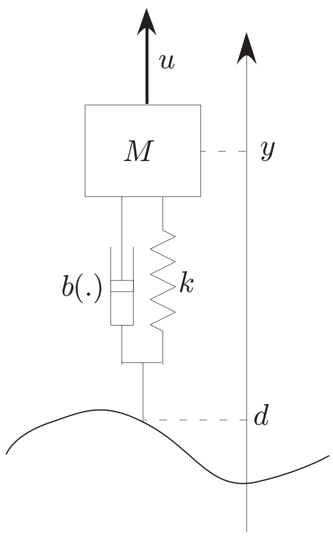
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- II Compitino e I appello di Fondamenti di Automatica del 21/06/2011

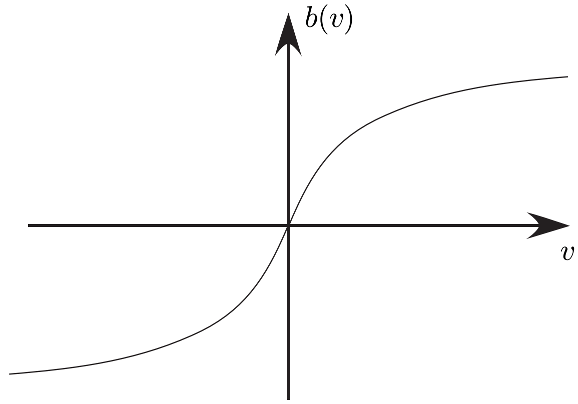
Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:	Secondo compitino (Esercizi 3,4,5) tempo: 2 ore	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4,5) tempo: 3 ore

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico





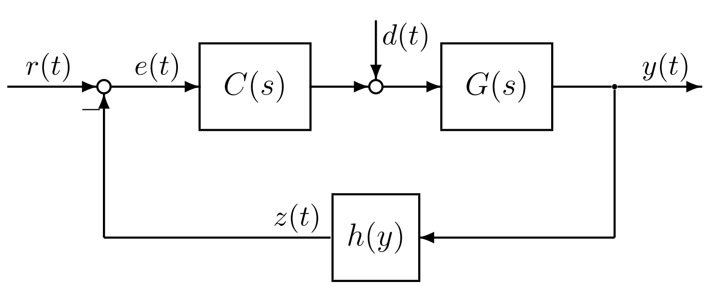
Si tratta di una sospensione. La molla é ideale con costante di elesticita' k, mentre lo smorzatore non è ideale e genera una forza di attrito pari a $F_a = -b(v)$, dove v e' la velocita' relativa delle due estremita' dello smorzatore e

$$b(v) = \text{arctg}(v)$$

dove arctg e' l'arcotangente. L'andamento di $b(v)$ è illustrato nella figura precedente. Alla massa M e' applicata una forza u e la forza di gravita' Mg verso il basso.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema.
2. Supponiamo che vengano applicati ingressi costanti $d(t) = \bar{d} = 0$ e $u(t) = \bar{u} = 0$. Determinare la corrispondente evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$.
3. Sia $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$. Supponendo che $u(t), d(t), \tilde{y}(t)$ siano piccoli, determinare le funzioni di trasferimento $W_1(s)$ tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$ e $W_2(s)$ tra l'ingresso $d(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t)$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che

$$C(s) = K\frac{1}{s+a} \qquad G(s) = \frac{s^2+1}{(s+2)^2}, \qquad h(y) = y$$

dove a e' un parametro reale.

1. Determinare a in modo tale che -1 sia punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si fissi a pari al valore trovato nel punto precedente. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino eventuali asintoti e punti doppi.
3. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene il modo e^{-t}. Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s+4}{s(s-1)}\ .$$

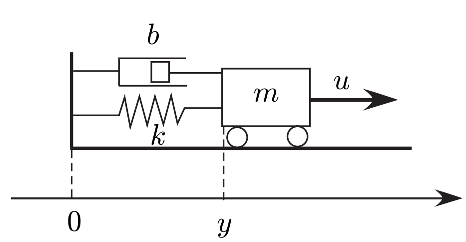
1. Supponendo che $C(s) = K$ e che $h(y) = y$, tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili in catena chiusa del sistema, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);
2. Supponendo che $C(s) = 1$ e che $3 < h(y)/y < 6$ e $h(0) = 0$, studiare tramite il criterio del cerchio la stabilitá del sistema in catena chiusa.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{5}{(s+20)^2} \qquad h(y) = y$$

1. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:
   (a) errore a regime in risposta al gradino circa uguale a 0.001;
   (b) margine di fase circa $m_\phi \simeq 90^0$;
   (c) pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 200$.
2. Attraverso la sintesi diretta si determini un compensatore $C(s)$ in modo tale che il sistema in catena chiusa abbia tutti i modi del tipo $t^i e^{-t}$. Si richiede di impostare il sistema lineare che da' i parametri del controllore senza determinare le soluzioni.

Esercizio 5 (Teorico) Dare la definizione di sistema dissipativo e descriverne il significato fisico.
(Facoltativo) Ricorrendo alla definizione, dimostrare che il sistema meccanico in figura e' dissipativo rispetto alla funzione di alimentazione $\dot{y}(t)u(t)$. Sia che la molla che lo smorzatore sono ideali.



$\boxed{ES\ 1}$

1) $-M\ddot{y} - b(\dot{y}-\dot{d}) - k(y-d) - Mg + u = 0$

2) $y(t) = \bar{y}$ $\quad \dot{y} = \ddot{y} = 0 \Rightarrow M0 - b(0-0) - k(\bar{y}-0) - Mg + 0 = 0$

$-k\bar{y} = Mg \qquad \bar{y} = -\frac{Mg}{k}$

3) $-M\ddot{\tilde{y}} - b(\dot{\tilde{y}}-\dot{d}) - k(\cancel{\bar{y}}+\tilde{y}-d) \cancel{-Mg} + u = 0$

$b(\dot{\tilde{y}}-\dot{d}) \simeq \frac{\partial b}{\partial v}\Big|_{v=0}(\dot{\tilde{y}}-\dot{d}) = \dot{\tilde{y}} - \dot{d}$

$-M\ddot{\tilde{y}} - (\dot{\tilde{y}}-\dot{d}) - k(\tilde{y}-d) + u = 0$ $\qquad Y(s) = \mathcal{L}(\tilde{y})$

$U(s) = \mathcal{L}(u) \quad D(s) = \mathcal{L}[d]$

$-Ms^2Y - (sY - sD) - k(Y-D) + U = 0$

$(Ms^2 + s + k)Y = (s + k)D + U$

$$Y = \underbrace{\frac{1}{Ms^2+s+k}}_{W_1(s)} U + \underbrace{\frac{s+k}{Ms^2+s+k}}_{W_2(s)} D$$

ES. 2

1) $\begin{cases} (s+a)(s+2)^2 + k(s^2+1) = 0 \\ (s+2)^2 + 2(s+2)(s+a) + 2ks = 0 \end{cases} \overset{s=-1}{\Rightarrow} \begin{cases} -1+a+2k=0 \\ 1-2+2a-2k=0 \end{cases}$

$-2+3a=0 \qquad a=\frac{2}{3}$

2) Punti doppi

$\begin{cases} \left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2)^2 + k(s^2+4) = 0 \\ (s+2)^2 + 2(s+2)\left(s+\frac{2}{3}\right) + 2ks = 0 \end{cases} \qquad k = -\frac{(s+2)\left[s+2+2s+\frac{4}{3}\right]}{2s}$

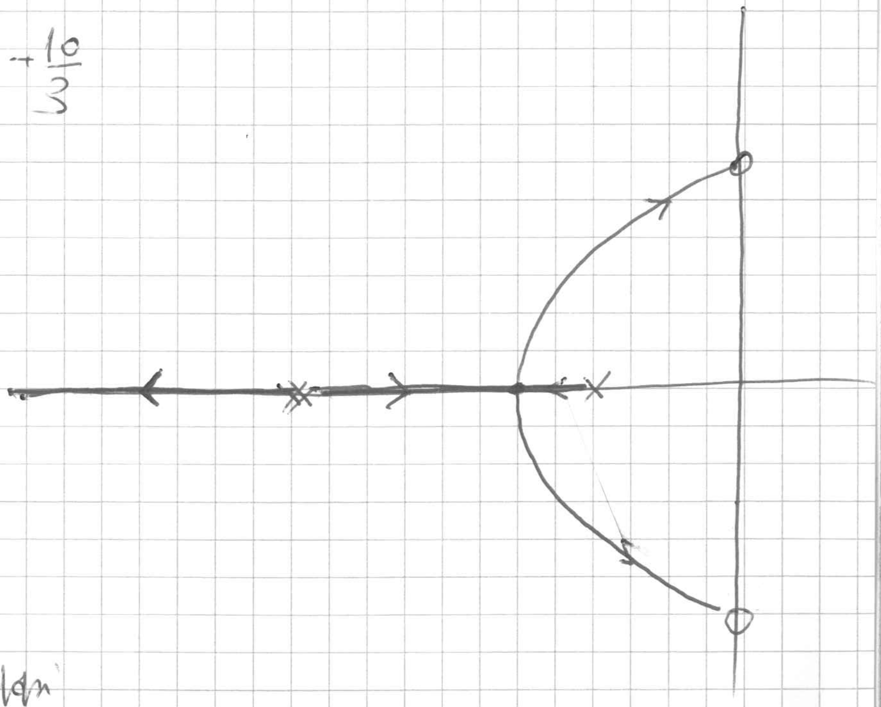
$\left(s+2/3\right)(s+2)^2 - \frac{\cancel{(s+2)}\left(3s+\frac{10}{3}\right)}{2s}(s^2+1) = 0$

$2s\left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2) - \left(3s+\frac{10}{3}\right)(s^2+1) = 0$

$2s^3 + \frac{16}{3}s^2 + \frac{8}{3}s - 3s^3 - \frac{10}{3}s^2 - 3s - \frac{10}{3} = 0$

$s^3 - \frac{2}{\cancel{3}}s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} = 0$

$$\begin{array}{l|l} s^3 - 2s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} & s+1 \\ \hline s^3 + s^2 & s^2 - 3s + \frac{10}{3} \\ \hline -3s^2 + \frac{1}{3}s + \frac{10}{3} & \\ -3s^2 - 3s & \\ \hline \frac{10}{3}s + \frac{10}{3} & \end{array}$$



Discriminante

$\Delta = 9 - \frac{40}{3} < 0$

Non ci sono altri punti doppi

3) Bisogna trovare k in modo tale che -1 sia radice. Si ottiene

$$\left(-1+\frac{2}{3}\right)(-1+2)^2+k(1+1)=0 \qquad k=\frac{1/3}{2}=\frac{1}{6}$$

Il polinomio per quel valore di k è

$$\left(s+\frac{2}{3}\right)(s+2)^2+\frac{1}{6}(s^2+1)=0$$

$$s^3+4s^2+4+\frac{2}{3}s^2+\frac{8}{3}s+\frac{8}{3}+\frac{1}{6}s^2+\frac{1}{6}=0$$

$$s^3+\frac{29}{6}s^2+\frac{20}{3}s+\frac{17}{3}=0$$

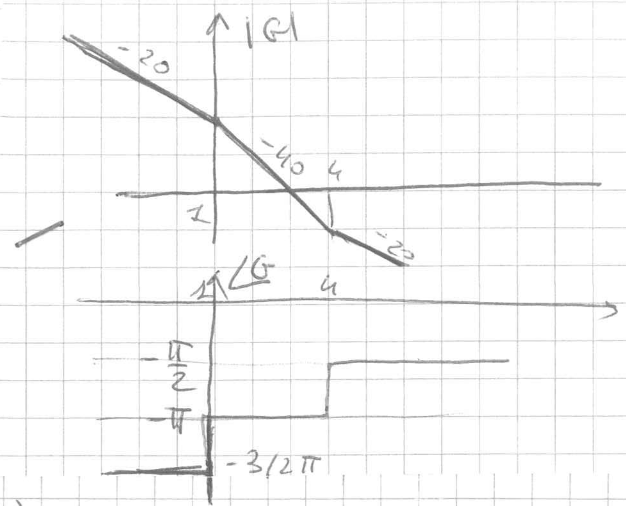
$$\begin{array}{l|l}
s^3+\frac{29}{6}s^2+\frac{20}{3}s+\frac{17}{6} & s^2+2s+1 \\ \cline{2-2}
s^3+2s^2+s & s+\frac{17}{6} \\ \cline{1-1}
\quad \frac{17}{6}s^2+\frac{17}{3}s+\frac{17}{6} &
\end{array}$$

I modi sono e^{-t}, te^{-t}, $e^{-\frac{17}{6}t}$

Es. 3

1) Bode di

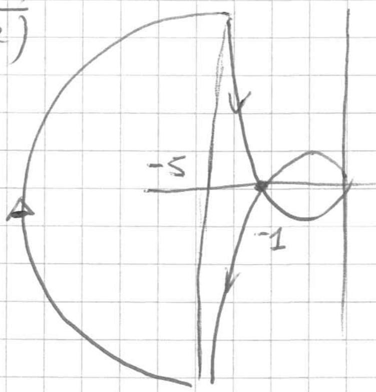
$$G(s) = \frac{s+4}{s(s-1)} = -4\,\frac{1+s/4}{s(1-s)}$$



Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{4+j\omega}{j\omega(j\omega-1)} = \frac{(4+j\omega)(j\omega+1)}{-j\omega(1+\omega^2)}$$

$$= \frac{(4-\omega^2)+j\omega 5}{-j\omega(1+\omega^2)}$$



$$\mathrm{Re}\, G(j\omega) = -\frac{5}{1+\omega^2}$$

$$\mathrm{Im}\, G(j\omega) = \frac{4-\omega^2}{\omega(1+\omega^2)}$$

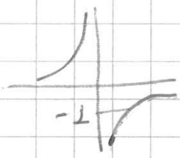
$\omega = 0^+$ $\quad$ $\mathrm{Re} = -5$ $\quad$ $\mathrm{Im} = +\infty$

$\omega = 2$ $\quad$ $\mathrm{Re} = -1$ $\quad$ $\mathrm{Im} = 0$

$P = 1$ $\qquad$ $Z = P - N = 1 - N$

$-\frac{1}{k} < -1$ $\quad$ $N = -1$ $\quad$ $Z = 2$ $\quad$ instabilità a ciclo chiuso $0 < K < 1$

$-1 < -\frac{1}{k} < 0$ $\quad$ $N = 1$ $\quad$ $Z = 0$ $\quad$ stabile $k > 1$



$-\frac{1}{k} > 0$ $\quad$ $N = 0$ $\quad$ $Z = 1$ $\quad$ instabilità a ciclo chiuso $k < 0$

2) $\dfrac{1 + 6G(s)}{1 + 3G(s)}$ Positivo reale ?

$$F(s) = \frac{1 + 6\,\frac{s+4}{s(s-1)}}{1 + 3\,\frac{s+4}{s(s-1)}} = \frac{s^2 - s + 6s + 24}{s^2 - s + 3s + 12} = \frac{s^2 + 5s + 24}{s^2 + 2s + 12}$$

F(S) ha poli a parte reale strettamente negativa

Resta da verificare che

$$\mathrm{Re}\left[F(j\omega)\right] \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{24-\omega^2+5j\omega}{12-\omega^2+2j\omega}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{(12-\omega^2-2j\omega)(24-\omega^2+5j\omega)}{(12-\omega^2)^2+4\omega^2}\right]$$

$$= \frac{(12-\omega^2)(24-\omega^2)+10\omega^2}{(12-\omega^2)^2+4\omega^2} \geq 0 \iff (12-\omega^2)(24-\omega^2)+10\omega^2 \geq 0$$

$\omega^2 = x$ $\qquad (x-12)(x-24)+10x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$x^2-36x+10x+12\cdot 24 \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$x^2-26x+12\cdot 24 \geq 0 \qquad \Delta = (26)^2-4\cdot 12\cdot 24 = 676-1152 < 0$

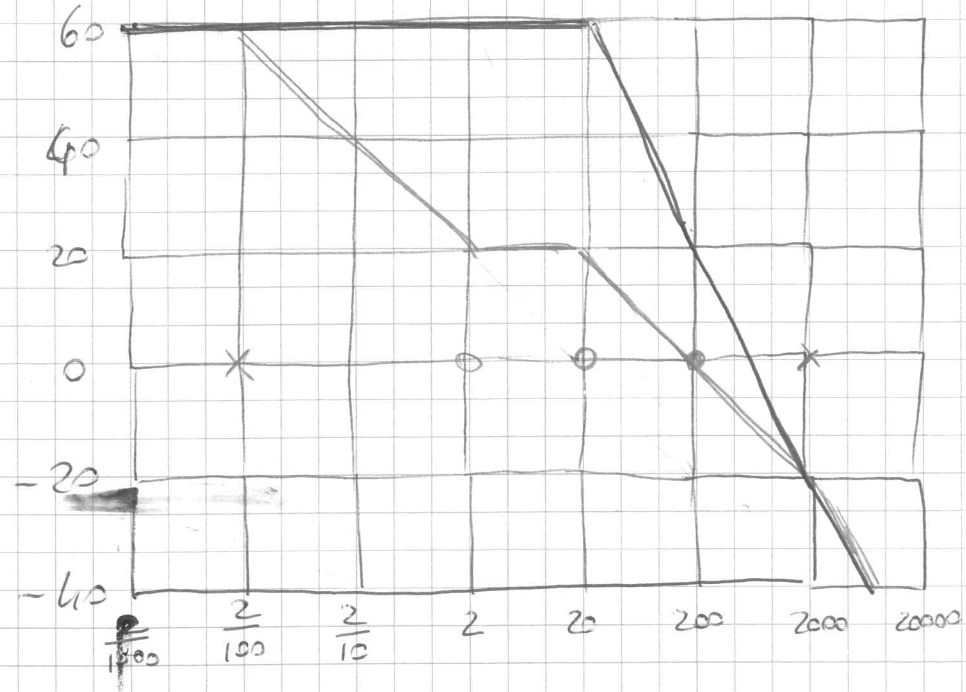
ok $\Rightarrow$ è stabile per il criterio del cerchio

ES. 4

1) $G(s) = \dfrac{s/400}{(1+s/20)^2}$

Per l'errore a regime abbiamo bisogno di un guadagno di Bode 1000

$C(s) = \dfrac{1000}{s/400}\bar{C}(s) = 200 \cdot 400\ \bar{C}(s) = 80000\ \bar{C}(s)$



$\bar{C}(s) = \dfrac{1+\frac{100}{2}s}{1+\frac{1}{2}s} \cdot \dfrac{1+\frac{s}{20}}{1+\frac{s}{2000}}$

2) Sintesi diretta $b(s) = s$ $a(s) = s^2 + 40s + 400$

$P(s) = (s+1)^3$
$= s^3 + 3s^2 + 3s + 1$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 5 & 40 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C(s) = \dfrac{x_1 s + x_0}{y_1 s + y_0}$

$\boxed{\text{ES 5}}$ Teorico, parte facoltativa

Equazioni del moto

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u$$

$$-m\ddot{y} - b\dot{y} - ky + u = 0$$

Stato $x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$ $\quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}}^{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$

Funzione energia = energia cinetica $\frac{1}{2}m\dot{y}^2$

+

energia potenziale $\frac{1}{2}ky^2$

$u = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky$

$$\int_0^T u\dot{y}\,dt = \int_0^T \dot{y}(m\ddot{y} + b\dot{y} + ky)\,dy$$

$$= m\int_0^T \dot{y}\ddot{y}\,dt + k\int_0^T \dot{y}y\,dt + b\int_0^T (\dot{y})^2\,dt$$

$$\geq m\int_0^T \dot{y}\ddot{y}\,dt + k\int_0^T \dot{y}y\,dt =$$

Primitiva di $\dot{y}\ddot{y}$ è $\frac{1}{2}(\dot{y})^2 \xrightarrow{\text{derivata}} \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\dot{y})^2 = \dot{y}\ddot{y}$

Primitiva di $y\dot{y}$ è $\frac{1}{2}(y)^2 \xrightarrow{\text{derivata}} \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}y^2 = y\dot{y}$

$$= \frac{m}{2}(\dot{y})^2\Big|_0^T + \frac{k}{2}y^2\Big|_0^T = S(x(T)) - S(x(0)) \text{ dove}$$

$$S(x) = \frac{m}{2}(\dot{y})^2 + \frac{k}{2}y^2$$