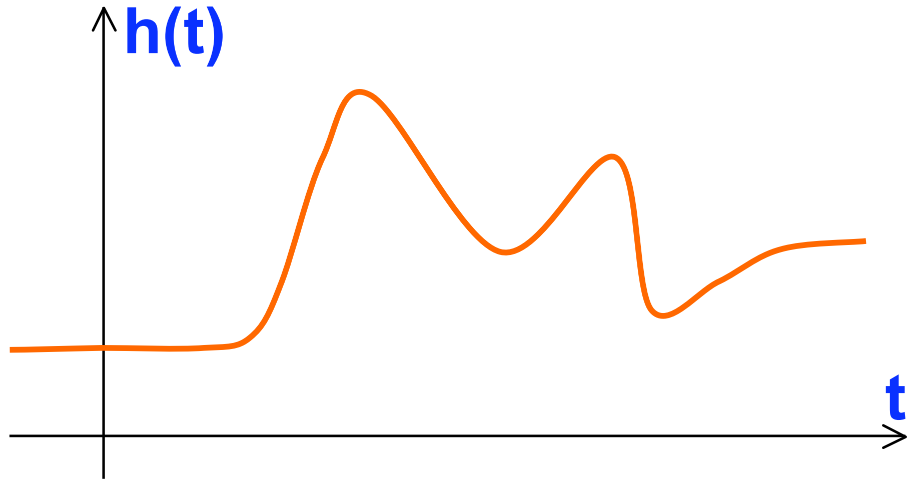
Nozione di segnale

- Segnale nel dominio del tempo h(t)



- Segnale nel dominio delle trasformate di Laplace H(s)

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$

Se h(t)=0 per t<0, allora

$$H(s) = \int_{0-}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$

Delta di Dirac $\delta(t)$ allora $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

Nozione di segnale

Matlab

Matlab permette di definire e visualizzate segnali

`»t=0:0.01:10;`	definisce un vettore di tempi nell'intervallo [0,10] con passo 0.01
`»y=sin(t);`	definisce un vettore contenente i valori del sin(t)
`»plot(t,y)`	traccia il segnale y(t)
`»y1=y+t;`	somma di segnali $y1(t) = y(t) + t$
`»y2=y-t;`	differenza di segnali $y2(t) = y(t) - t$
`»y3=y.*y1;`	prodotto puntuale di segnali $y3(t) = y(t)y1(t)$
`»y4=y./y1;`	rapporto di segnali $y4(t) = y(t)/y1(t)$

`»plot(t,y1,t,y2,t,y3)` traccia contemporaneamente i segnali y1(t), y2(t) e y3(t)

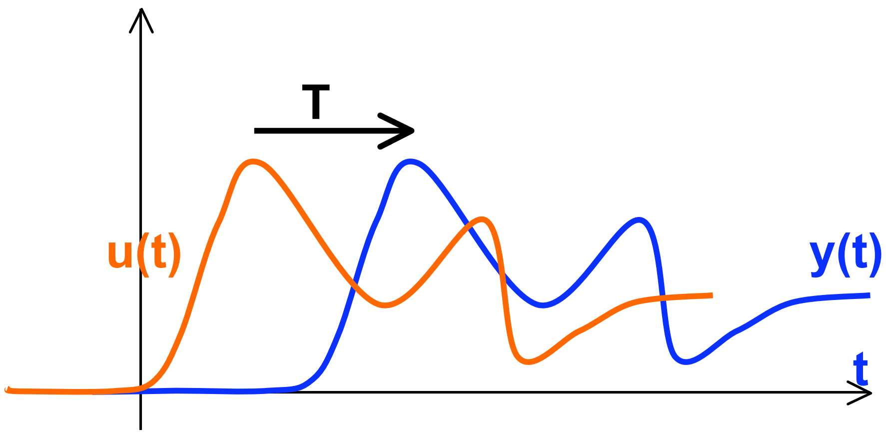
Proprieta' della trasformata di Laplace

Convoluzione	
$y(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$ $= (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$	$Y(s) = H(s)U(s)$
Linearita'	
$y(t) = ah(t) + bu(t)$	$Y(s) = aH(s) + bU(s)$

Proprieta' della trasformata di Laplace

Ritardo (delay)

$$y(t) = u(t - T)$$



$$Y(s) = e^{-sT} U(s)$$

Derivazione

$$y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$Y(s) = sU(s)$$

Antitrasformata di funzioni razionali strettamente proprie

Iniziamo con alcune trasformate di Laplace semplici

1. Funzione a gradino

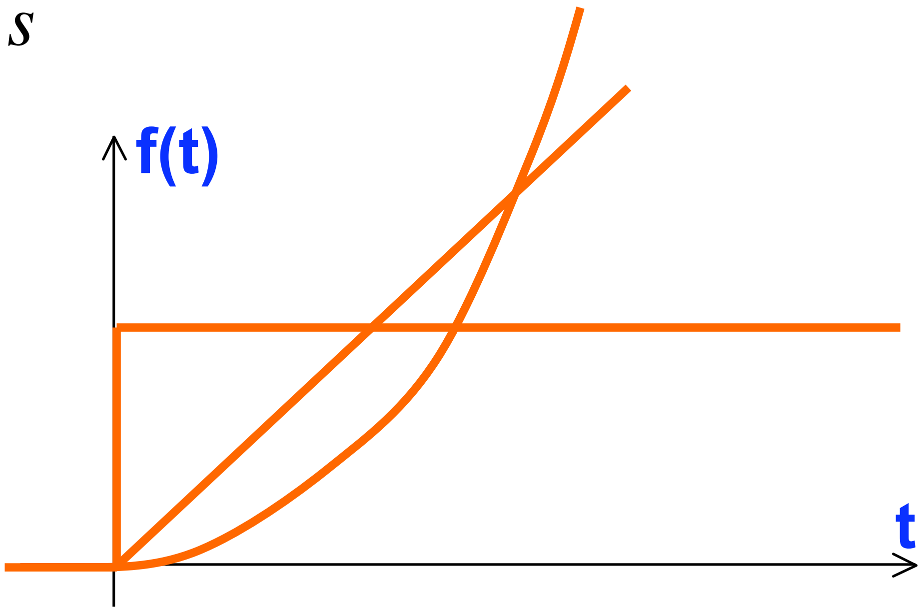
$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{se} \quad t \geq 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

2. Funzione a rampa

$$f(t) = t1(t) \qquad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

3. Funzione a rampa parabolica

$$f(t) = \frac{t^2}{2}1(t) \qquad F(s) = \frac{1}{s^3}$$

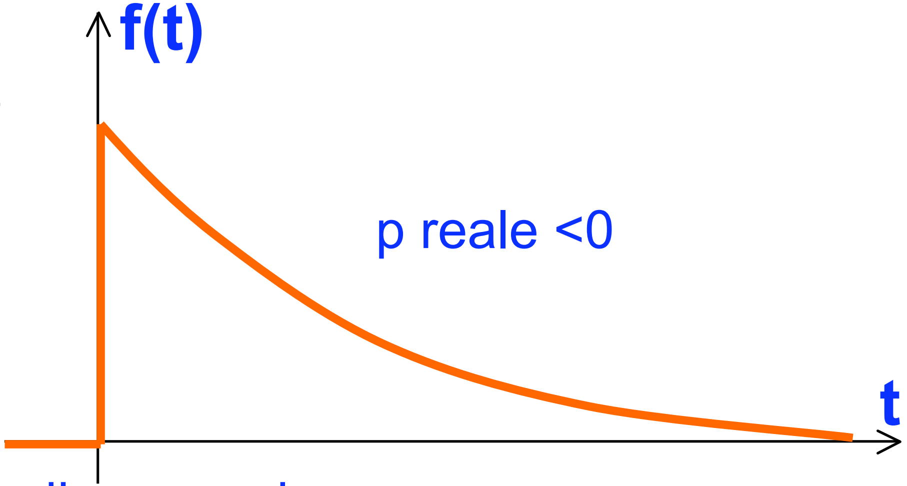


Proprieta' della trasformata di Laplace

Antitrasformata di funzioni razionali strettamente proprie

4. Funzione esponenziale complessa (p numero complesso)

$$f(t) = e^{pt} 1(t) \qquad F(s) = \frac{1}{s-p}$$



5. Funzione esponenziale complessa di ordine superiore

$$f(t) = \frac{1}{(i-1)!} t^{i-1} e^{pt} 1(t) \qquad F(s) = \frac{1}{(s-p)^i}$$

Proprieta' della trasformata di Laplace

Antitrasformata di funzioni razionali strettamente proprie

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = K\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$

m<n

Pole/zero form

IPOTESI: poli semplici

$$F(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

dove $C_i = (s-p_i)F(s)\Big|_{s=p_i}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p}\right\} = e^{pt}1(t)$$

dove $1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

$$f(t) = C_1 e^{p_1 t} + \cdots + C_n e^{p_n t} \quad \text{per } t \geq 0$$

Antitrasformata di funzioni razionali strettamente proprie

ESEMPIO: poli multipli

$$F(s) = \frac{b(s)}{(s-p)^n}$$

$$F(s) = \frac{C_1}{s-p} + \frac{C_2}{(s-p)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(s-p)^n}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-p)^i}\right\} = \frac{1}{(i-1)!} t^{i-1} e^{pt} 1(t)$$

$$f(t) = C_1 e^{pt} + C_2 t e^{pt} + \cdots + \frac{C_n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{pt} \quad \text{per } t \geq 0$$

Antitrasformata di funzioni razionali strettamente proprie

ESEMPI

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} = \frac{As + A + Bs}{s(s+1)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \qquad A = 1, B = -1$$

$$A = sF(s)\big|_{s=0} = 1$$

$$B = (s+1)F(s)\big|_{s=-1} = -1$$

$$f(t) = 1 - e^{-t}$$

Antitrasformata di funzioni razionali strettamente proprie

ESEMPI

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} = \frac{As^2 + 2As + A + Bs^2 + Bs + Cs}{s(s+1)^2}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad A = 1, B = -1, C = -1 \qquad A = sF(s)\big|_{s=0} = 1$$

$$f(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

Antitrasformata di funzioni razionali strettamente proprie

ESEMPI

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{A}{s - 2j} + \frac{B}{s + 2j} = \frac{As + 2Aj + Bs - 2Bj}{s^2 + 4}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2Aj - 2Bj = 1 \end{cases} \qquad A = \frac{1}{4j}, B = -\frac{1}{4j}$$

$$A = (s - 2j)F(s)\big|_{s=2j} = \frac{1}{4j}$$

$$B = (s + 2j)F(s)\big|_{s=-2j} = -\frac{1}{4j}$$

$$f(t) = \frac{1}{4j}e^{j2t} - \frac{1}{4j}e^{-j2t} = \frac{1}{2}\frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Matlab

Matlab rappresenta I polinomi come vettori

»a=[1 -1 2] rappresenta il polinomio $s^2 - s + 2$

»b=conv([1 1],a) fornisce il prodotto di polinomi $b(s) = (s+1)a(s)$

»roots(b) fornisce le radici o zeri del polinomio $b(s)$

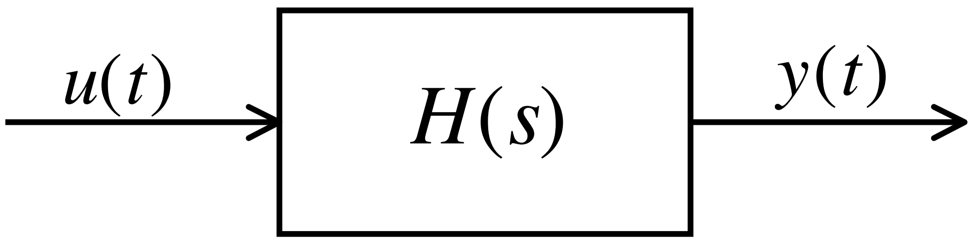
»poly([1 -1 2]) fornisce il polinomio con radici $1, -1, 2$

»[r,p]=residue(b,a) fornisce i residui e i poli di $\dfrac{b(s)}{a(s)}$

Nozione di sistema

Sistema come convoluzione con la risposta impulsiva

$y(t) = (h * u)(t)$	$Y(s) = H(s)U(s)$
Se $u(t) = \delta(t)$ delta di Dirac	Se $U(s) = 1$
allora $y(t) = h(t)$	allora $Y(s) = H(s)$
$h(t)$ risposta impulsiva	$H(s)$ funzione di trasferimento



Sistema come equazione differenziale

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

IPOTESI: u(t) causale cioe' u(t)=0 per t<0

Dato l'ingresso l'uscita si decompone in due parti: parte libera e parte forzata

$$Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s)$$

$Y_l(s)$ **risposta libera**

$Y_f(s)$ **risposta forzata**

Sistema come equazione differenziale: risposta libera

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = 0$$

$$Y_l(s) = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{c(s)}{a(s)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p}\right\} = e^{pt}1(t)$$

IPOTESI: poli semplici

modi

$$Y_l(s) = \frac{C_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

$$y_l(t) = C_1 e^{p_1 t} + \cdots + C_n e^{p_n t} \quad \text{per } t \geq 0$$

dove i coefficienti del numeratore $c_{n-1},\ldots,c_0$ dipendono dalle condizioni iniziali

$$y(0^-), y^{(1)}(0^-), \ldots, y^{(n-1)}(0^-)$$

Sistema come equazione differenziale: risposta forzata

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

$Y_f(s) = H(s)U(s)$ Risposta forzata $y_f = h * u$

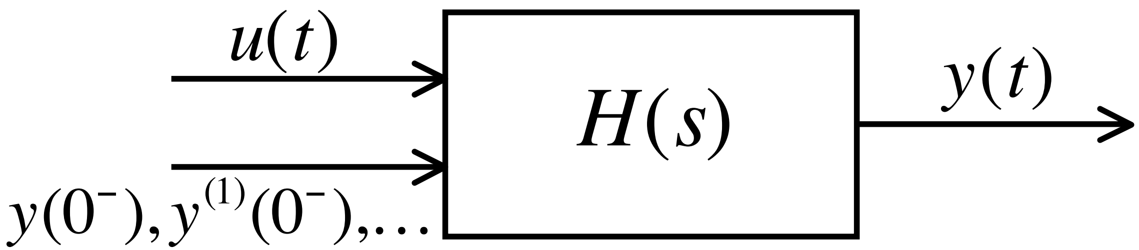
$$H(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$ Funzione di trasferimento

IPOTESI: poli semplici

$H(s) = \dfrac{B_1}{s - p_1} + \cdots + \dfrac{B_n}{s - p_n}$ $h(t) = B_1 e^{p_1 t} + \cdots + B_n e^{p_n t}$ per $t \geq 0$

Sia la risposta libera che la funzione di trasferimento sono funzioni razionali e quindi $y_l(t)$ e $h(t)$ saranno somme di esponenziali

Sistema come equazione differenziale



Sistema come equazione differenziale

ESEMPIO: integratore

$$\dot{y}(t) = u(t)$$

$$\dot{y}(t) = 0 \quad Y_l(s) = \frac{C_0}{s} \quad y_l(t) = C_0 1(t)$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{s}} \longrightarrow$$

$$Y_f(s) = H(s)U(s) \quad H(s) = \frac{1}{s} \quad h(t) = 1(t)$$

$$y_l(t) = y(0^-)1(t)$$

$$y_f(t) = (1 * u)(t) = \int_0^t u(\sigma)d\sigma$$

Sistema come equazione differenziale

ESEMPIO

$$\longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^2+1}} \longrightarrow$$

$$\ddot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + y(t) = 0 \qquad Y_l(s) = \frac{c_0 + c_1 s}{s^2+1} \qquad y_l(t) = C_1 e^{jt} + C_2 e^{-jt} = A\sin(t+\phi)$$

$$Y_f(s) = H(s)U(s) \qquad H(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad h(t) = \sin(t)$$

$h(t) = \sin(t) \qquad y_l(t) = A\sin(t+\phi)$ dove A, ϕ dipendono da $y(0^-), \dot{y}(0^-)$

Sistema in forma di stato

Sistema in forma di stato: Equazione differenziale del primo ordine con variabili ausiliarie dette variabili di stato $x_1(t),\ldots,x_n(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_{11}x_1(t)+\cdots+f_{1n}x_n(t)+g_1u(t)\\ &\vdots\\ \dot{x}_n(t) &= f_{n1}x_1(t)+\cdots+f_{nn}x_n(t)+g_nu(t)\end{aligned}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}f_{11} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{n1} & \cdots & f_{nn}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=h_1x_1(t)+\cdots+h_nx_n(t)+Ju(t)$$

$$G=\begin{bmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{bmatrix}$$

Forma matriciale compatta

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+Gu(t)$$

Sistema in forma di stato

Sistema in forma di stato: Equazione in forma matriciale

$$y(t) = h_1 x_1(t) + \cdots + h_n x_n(t) + Ju(t) \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{bmatrix}$$

Forma matriciale compatta

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Abbiamo due equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

Sistema in forma di stato

Soluzione del sistema in forma di stato

Lo stato si decompone in due parti: parte libera e parte forzata

$$Y_l(s) = (sI - F)^{-1} x(0)$$

$$Y_f(s) = (sI - F)^{-1} G U(s)$$

L'uscita si decompone in due parti: parte libera e parte forzata

$$Y_l(s) = H(sI - F)^{-1} x(0)$$

$$Y_f(s) = H(s) U(s) \qquad H(s) = H(sI - F)^{-1} G + J$$

Funzione di trasferimento

Sistema in forma di stato

ESEMPIO

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x - u \end{cases}$$

$$H(sI-F)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}}_{\text{aggiunta}} \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\text{determinante}} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+1} & \dfrac{-1}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$Y_l(s) = H(sI-F)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \frac{x_1(0)s - x_2(0)}{s^2+1} \qquad y_l(t) = A\sin(t+\phi)$$

$$H(s) = H(sI-F)^{-1}G + J = \frac{-1}{s^2+1} - 1 \qquad h(t) = -\sin(t) - \delta(t)$$

Relazioni tra le varie nozioni di sistema

equazione differenziale

$$\sum a_i y^{(i)}(t) = \sum b_i u^{(i)}(t)$$

convoluzione

$$y(t) = (h * u)(t)$$

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$H(s) = H(sI - F)^{-1}G + J$$

Realizzazione

sistema in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

Realizzazione

Partiamo da una funzione di trasferimento razionale e vogliamo trovare un sistema in forma di stato che "realizza" tale funzione di trasferimento

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} U(s)$$

dove

$$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$b(s) = b_m s^m + \cdots + b_0 \quad m<n$$

Scriviamo $Y(s) = b(s)\left[\frac{1}{a(s)} U(s)\right] = b(s)\bar{Y}(s)$ dove $\bar{Y}(s) = \frac{1}{a(s)} U(s)$

Quest'ultima relazione e' equivalente alla seguente equazione differenziale

$$\bar{y}^{(n)}(t) + a_{n-1}\bar{y}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\bar{y}(t) = u(t)$$

Nozione di sistema

Realizzazione

Introduciamo le variabili di stato

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \bar{y}^{(n-1)} & \dot{x}_1 &= \bar{y}^{(n)} = -a_{n-1}\bar{y}^{(n-1)} + \cdots - a_0\bar{y} + u = -a_{n-1}x_1 + \cdots - a_0 x_n + u \\
x_2 &= \bar{y}^{(n-2)} & \dot{x}_2 &= \bar{y}^{(n-1)} = x_1 \\
&\vdots & &\vdots \\
x_n &= \bar{y} & \dot{x}_n &= \bar{y}^{(1)} = x_{n-1}
\end{aligned}
$$

Traducendo questa equazione in forma matriciale otteniamo

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u
$$

Nozione di sistema

Realizzazione

Introducendo eventuali coefficienti nulli

$$b(s) = b_m s^m + \cdots + b_0 = b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0$$

$$Y(s) = b(s)\overline{Y}(s) = (b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0)\overline{Y}(s)$$

$$y = b_{n-1}\overline{y}^{(n-1)} + \cdots + b_0\overline{y} = b_{n-1}x_1 + \cdots + b_0 x_n$$

Traducendo questa equazione in forma matriciale otteniamo

$$y = \begin{bmatrix} b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Realizzazione

Riassumendo

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \xrightarrow{\text{realizzazione}} \begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

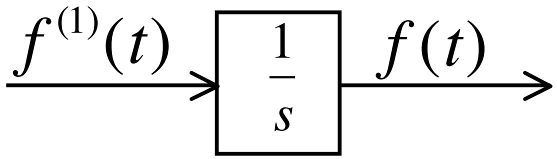
dove

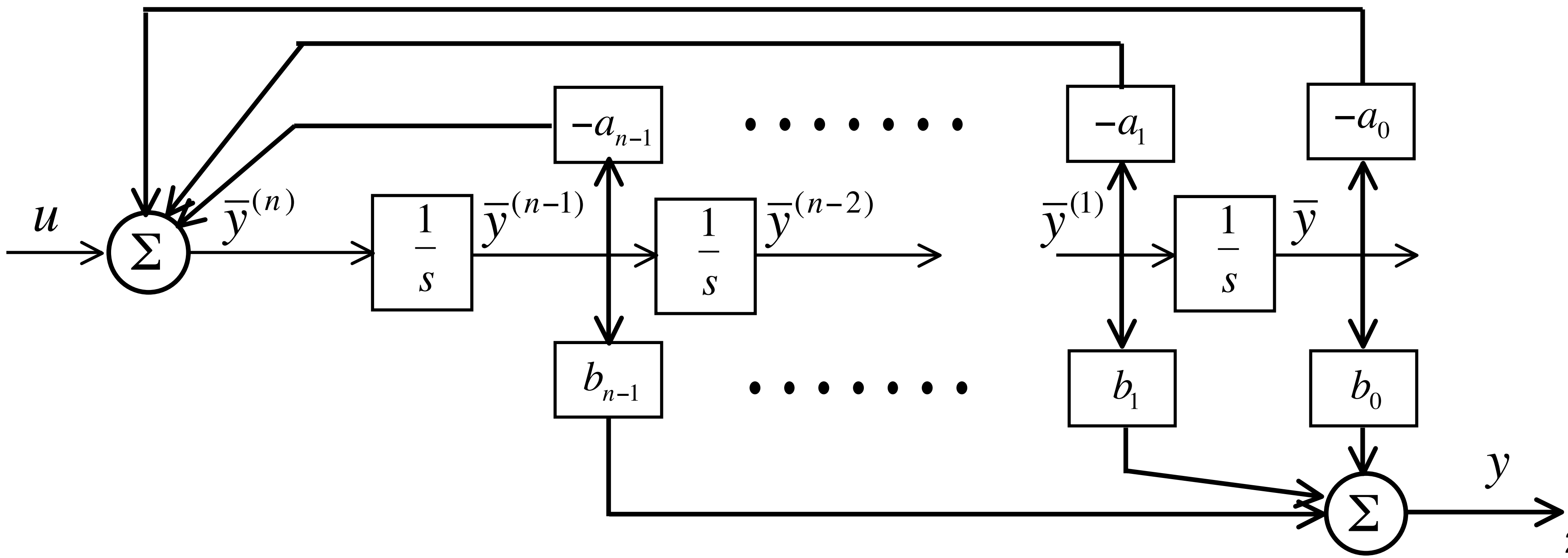
$$F = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \qquad J = 0$$

Realizzazione

Interpretazione della realizzazione attraverso lo schema a blocchi

$$\begin{cases} y(t) = b_{n-1}\bar{y}^{(n-1)}(t) + \cdots + b_0\bar{y}(t) \\ \bar{y}^{(n)}(t) + a_{n-1}\bar{y}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0\bar{y}(t) = u(t) \end{cases}$$





Realizzazione

ESEMPIO

$$\dddot{y}(t)+6\ddot{y}(t)+11\dot{y}(t)+6y(t)=-\ddot{u}(t)+6u(t)$$

$$F=\begin{bmatrix}-6 & -11 & -6\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad G=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\end{bmatrix}\qquad J=0$$

Nozione di sistema

Matlab

Matlab rappresenta i sistemi in tre modi

»sys=tf([1 1],[1 -1 2]) definisce un sistema con funzione di trasferimento

$$\frac{s+1}{s^2-s+2}$$

»sys=zpk([1],[-2 0],10) definisce un sistema con funzione di trasferimento

$$10\frac{s-1}{(s+2)s}$$

»sys=ss(F,G,H,J) definisce un sistema in forma di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases}$$

Matlab

Matlab permette di trasformare un sistema in una forma in un sistema in in'altra forma. I comandi sono

»tf2ss »ss2tf trasforma il sistema dato da una funzione di trasferimento in un sistema in forma di stato e viceversa

»tf2zp »zp2tf trasforma il sistema dato da una funzione di trasferimento in un sistema dato da una funzione di trasferimento fattorizzata (zero/pole form) e viceversa

»zp2ss »ss2zp trasforma il sistema dato da una funzione di trasferimento fattorizzata in un sistema in forma di stato e viceversa

Nozione di sistema

Matlab

Matlab permette di tracciare le risposte (forzate) di vari segnali di ingresso

»impulse(sys) traccia la risposta impulsiva del sistema

»step(sys) traccia la risposta del sistema all'ingresso a gradino $u(t) = 1(t)$

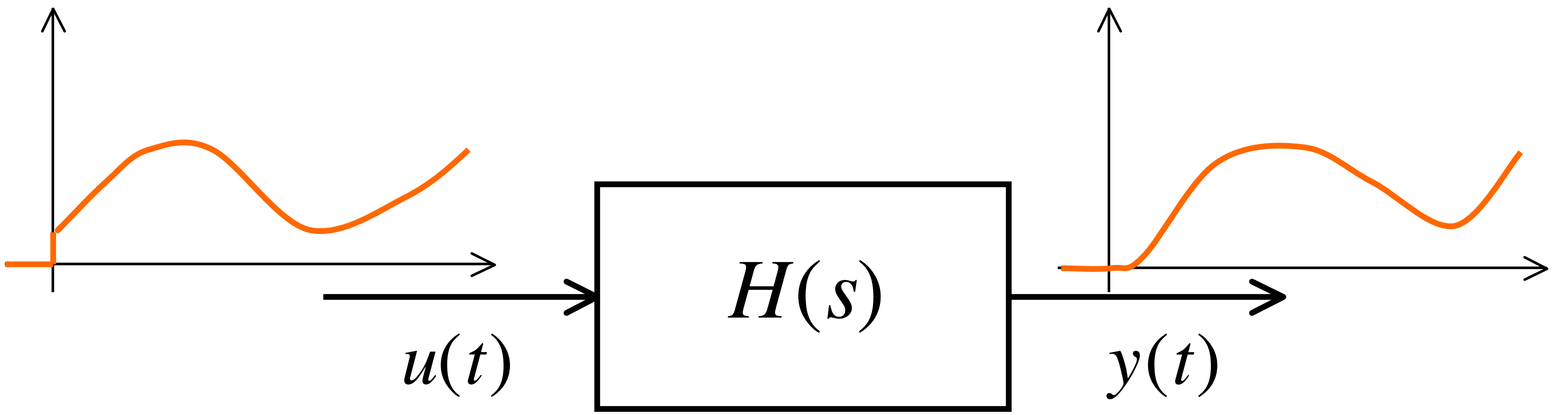
»initial(sys,x) traccia la risposta libera del sistema (funziona solo se il sistema e' in forma di stato)

»lsim(sys,u,t) traccia la risposta forzata del sistema per l'ingresso u(t). Il vettore t contiene gli istanti di tempo mentre il vettore u contiene i valori assunti dall'ingresso in tali istanti

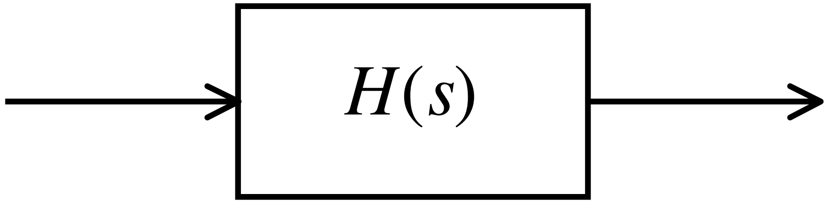
Stabilita' BIBO

La prima caratteristica che un sistema controllato deve possedere e' la stabilita'

Un sistema e' detto BIBO (bounded input/bounded output) stabile se ad ogni ingresso limitato risponde con un'uscita limitata



Stabilita' BIBO



Un sistema e' BIBO stabile se e solo se H(s) ha tutti poli con parte reale negativa

p e' polo di H(s) se H(p)=infinito
z e' uno zero di H(s) se H(z)=0

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Se non ci sono semplificazione tra numeratore e denominatore, allora i poli di H(s) coincidono con le radici di a(s)

Stabilita' di un sistema

Stabilita' BIBO

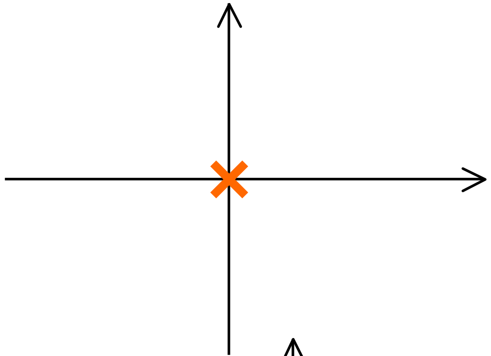
× polo

○ zero

ESEMPIO

$$H(s) = \frac{1}{s}$$

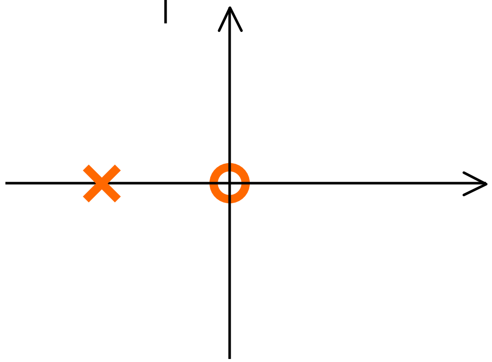
Non e' BIBO



ESEMPIO

$$H(s) = \frac{s}{s+1}$$

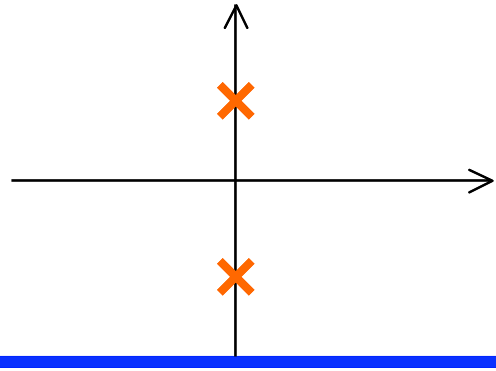
E' BIBO



ESEMPIO

$$H(s) = \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{(s+2j)(s-2j)}$$

Non e' BIBO

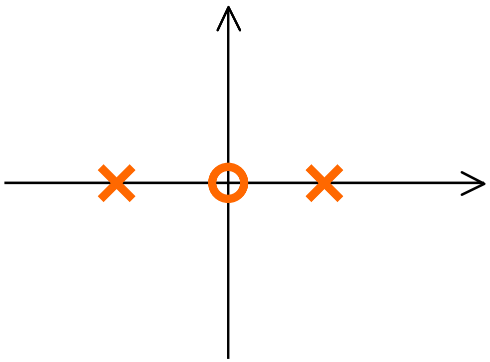


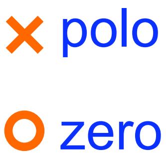
Stabilita' BIBO

ESEMPIO

$$H(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$$

Non e' BIBO





ESEMPIO

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{s-1}{(s+1+j)(s+1-j)}$$

E' BIBO