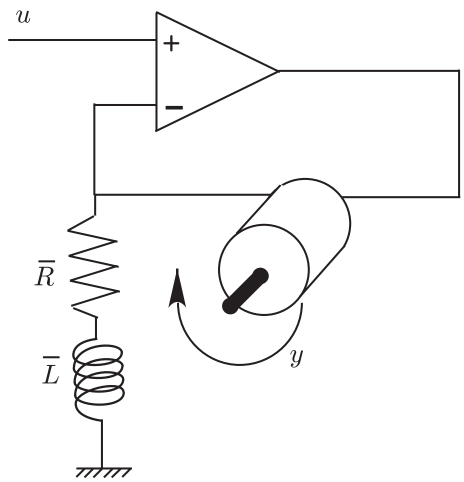
Corso di laurea in Ingegneria Biomedica e Elettronica- Appello di Fondamenti di Automatica del 27/2/2012

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

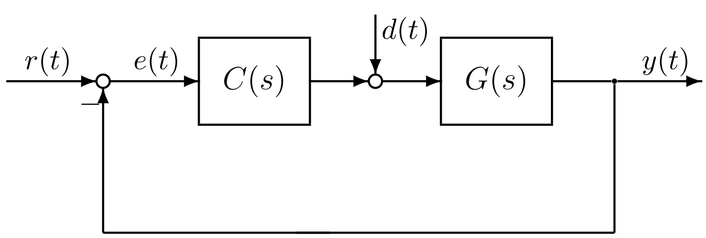
Esercizio 1. (7 punti) Si consideri il seguente sistema elettromeccanico



Si tratta di un motore in continua alimentato da un amplificatore operazionale. Siano J il momento di inerzia e b la costante di attrito del motore, R la resistenza e L l'induttanza del motore e H la costante elettromeccanica. Supponiamo inoltre che l'amplificatore operazionale abbia amplificazione finita A.

1. Determinare la funzione di trasferimento tra la tensione di ingresso u dell'amplificatore e la velocita' di rotazione y dell'asse del motore.
2. Determinare la stessa funzione di trasferimento nel caso in cui $A \to +\infty$.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri lo schema della figura seguente



dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2 - s + a)}\,.$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che 1 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$.

3. Determinare il valore di K tale che nel sistema in catena chiusa appare il modo e^t. In corrispondenza di tale valore di K determinare gli modi.

Esercizio 3. (7 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{s^2+1}{s(s-4)}$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.

2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ determinando eventuali asintoti e intersezioni con l'asse reale e con l'asse immaginario.

3. Tramite il criterio di Nyquist si determinino il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);

Esercizio 4. (4 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini il compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta alla rampa $0,01$;

2. margine di fase di circa 90^0;

3. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 10$.

Esercizio 5. (4 punti) Si consideri lo schema della figura precedente dove dove

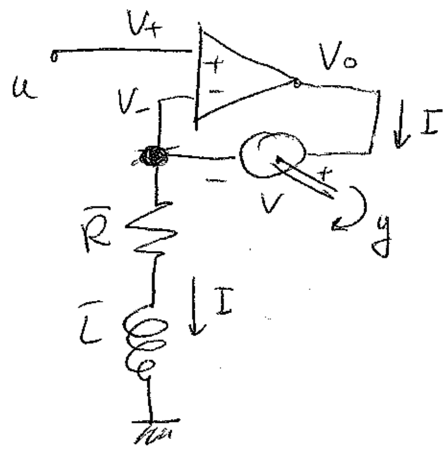
$$C(s) = \frac{K}{s}, \qquad W(s) = \frac{s^2-3s+1}{s^2+a}$$

e $K \geq 0$.

1. Si supponga inizialmente che il controllo sia spento (cioe' $K = 0$). Calcolare il valore di a sapendo che in corrispondenza ad un disturbo impulsivo $d(t) = \delta(t)$ si ha un'uscita a regime sinusoidale $y(t) \simeq A\sin(2t + \phi)$, per qualche $A, \phi \in \mathbb{R}$.

2. Supponiamo ora che a abbia il valore calcolato sopra e di accendere il controllo ($K \neq 0$). Determinare per quali valori di K il sistema retroazionato e' stabile. Supponiamo infine che $r(t) = t$ e $d(t) = \cos(2t)$. Calcolare l'andamento asintotico di $y(t)$ in funzione di K.

$\boxed{ES.1}$



$$V_o = A(V_+ - V_-)$$

$$V_+ = U$$

$$V_- = (\bar{R} + \bar{L}s)I$$

$$V = V_o - V_- = A(U - (\bar{R} + \bar{L}s)I) - (\bar{R} + \bar{L}s)I$$

$$= AU - (A+1)(\bar{R} + \bar{L}s)I$$

$$\begin{cases} (Ls+R)I = V - HY \\ (Js+b)Y = HI \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{Js+b}{H}Y \\ V = AU - (A+1)(\bar{R}+\bar{L}s)I \quad \Rightarrow \quad V = AU - \dfrac{(A+1)(\bar{R}+\bar{L}s)(Js+b)}{H}Y \end{cases}$$

$$(Ls+R)\frac{(Js+b)}{H}Y = AU - (A+1)(\bar{R}+\bar{L}s)\frac{(Js+b)}{H}Y - HY$$

$$\Big((Ls+R) + (A+1)(\bar{R}+\bar{L}s)\Big)\frac{(Js+b)}{H}Y + HY = AU$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{AH}{(Js+b)\big(Ls+R+(A+1)(\bar{L}s+\bar{R})\big) + H^2}$$

$$A \to \infty$$

$$\frac{Y}{U} \simeq \frac{\cancel{A}H}{(Js+b)\cancel{A}(\bar{L}s+\bar{R})} = \frac{H}{(Js+b)(\bar{L}s+\bar{R})}$$

$\boxed{\text{ES 2}}$

1) Dobbiamo tracciare il luogo di

$$(s+1)(s^2-s+a)+ks^2=0$$

Punti doppi

$$\begin{cases}(s+1)(s^2-s+a)+ks^2=0\\ (s^2-s+a)+(s+1)(2s-1)+2ks=0\end{cases}$$

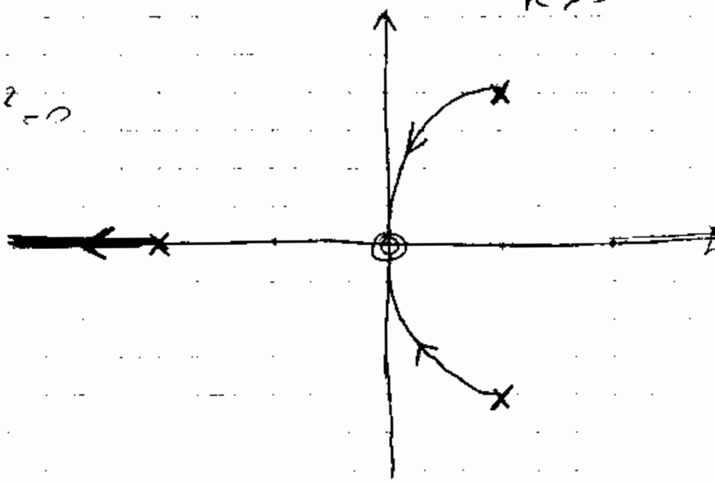
Sappiamo che $s=1$ è soluzione e quindi sostituiamo

$$\begin{cases}2(a)+k=0\\ a+2+2k=0\end{cases}\qquad \begin{cases}k=-2a\\ a-4a+2=0\end{cases}\qquad \begin{matrix}k=-4/3\\ a=2/3\end{matrix}$$

2) $(s+1)(s^2-s+2/3)+ks^2=0$

$$(s+1)\left(s-\tfrac{1}{2}-j\sqrt{\tfrac{5}{12}}\right)\left(s-\tfrac{1}{2}+j\sqrt{\tfrac{5}{12}}\right)+ks^2=0$$

k>0



Campo di stabilità

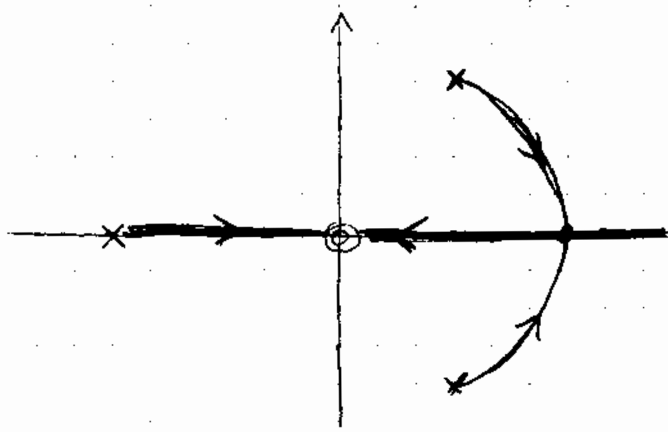
$$s^3+ks^2-\tfrac{1}{3}s+\tfrac{2}{3}=0$$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{ll}1 & -1/3\\ k & 2/3\\ -\frac{k+2}{3k} & \\ 2/3 & \end{array}$$

	-2		0	
+		+		+
−		−		+
−		+		−
+		+		+
2V		2V		2V

k<0



Ci sono sempre 2 radici instabili come confermato dai luoghi positivi e negativi.

Altri punti doppi

$$\begin{cases} (s+1)(s^2-s+2/3)+ks^2=0 \\ (s^2-s+2/3)+(s+1)(2s-1)+2ks=0 \end{cases}$$

$$K=-\frac{3s^2-1/3}{2s}$$

$$(s+1)(s^2-s+2/3)-\frac{3s^2-1/3}{2\cancel{s}}s^{\cancel{2}}=0$$

$$s^3-\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}s^3+\frac{1}{6}s=0$$

$$-\frac{1}{2}s^3-\frac{1}{6}s+\frac{2}{3}=0$$

$$\begin{array}{llll|l} -\frac{1}{2}s^3 & +0s^2 & -\frac{1}{6}s & +\frac{2}{3} & s-1 \\ \hline -\frac{1}{2}s^3 & +\frac{1}{2}s^2 & & & -\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{2}{3} \\ \hline & -\frac{1}{2}s^2 & -\frac{1}{6}s & +2/3 & \\ & -\frac{1}{2}s^2 & +\frac{1}{2}s & & \\ \hline & & -\frac{4}{6}s & +2/3 & \end{array}$$

$$\Delta=\frac{1}{4}-4\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}<0$$

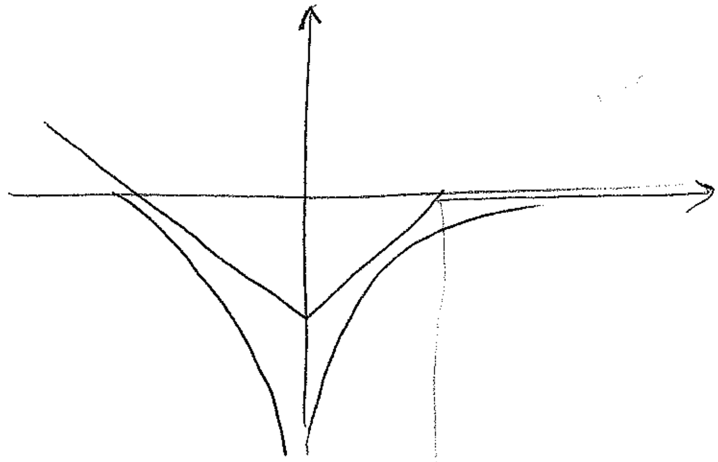
non ci sono altri punti doppi

$\boxed{\text{ES. 3}}$

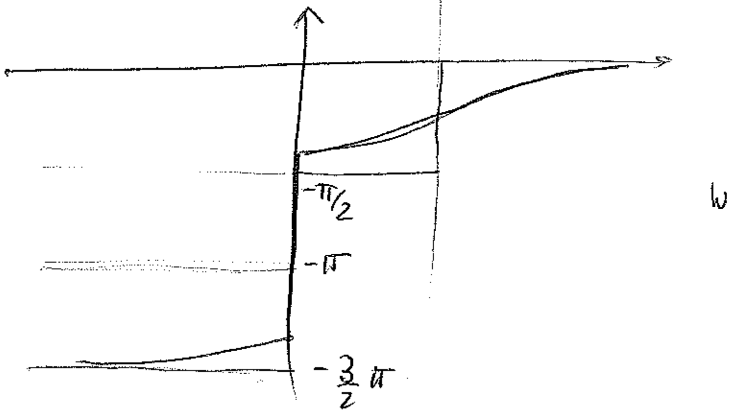
$$G(s) = -\frac{1}{4}\,\frac{s^2+1}{s(1-s/4)}$$

Spessamento

$\omega_1 = 1 \qquad \omega_2 = 4$



$$G(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{j\omega(j\omega-4)} \quad j\omega+4$$



$$= \frac{(1-\omega^2)(j\omega+4)}{j\omega(-\omega^2-16)}$$

$$= \frac{(\omega^2-1)(4+j\omega)}{j\omega(\omega^2+16)}$$

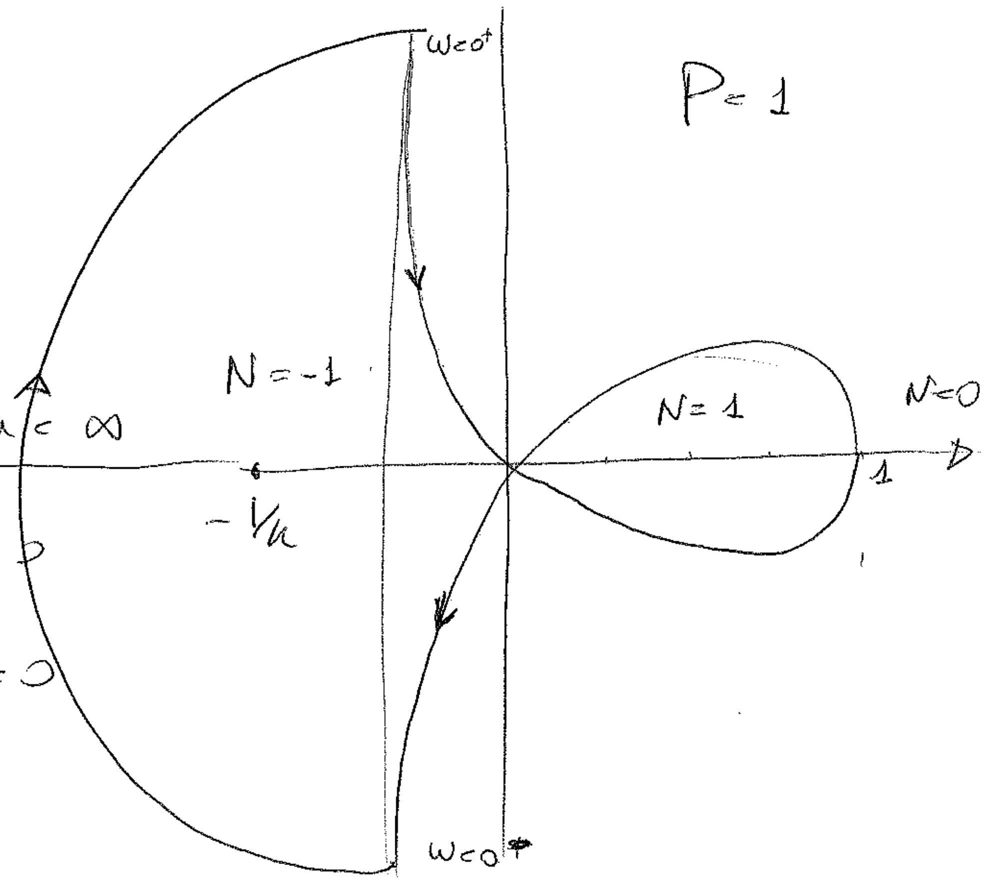
$$Re = \frac{\omega^2-1}{\omega^2+16}$$

$$Im = \frac{-4(\omega^2-1)}{\omega(\omega^2+16)}$$

$\omega = 0^+ \quad Re = -\frac{1}{16} \quad Im = \infty$

$\omega = 1 \quad Re = 0 \quad Im = 0$

$\omega = \infty \quad Re = 1 \quad Im = 0$



$-\frac{1}{k} < 0 \ (k>0) \qquad Z = 2$

$0 < -\frac{1}{k} < 1 \ (k < -1) \qquad Z = 0$

$-1/k > 1 \ (-1 < k < 0) \qquad Z = 1$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

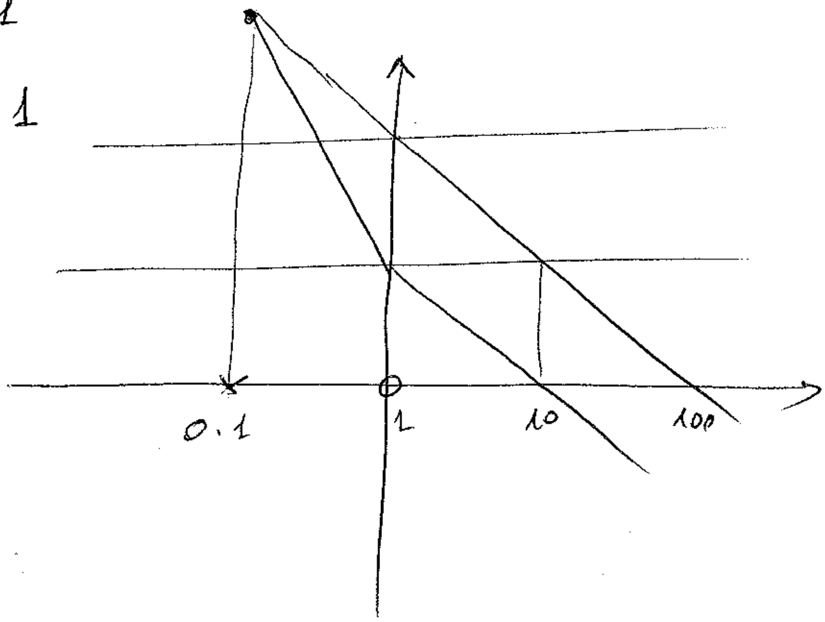
$$C(s) = \frac{k_c}{s^{a_c}} \bar{C}(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^0} \qquad h_G = 1$$

$$k_G = 1$$

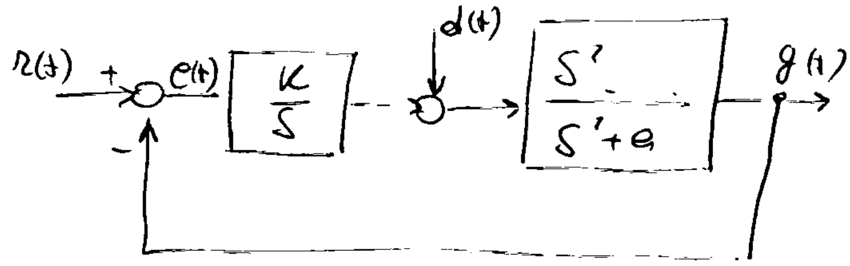
$$h_c = 1 - h_G = 0$$

$$k_c = \frac{100}{k_G} = 100$$

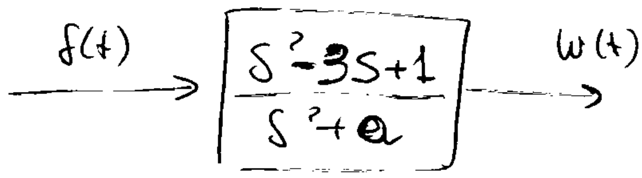


$$\bar{C}(s) = \frac{1+s}{1+10s}$$

ES ~~1~~ 5



1)



Se $d(t)=\delta(t)$, l'uscita è esattamente la risposta impulsiva del sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ e quindi

$$w(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\right]$$

Si noti che $w(t)$ contiene un modo sinusoidale di pulsazione $\omega=\sqrt{a}$ e quindi $a=\cancel{2}\,4$

2) Analisi di stabilità:

Il denominatore del sistema in catena chiusa è

$$s(s^2+4)+k(s^2-3s+1)=s^3+ks^2+(4-3k)s+k$$

Tabella di Routh

1	4-3k
k	k
3-3k	
k	

$0<k<1$

Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

$u(t) = t$
$d(t) = 0$

$$T_{ry}(s) = \frac{C(s)W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{k(s^2 3s+1)}{s(s^2+4)+k(s^2-3s+1)}$$

$$Y(s) = T_{ry}(s)\frac{1}{s^2}$$ Teorema valore finale

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{t} = \lim_{s\to 0^+} s^2 Y(s) = T_{ry}(0) = 1 \Rightarrow y(t) \simeq t$$

$u(t) = 0$
$d(t) = \cos 2t$

$$T_{de}(s) = \frac{W(s)}{1+C(s)W(s)} = \frac{s(s^2-3s+1)}{s(s^2+4)+k(s^2-3s+1)}$$

$$T_{dy}(2j) = \frac{2j\cancel{(-4-6j+1)}}{0+k\cancel{(-4-6j+1)}} = \frac{2j}{k} \qquad k \geq 0$$

$$y(t) \simeq |T_{dy}(2j)|\cos(2t+\angle T_{dy}(2j)) = \frac{2}{k}\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Complessivamente

$$y(t) \simeq t + \frac{2}{k}\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$$

che è un segnale illimitato per $\forall k$ e quindi non sarà mai compreso tra ± 10.