j-\cancel{a}} = -j \iff j+a = -j(j-b) = +1+jb \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

ES. 3A

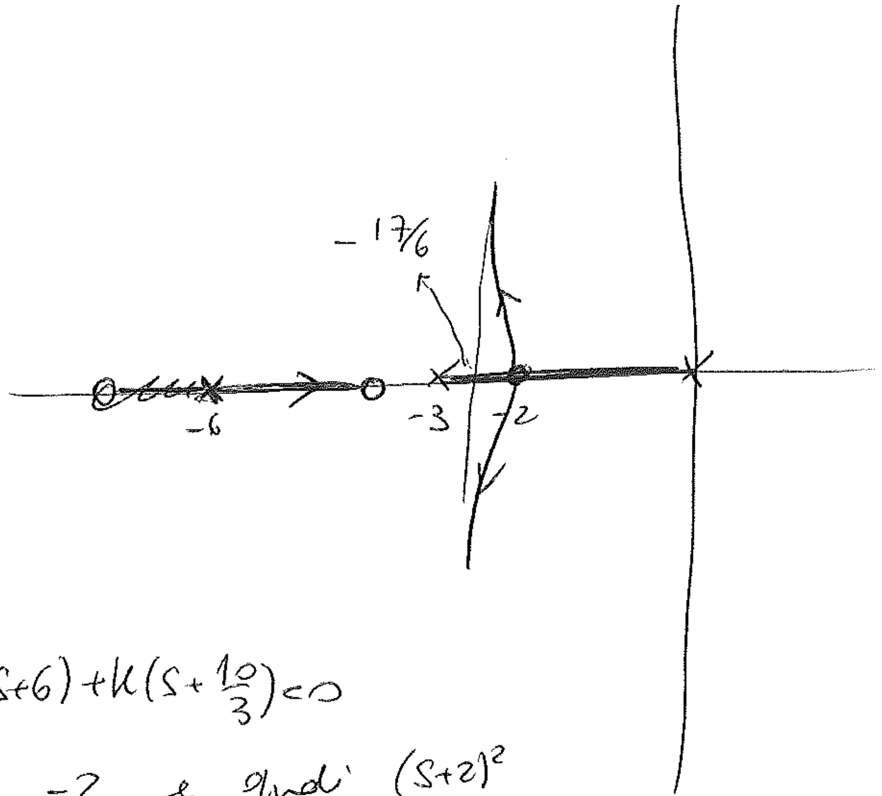
$$s(s+3)(s+6)+k(s+b)=0$$

1) Punti doppi
$$\begin{cases} s(s+3)(s+6)+k(s+b)=0 \\ 3s^2+18s+18+k=0 \end{cases} \quad s=-2 \quad \begin{cases} -2(1)(4)+k(b-2)=0 \\ 12-36+18+k=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8+6(b-2)=0 \\ k=6 \end{cases} \qquad b=\frac{20}{6}=10/3$$

2) Asintoti

$$\sigma_0=\frac{\sum \bar z_i-\sum z_i}{n-m}=\frac{-3-6+10/3}{2}=\frac{-17}{6}$$



3) Per $k=6$ $\quad s(s+3)(s+6)+k(s+\frac{10}{3})=0$

ha punto doppio in -2 e quindi $(s+2)^2$ è fattore del polinomio. Il rimanente fattore si ottiene operando la divisione

$$s(s+3)(s+6)+6(s+\tfrac{10}{3})=s^3+9s^2+24s+20$$

$s^3+9s^2+24s+20$	s^2+4s+4
s^3+4s^2+4s	$s+5$
$5s^2+20s+20$	

I modi sono
$$e^{-2t},\ te^{-2t},\ e^{-5t}$$

Altri punti doppi

$$\begin{cases} s(s+3)(s+6)+k(s+\frac{10}{3})=0 \\ 3s^2+18s+18+k=0 \end{cases} \qquad s^3+9s^2+\cancel{18s}-3s^3-18s^2-\cancel{18s}-10s^2-60s-60=0$$

$$2s^3+19s^2+60s+60=0$$

Se faccio divisione del precedente polinomio $s+2$ si ottiene $2s^2+15s+30$ che ha radici complesse non reali

$\boxed{\text{ES.4A}}$

$$
\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 2 & -1 & \\
2 & \frac{1}{2} & 1 & \\
1 & -5 & & \\
0 & 1 & &
\end{array}
$$

$$-\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$-2\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} =$$

2 variazioni

ES 1.B

$$0 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \qquad \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$$
$$0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 - 2\bar{x}_2 - 2\bar{u} \qquad \bar{x}^2 - 2\bar{x} - 2\bar{u} = 0$$
$$\bar{x} = 1 \pm \sqrt{1+2\bar{u}}$$

<u>Linearizzazione</u>

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \bar{x} & \bar{x}-2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \ \ 0]$$

$$\begin{cases} sX_1 = -X_1 + X_2 \\ sX_2 = \bar{x}X_1 + (\bar{x}-2)X_2 - 2U \end{cases} \qquad X_2 = (s+1)X_1$$

$$s(s+1)X_1 - \bar{x}X_1 - (\bar{x}-2)(s+1)X_1 = -2U \qquad Y = X_1$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{-2}{s(s+1) - (\bar{x}-2)(s+1) - \bar{x}} = \frac{-2}{s^2 + s(3-\bar{x}) + 2 - 2\bar{x}}$$

Stabilità $\iff \begin{cases} 3-\bar{x} > 0 \\ 2-2\bar{x} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{x} < 3 \\ \bar{x} < 1 \end{cases} \iff \bar{x} < 1$

CASO 1 $\iff 1+\sqrt{1+2\bar{u}} < 1$ MAI (sempre instabile)

CASO 2 $\iff 1-\sqrt{1+2\bar{u}} < 1 \iff -\sqrt{1+2\bar{u}} < 0$ sempre

$\boxed{\text{ES. 2B}}$

1) $$T_{ry}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{k(s-b)}{s(s+a)+k(s-b)}$$

$$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{s(s-b)}{s(s+a)+k(s-b)}$$

Denominatore $\quad s^2+(k+a)s - kb \quad \boxed{-a < k < 0}$

2) $$S_a^{T_{ry}}(s) = \frac{a}{T_{ry}}\frac{\partial T_{ry}}{\partial a} = a\,\frac{\cancel{s(s+a)+k(s-b)}}{\cancel{k(s-b)}}\;\frac{-\cancel{k(s-b)}s}{[s(s+a)+k(s-b)]^2}$$

$$= \frac{-as}{s(s+a)+k(s-b)} \underset{b=2}{\overset{a=1}{=}} \frac{-s}{s(s+1)+k(s-2)} \overset{s=0}{=} 0$$

$$\frac{\Delta T_{ry}(0)}{T_{ry}(0)} = S_a^{T_{ry}}(0)\,\frac{\Delta a}{a} = 0$$

Variazione relativa del guadagno a regime è 0

3) $$Y(s) = T_{ry}(s)R(s) + T_{dy}(s)D(s) =$$

$$= \frac{k(s-b)}{s(s+a)+k(s-b)}\,\frac{2}{s} + \frac{s(s-b)}{s(s+a)+k(s-b)}\,\frac{1}{s^2}$$

$$= T_{ry}(0) + \left.\frac{T_{dy}(s)}{s}\right|_{s=0} = 1 + \frac{1}{k}$$

4) $$y(t) = \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = |G(j)|\sin(t+\angle G(j))$$

$$|G(j)| = 1 \quad \angle G(j) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow G(j) = j$$

$$G(j) = \frac{j-b}{j+a} = j \qquad j-b = j(j+a) = -1+ja \Rightarrow a=b=1$$

$\boxed{\text{ES 3B}}$

1) $\begin{cases} S(S+2)(S+a) + k(S+1) = 0 \\ 3S^2 + 2(2+a)S + 2a + k = 0 \end{cases} \xrightarrow{s=-3} \begin{cases} -3(-1)(-3+a) + k(-3+1) = 0 \\ 3(-3)^2 + 2(2+a)(-3) + 2a + k = 0 \end{cases}$

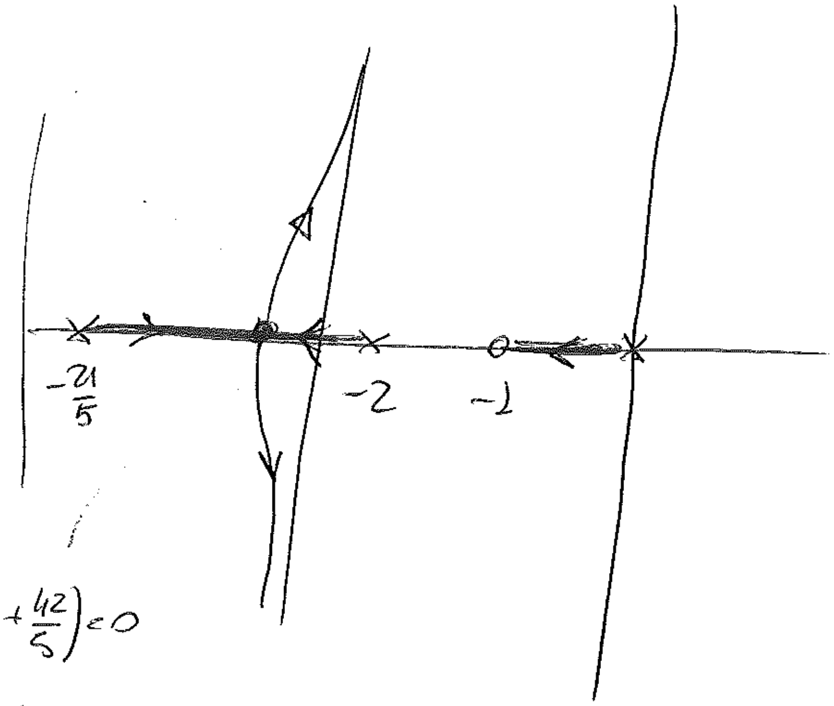
$\begin{cases} -9 + 3a - 2k = 0 \\ 15 - 4a + k = 0 \end{cases} \qquad a = 21/5 = 4{,}2 \qquad k = 9/5$

2) Asintoti

$\sigma_0 = \dfrac{-2 - \frac{21}{5} + 1}{2} = -\dfrac{26}{10} = -2.6$

Altri punti doppi

$\begin{cases} s(s+2)(s + \frac{21}{5}) + k(s+1) = 0 \\ 3s^2 + \frac{62}{5}s + \frac{42}{5} + k = 0 \end{cases}$



$s^3 + \frac{31}{5}s^2 + \frac{42}{5}s - (s+1)\left(3s^2 + \frac{62}{5}s + \frac{42}{5}\right) = 0$

$s^3 + \frac{31}{5}s^2 + \cancel{\frac{42}{5}s} - 3s^3 - \frac{62}{5}s^2 - \cancel{\frac{42}{5}s}$
$- 3s^2 - \frac{62}{5}s - \frac{42}{5} = 0$

$2s^3 + \frac{46}{5}s^2 + \frac{62}{5}s + \frac{42}{5} = 0$

Diviso $s+1$ dò $2s^2 + \frac{16}{5}s + \frac{14}{5}$

che ha radici non reali

$2s^3 + \frac{46}{5}s^2 + \frac{62}{5}s + \frac{42}{5} \;|\; s+3$
$2s^3 + 6s^2 \qquad | \; 2s^2 + \frac{16}{5}s + \frac{14}{5}$
$\frac{16}{5}s^2 + \frac{62}{5}s + \frac{42}{5}$
$\frac{16}{5}s^2 + \frac{48}{5}s$
$\frac{14}{5}s + \frac{42}{5}$

3) Due modi sono e^{-3t} e te^{-3t}

$s^3 + \frac{31}{5}s^2 + \frac{42}{5}s + \frac{9}{5}(s+1) = 0$

$e^{-\frac{1}{5}t}$

$s^3 + \frac{31}{5}s^2 + \frac{51}{5}s + \frac{9}{5} \;|\; s^2+6s+9$
$s^3 + 6s^2 + 9s \qquad | \; s + \frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}s^2 + \frac{6}{5}s + \frac{9}{5}$

$\boxed{\text{ES 4 B}}$

4	1	0	2
3	1	-2	
2	2	2	
1	-3		
0	2		

$$-\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix} = 2$$

$$-\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix} = -\frac{6}{2} = -3$$

2 variazioni $\Rightarrow$ 2 radici instabili