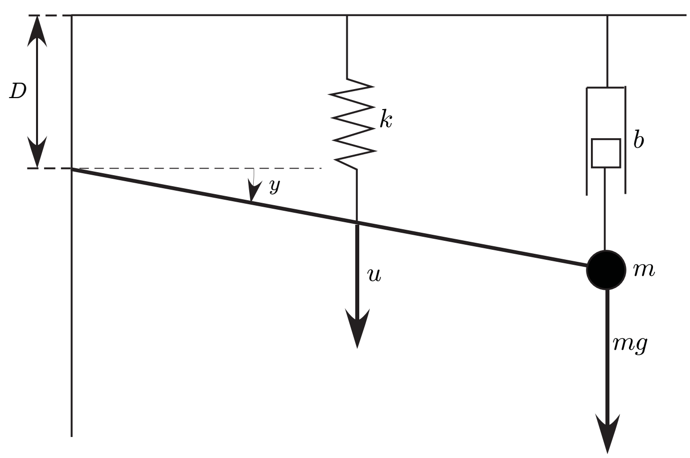
Compitino di FONDAMENTI DI CONTROLLI AUTOMATICI del 17/04/2014 - **TEMA A**

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1A. Si consideri il seguente sistema meccanico



Si tratta di pendolo di lunghezza l con massa m concentrata alla sua estremita' incernierato a distanza D dal soffitto e collegato al soffitto con una molla a distanza $l/2$ e con uno smorzatore a distanza l. Supponiamo che la molla sia ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L. Supponiamo che anche lo smorzatore sia ideale con costante di attrito b. Supponiamo che a distanza $l/2$ sia applicata una forza di ingresso u verticale e che l'uscita sia l'angolo y.

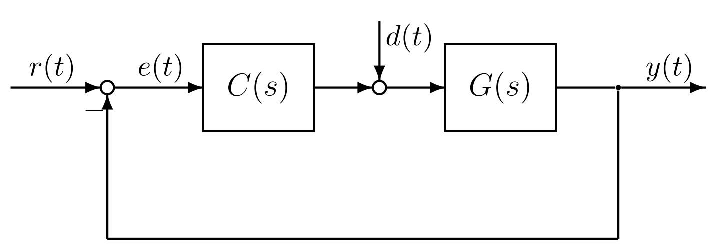
1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Supponiamo che $u(t) = 0$. Determinare D tale che $y(t) = 0$ sia evoluzione di equilibrio.
3. Supponendo che il valore di D sia quello determinato nel punto precedente, determinare la funzioni di trasferimento del sistema dall'ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ supponendo che $y(t), u(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2A. Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

alimentato con un ingresso a gradino unitario $u(t) = \delta^{(-1)}(t)$. Determinare l'uscita forzata.

Esercizio 3A. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

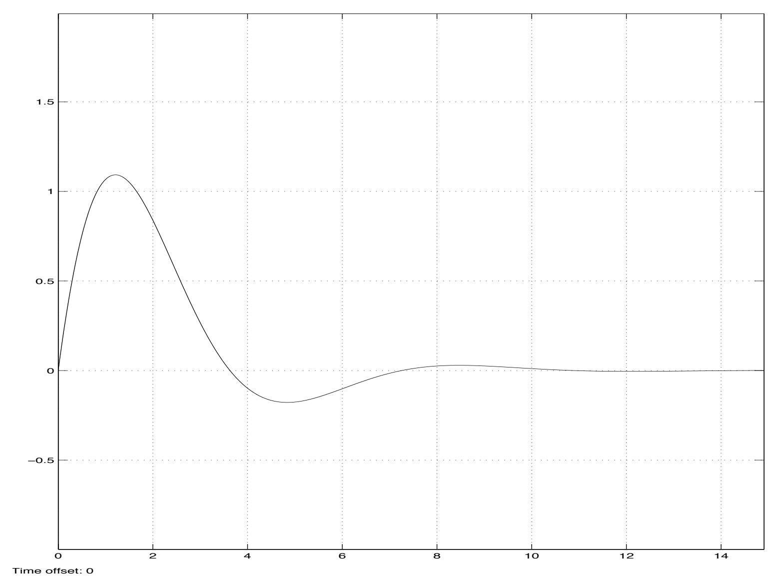


Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{s^2 + a}{s^2 + s + 1}$$

con $a > 0$.

1. Determinare le funzioni di trasferimento $T_{ry}(s)$ e $T_{dy}(s)$ del sistema in catena chiusa dagli ingressi $r(t)$ e $d(t)$ all'uscita $y(t)$. Studiare la stabilita' di $T_{ry}(s)$ e $T_{dy}(s)$ al variare di K.
2. Determinare la funzione sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.
3. Supponiamo che $a = 2$ e che $r(t) = 2$ e che $d(t) = \cos(t)$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$ al variare di K.
4. Supponiamo che $K = 0$ e che a un ingresso di disturbo $d(t) = \sin(2t)$ si osservi un'uscita $y(t)$ mostrata in figura. Determinare il valore di a.



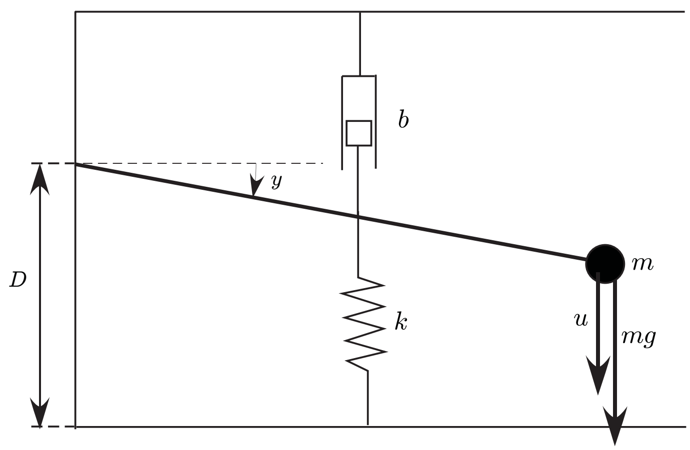
Esercizio 4A. Dare la definizione di sistema BIBO stabile e descrivere la caratterizzazione dei sistemi BIBO stabili in termini della caratteristiche della risposta impulsiva. Dare un esempio di sistema BIBO stabile e un esempio di sistema BIBO instabile.

Compitino di FONDAMENTI DI CONTROLLI AUTOMATICI del 17/04/2014 - **TEMA** B

Cognome e nome: ________________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1B. (8 punti) Si consideri il seguente sistema meccanico



Si tratta di pendolo di lunghezza l con massa m concentrata alla sua estremita' incernierato a distanza D dal pavimento e collegato al pavimento con una molla a distanza $l/2$ e al soffitto con uno smorzatore sempre a distanza $l/2$. Supponiamo che la molla sia ideale con costante di elasticita' k e lunghezza a riposo L. Supponiamo che anche lo smorzatore sia ideale con costante di attrito b. Supponiamo che all'estremita' del pendolo sia applicata una forza di ingresso u verticale e che l'uscita sia l'angolo y.

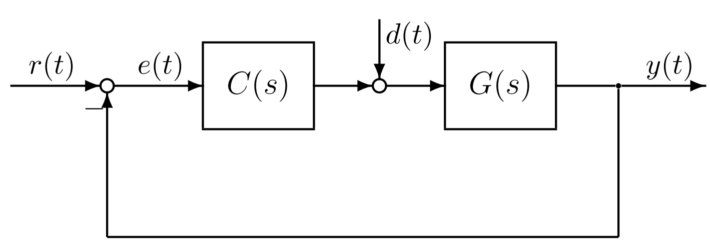
1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Supponiamo che $u(t) = 0$. Determinare D tale che $y(t) = 0$ sia evoluzione di equilibrio.
3. Determinare la funzioni di trasferimento del sistema dall' ingresso $u(t)$ all'uscita $y(t)$ supponendo che $y(t), u(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2B. Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s^2}$$

alimentato con un ingresso $u(t) = e^{-2t}$ per $t \geq 0$. Determinare l'uscita forzata.

Esercizio 3B. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s+1} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + s + a}$$

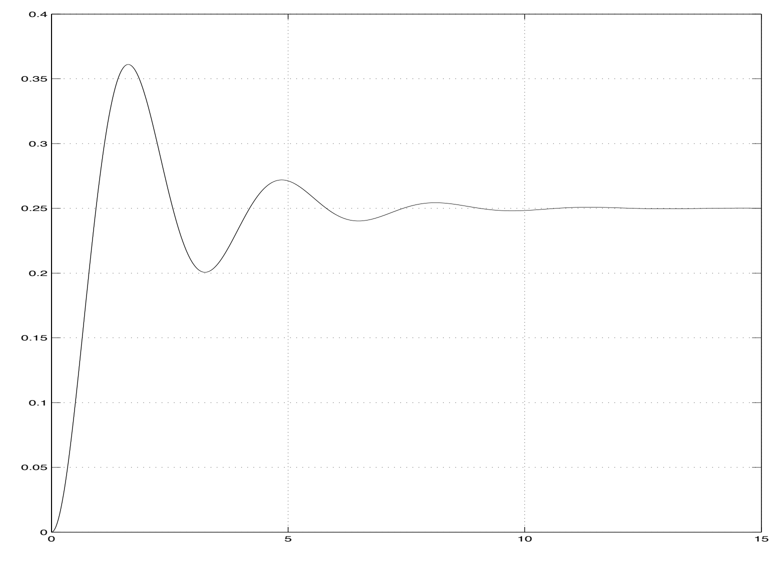
con $a > 0$.

1. Determinare le funzioni di trasferimento $T_{ry}(s)$ e $T_{dy}(s)$ del sistema in catena chiusa dagli ingressi $r(t)$ e $d(t)$ all'uscita $y(t)$. Studiare la stabilita' di $T_{re}(s)$ e $T_{de}(s)$ al variare di K.

2. Determinare la funzione sensibilita' di $T_{ry}(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a.

3. Supponiamo che $a = 1, K = 1$ e che $r(t) = \cos(t)$ e che $d(t) = 5$. Determinare l'andamento a regime di $y(t)$.

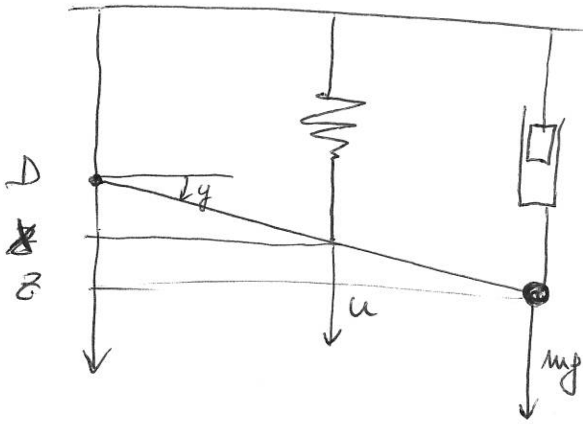
4. Supponiamo che $K = 0$ e che a un ingresso di disturbo a gradino unitario $d(t) = \delta^{(-1)}(t)$ si osservi un'uscita $y(t)$ mostrata in figura. Determinare il valore di a.



Esercizio 4B. Dare la definizione di poli dominanti e il loro significato nella descrizione del comportamento in transitorio di un sistema. Indicare i parametri con cui si descrivono le caratteristiche del transitorio.

ES 1A

Equazioni del moto $\qquad J$ = momento di inerzia $= ml^2$



$$-J\ddot{y} - k(x-D-L)\frac{l}{2}\cos y - b(\dot{z}-\dot{D})l\cos y$$

$$+ mgl\cos y + u\frac{l}{2}\cos y = 0$$

$$x = D + \frac{l}{2}\sin y$$

$$z = D + l\sin y$$

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}\left(D + l\sin y\right) = l\cos(y)\,\dot{y}$$

$$\boxed{-J\ddot{y} - k\left(\frac{l}{2}\sin y + D - L\right)\frac{l}{2}\cos y - bl\cos(y)\,l\cos(y)\,\dot{y} + mgl\cos y + u\frac{l}{2}\cos y = 0}$$

Se $u=0$ e $y=0 \Rightarrow \ddot{y}=0$, $\dot{y}=0$ l'equazione diventa

$$-k\left(\frac{l}{2}\cancel{\sin 0} + D - L\right)\frac{l}{2}\cos 0 + mgl\cos 0 = 0 \Rightarrow -k(D-L)\frac{l}{2} + mgl = 0$$

Linearizzazione: se y piccolo allora $\Rightarrow \boxed{D = \frac{2mg}{k} + L}$

$$\sin y \simeq y \qquad \cos y \simeq 1$$

$$-J\ddot{y} - \frac{kl}{2}y\frac{l}{2} - bl^2\dot{y} + \cancel{mgl} + u\frac{l}{2} - \cancel{k(D-L)\frac{l}{2}} = 0$$

$$\left(Js^2 + bl^2 s + kl^2/4\right)Y(s) = \frac{l}{2}U(s)$$

$$Y(s) = \frac{l/2}{Js^2 + bl^2 s + kl^2/4}\,U(s)$$

ES 2 A

$U(s) = \frac{1}{s}$ $\quad Y(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+1)s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$

Quindi troviamo A, B, C identificando i polinomi $\quad = \frac{As(s+1)+B(s+1)+Cs^2}{s^2(s+1)}$

$As(s+1)+B(s+1)+Cs^2 = 1$ $\qquad y(t) = A + Bt + Ce^{-t}$

$$\begin{array}{l} s^2 \\ s \\ 1 \end{array}\begin{cases} A+C=0 \\ A+B=0 \\ B=1 \end{cases} \qquad B=1 \quad A=-1 \quad C=1$$

$$y(t) = -1 + t + e^{-t}$$

ES 3 A

1) $T_{zy}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{k(s^2+a)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)}$

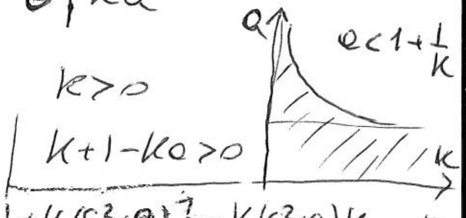
$T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{s(s^2+a)}{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)}$

denominatore $\quad s^3+(k+1)s^2+s+ka$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & k+1 & ka \\ 1 & \frac{k+1-ka}{k+1} & \\ 0 & ka & \end{array}$$

$k>0$

$k+1-ka>0$



2) $S_a^{T_{zy}} = \frac{a}{T_{zy}}\frac{\partial T_{zy}}{\partial a} = a\,\frac{\cancel{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)}}{k(s^2+a)}\,\frac{k[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]-k(s^2+a)k}{[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]^2}$

$= \frac{a}{\cancel{k}(s^2+a)}\,\frac{\cancel{k}\,s(s^2+s+1)+\cancel{k^2(s^2+a)}-\cancel{k^2(s^2+a)}}{s(s^2+s+1)+k(s^2+a)} = \frac{as(s^2+s+1)}{(s^2+a)[s(s^2+s+1)+k(s^2+a)]}$

Per $a=1$

$S_a^{T_{zy}} = \frac{s(s^2+s+1)}{(s^2+1)(s(s^2+s+1)+k(s^2+1))}$

3) $z \to y$ $\qquad y(t) \simeq T_{zy}(0)\,2 = 2$

$d \to y$ $\qquad y(t) \simeq |T_{dy}(j)| \cos(t + \angle T_{dy}(j))$

$T_{dy}(j) = \frac{j(-1+2)}{j(-\cancel{j}+j+\cancel{1})+k(-1+2)} = \frac{j}{k-1} \Rightarrow |T_{dy}(j)| = \frac{1}{|k-1|} = \frac{1}{1-k}$ perché stabile solo per $k<1$

$\angle T_{dy}(j) = -\frac{\pi}{2}$ perché $\frac{1}{k-1}<0$

$$y(t) \simeq \frac{1}{1-k}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

L'uscita a regime globale è data dalla somma

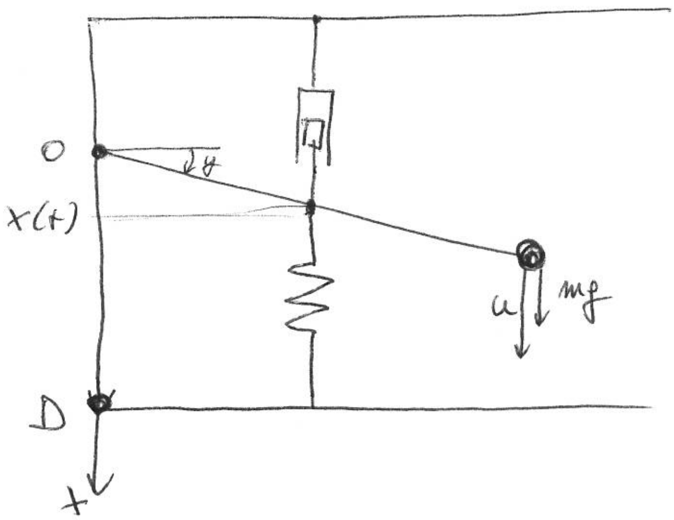
$$y(t) \simeq 2 + \frac{1}{1-k}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$$

4) Si noti che $y(t) \simeq 0$ il che vuol dire che

$$|G(2j)| = 0 \qquad G(2j) = \frac{-4+a}{(2j)^2+2j+1} = 0 \iff \boxed{a=4}$$

ES 1 B

Equazioni del moto $\qquad J = \text{momento di inerzia} = m l^2$



$$-J\ddot{y} - k(x - D + L)\frac{l}{2}\cos y$$
$$- b(\dot{x})\frac{l}{2}\cos y + mgl\cos y + ul\cos y = 0$$

$$x = \frac{l}{2}\sin y$$
$$\dot{x} = \frac{l}{2}\cos y\ \dot{y}$$

$$-J\ddot{y} - k\left(\frac{l}{2}\sin y - D + L\right)\frac{l}{2}\cos y - b\frac{l}{2}\cos y\ \dot{y}\ \frac{l}{2}\cos y + mgl\cos y + ul\cos y = 0$$

Se $y(t) = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \quad \ddot{y} = 0$

$$-k(-D+L)\frac{l}{2} + mgl = 0 \Rightarrow k(L-D) = 2mg \Rightarrow L - D = \frac{2mg}{k}$$

$$\boxed{D = L - \frac{2mg}{k}}$$

Linearizzazione: se y piccolo allora $\sin y \simeq y$, $\cos y \simeq 1$

$$-J\ddot{y} - k\frac{l^2}{4}y - \cancel{k(L-D)\frac{l}{2}} - b\frac{l^2}{4}\dot{y} + \cancel{mgl} + ul = 0$$

$$\left(Js^2 + \frac{bl^2}{4}s + \frac{kl^2}{4}\right)Y(s) = l\,U(s)$$

$$Y(s) = \frac{l}{Js^2 + \frac{bl^2}{4}s + \frac{k l^2}{4}}\,U(s)$$

$\boxed{\text{ES 2B}}$

$$U(s) = \frac{1}{s+2} \qquad Y(s) = W(s)\frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+2)s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$$

$$= \frac{As(s+2) + B(s+2) + Cs^2}{s^2(s+2)} = \frac{1}{(s+2)s^2}$$

Quindi

$$As(s+2) + B(s+2) + Cs^2 = 1$$

$$\begin{array}{l} s^2 \\ s \\ 1 \end{array} \begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B = 0 \\ 2B = 1 \end{cases} \qquad B = 1/2 \quad A = -\frac{1}{4} \quad C = \frac{1}{4}$$

$$g(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t}$$

$\boxed{\text{ES 3B}}$

1) $T_{ry}(s) = \dfrac{CG}{1+CG} = \dfrac{k}{(s+1)(s^2+s+a)+k}$

$T_{dy}(s) = \dfrac{G}{1+CG} = \dfrac{s+1}{(s+1)(s^2+s+a)+k}$

denominatore $s^3+2s^2+(a+1)s+k+a$

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & a+1 \\ 2 & 2 & k+a \\ 1 & \frac{2a+2-k-a}{2} = \frac{a+2-k}{2} & \\ 0 & k+a & \end{array}$$

stabilità per $-a<k<a+2$

$k+a>0$
$a+2-k>0$

2) $S_a^{T_{ry}} = \dfrac{a}{T_{ry}} \dfrac{\partial T_{ry}}{\partial a}$

$= a \dfrac{\cancel{(s+1)(s^2+s+a)+k}}{\cancel{k}} \dfrac{-\cancel{k}(s+1)}{[(s+1)(s^2+s+a)+k]^2} = \dfrac{-a(s+1)}{(s+1)(s^2+s+a)+k}$

3) Se $a=1$ $k=1$

$T_{ry}(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+s+1)+1}$ $T_{dy}(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)(s^2+s+1)+1}$

$r \to y$ $y(t) \simeq |T_{ry}(j)| \cos(t + \angle T_{ry}(j))$

$T_{ry}(j) = \dfrac{1}{(1+j)(\cancel{-1}+j\cancel{+1})+1} = \dfrac{1}{j-1+1} = \dfrac{1}{j} = -j$

$|T_{ry}(j)| = 1$ $\angle T_{ry}(j) = -\pi/2$

$y(t) \simeq \cos(t-\pi/2)$

$d \to y$ $y(t) \simeq T_{dy}(0)\, 5 = \dfrac{1}{2} 5 = \dfrac{5}{2}$

uscita a regime globale

$y(t) \simeq \dfrac{5}{2} + \cos\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

4) Dalla figura si nota che $y(\infty) = 0{,}25 = 1/4$
e quindi deduciamo che

$G(0) = 1/4$ $G(0) = \dfrac{1}{a}$ $\Rightarrow a = 4$