Sistemi e Modelli

Introduzione al corso, a.a. 2011-2012

Prof. Luca Schenato, Prof. Mauro Bisiacco

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Università degli Studi di Padova

5 Ottobre 2011

Informazioni Utili

- Corso con 2 canali:
  - Canale 1 (Matricole 0-4): Prof.ssa Gianna Toffolo e Prof. Claudio Cobelli
  - Canale 2 (Matricole 5-9): Prof. Luca Schenato e Prof. Mauro Bisiacco
- Svolgimento lezioni: 45min lezione +10min pausa+ 45min lezione
- Orario di ricevimento: appuntamento concordato tramite e-mail (Uffici: DEI-A, 3^o piano, lato destro uscendo dall'ascensore, tel. 049-827-7925 (Prof. Schenato), 049-827-7608 (Prof. Bisiacco)
- Sito web:
  http://automatica.dei.unipd.it/people/schenato/teaching/sistemi-e-modelli.html
- Comunicazioni: tramite forum del corso su **https://moodle.dei.unipd.it/**. È necessario iscriversi.
- Modalità esame: prova scritta in comune per entrambi i canali. Possibile partecipare a tutti gli appelli. È possibile registrare il voto in altri appelli. Prima parte dell'esame a risposta multipla con voto minimo (da confermare).

Testi

- Testi di riferimento:
  - Mauro Bisiacco, Simonetta Braghetto, *Teoria dei Sistemi Dinamici*, Progetto Leonardo, Esculapio, Bologna, 2010
  - Claudio Cobelli, C. Carson *Introduction to modelling in physiology and medicine*, Academic Press, London, 2008. **(versione italiana disponibile a breve)**
- Testi per consultazione:
  - Karl Astrom, Richard Murray *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008. Disponibile online: **http://www.cds.caltech.edu/∼murray/amwiki**
  - L. Benvenuti, A. De Santis, L. Farina, *Sistemi dinamici*, Mc Graw Hill, 2009
  - E. Fornasini, G. Marchesini. *Teoria dei sistemi*, Libreria Progetto, Padova
  - Giorgio Picci, *Metodi Statistici per l'Identificazione di Sistemi Lineari*, Dispense, 2011. Disponibile online: **http://www.dei.unipd.it/∼picci/IdentAnalisiDati.html**

Prerequisiti

- Fisica Generale 1 e Fisica Generale 2:
  - Equazioni che regolano la dinamica di sistemi meccanici e elettrici
- Segnali e Sistemi:
  - Funzioni di trasferimento a tempo continuo e a tempo discreto
- Algebra Lineare e Geometria:
  - Autovalori, autovettori
  - Matrici definite positive e loro diagonalizzazione
- Analisi dei Dati:
  - Variabili aleatorie gaussiane vettoriali
  - Calcolo di media e varianza di variabili aleatorie gaussiane condizionate
  - Regressione lineare

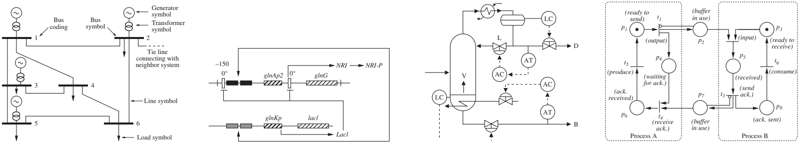
Sistemi e ...

"Il tutto è maggiore della somma delle parti" (Aristotele)

Sistema:

Un sistema può essere definito come l'unità fisica e funzionale, costituita da più parti (tessuti, organi od elementi ecc.) interagenti (od in relazione funzionale) tra loro (e con altri sistemi), formando un tutt'uno in cui, ogni parte, dà un contributo per una finalità comune od un target identificativo di quel sistema.

(Wikipedia - http://it.wikipedia.org)



(a) Power electronics (b) Cell biology (c) Process control (d) Networking

... Modelli

Modello:

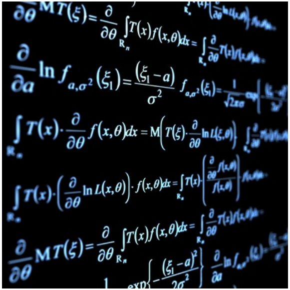
Un modello è una rappresentazione di un oggetto o di un fenomeno, che corrisponde alla cosa modellata per il fatto di riprodurne alcune caratteristiche o comportamenti fondamentali in modo tale che questi aspetti possano essere mostrati, studiati, conosciuti laddove l'oggetto modellato non sia direttamente accessibile.

(Wikipedia - http://it.wikipedia.org)

- Modelli fisici: in scala ridotta come navi, dighe, aeroplani
- Modelli matematici: relazioni matematiche che descrivono quantitativamente il comportamento del sistema
- Modelli verbali: descrizione qualitative tramite linguaggio di un fenomento
- Modelli grafici: schemi, relazioni tra le parti, flusso di informazione

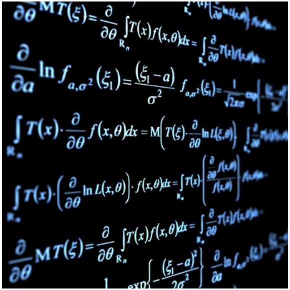
Modelli Matematici

- Vantaggi:
  - Descrizione sintetica di un fenomeno
  - Descrizione non ambigua di un fenomeno
  - Riproducibilità: possibilità di riprodurre il fenomeno in maniera ripetibile e su PC
  - Analisi quantitativa: possibilità di analizzare le proprietà di un modello
  - Accessibilità: possibilità di modificare e testare il modello
  - Universali: utilizzati in tutte le aree della scienza e dell'ingegneria
- Problematiche:
  - Quando un modello matematico è un buon modello ?
  - Come costruire un modello matematico?



Modelli Matematici

- Vantaggi:
  - Descrizione sintetica di un fenomeno
  - Descrizione non ambigua di un fenomeno
  - Riproducibilità: possibilità di riprodurre il fenomeno in maniera ripetibile e su PC
  - Analisi quantitativa: possibilità di analizzare le proprietà di un modello
  - Accessibilità: possibilità di modificare e testare il modello
  - Universali: utilizzati in tutte le aree della scienza e dell'ingegneria



- Problematiche:
  - Quando un modello matematico è un buon modello ?
  - Come costruire un modello matematico?

> In pratica, tutti i modelli sono sbagliati, ma alcuni sono utili
>
> (George Box - statistico)

Sistemi e modelli dinamici

Sistemi dinamici

Sono sistemi che evolvono nel tempo, caratterizzati da un insieme di segnali di ingresso e di uscita. In particolare l'uscita(effetto) all'istante t di un sistema dinamico dipende dalla storia passata degli ingressi(cause) del sistema. Sono tipicamente modellizzati tramite equazioni differenziali e variabili di stato.

Sistemi e modelli dinamici

Sistemi dinamici

Sono sistemi che evolvono nel tempo, caratterizzati da un insieme di segnali di ingresso e di uscita. In particolare l'uscita(effetto) all'istante t di un sistema dinamico dipende dalla storia passata degli ingressi(cause) del sistema. Sono tipicamente modellizzati tramite equazioni differenziali e variabili di stato.

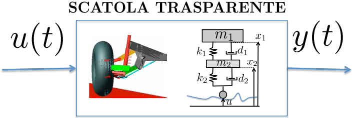
Modello matematico per sistemi dinamici (tempo continuo)

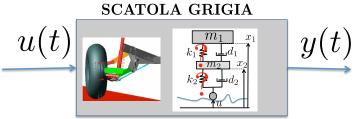
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y &= h(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

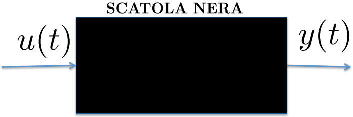
- x, u, y sono vettori
- u - controlli, disturbi, rumore
- x - non accessibile direttamente
- f, h - funzioni statiche (anche non lineari)

Come si costruisce un modello matematico?

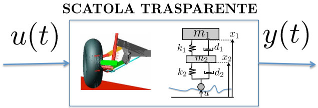
- Scatola trasparente: si usano leggi costruttive del fenomeno (fisiche,biologiche,chimiche,etc) per derivare il modello matematico
- Scatola grigia: si usano leggi costruttive del fenomeno e misure sperimentali $\{u(t), y(t)\}$ per stimare alcuni parametri non noti (massa, costante di degradazione, etc..)
- Scatola nera (Modelli di dati): si usano solamente delle misure sperimentali di $\{u(t), y(t)\}$





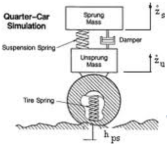


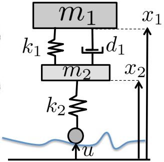
Approccio White-Box (1/2)



Scatola trasparente

Il sistema é decomposto in componenti elementari di cui si conosce il modello matematico tramite i principi fondamentali delle scienze (fisica, biologia, chimica, ecc..) ed il valore esatto dei parametri coinvolti (massa, costanti di decadimento, coefficienti di attrito, ecc..).





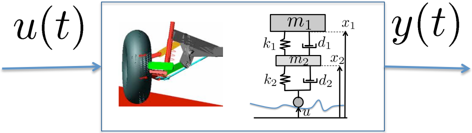
$$
\begin{aligned}
m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1(x_1 - x_2) - d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\
m_2 \ddot{x}_2 &= k_1(x_1 - x_2) + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - u) \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

Variabili: x_1 altezza auto, x_2 altezza sospensione, u altezza profilo stradale

Parametri: k_1 costante elasica sospensione, k_2 costante elastica pneumatico, d_1 coefficiente attrito sospensione

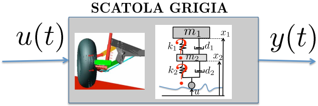
Approccio White-Box (2/2)

SCATOLA TRASPARENTE



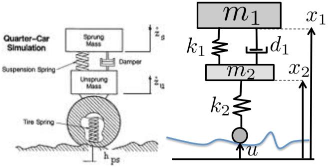
- Vantaggi:
    - Non servono dati sperimentali
    - Facilità nel modificare il modello (nell'esempio: aggiungere un termine di attrito per il pneumatico)
- Svantaggi:
    - Spesso si devono fare ipotesi semplificative (nell' esempio: considerare un modello lineare dell'attrito)
    - Poco accurato se i parametri del modello non sono noti (nell'esempio: pressione aria pneumatico che influenza costante elastica k_2)
    - Sistemi con molte componenti portano a modelli complessi con molte equazioni anche se il comportamento globale è "semplice"
    - A volte le leggi costruttive elementari non sono note (molti esempi in economia, biologia, ecologia, ecc...)

Approccio Gray-Box (1/2)



Scatola grigia

Si conoscono (almeno parzialmente) principi fondamentali delle scienze che regolano il sistema ma il valore dei parametri coinvolti non è noto.



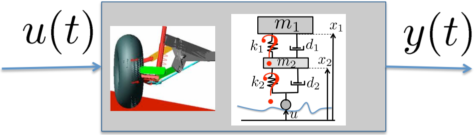
- Equazioni del modello:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1(x_1 - x_2) - d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= k_1(x_1 - x_2) + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_1 - u) \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

- Identificazione: Si utilizzano i dati di ingresso/uscita $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^{T}$ e le equazioni del modello per ricavare il valore esatto dei parametri k_1, k_2, d_1

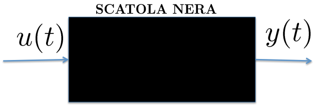
Approccio Gray-Box (2/2)

SCATOLA GRIGIA



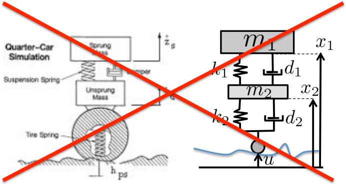
- Vantaggi:
  - Modello più accurato
  - Permette di ricavare il valore di parametri non misurabili direttamente
  - Interpretazione chiara delle varie variabili in gioco
- Svantaggi:
  - Necessità di raccogliere i dati
  - Spesso il calcolo dei parametri richiede una complessa ottimizzazione non-lineare
  - Efficace in genere solo se numero parametri è piccolo
  - Problemi di identificabilità dei parametri (esempio se $k_1 = L\kappa$ e $d_1 = Lb$, L-lunghezza sospensione, κ-costante elastica per unità di lunghezza, b-coefficiente d'attrito per unità di lunghezza, si vuole trovare valori di κ, L, b).

Approccio Black-Box (1/2)



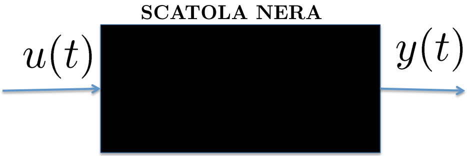
Scatola nera (Modelli di dati)

Non si conoscono i principi fondamentali che regolano il fenomeno, oppure sono troppo complessi e si crea un modello matematico solamente a partire dai dati sperimentali.



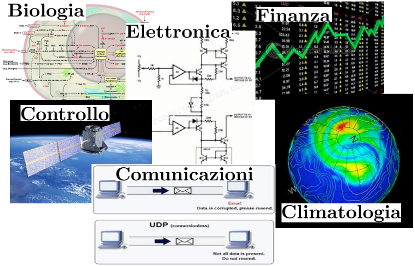
- Dati disponibili: Il profilo del terreno $\{u(t)\}$ (o sua descrizione statistica) e l'altezza del veicolo $\{y(t)\}$ campionati a $t = kT$, dove T è il tempo di campionamento, quindi i dati sono $\mathcal{D} = \{(u_1, y_1), (u_2, y_2), \ldots, (u_N, y_N)\}$.
- Identificatione: Si utilizzano solo i dati di ingresso/uscita $\mathcal{D}$ per ricavare un modello matematico (tipicamente lineare)

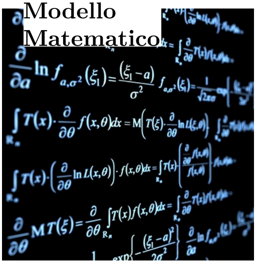
Approccio Black-Box (2/2)



- Vantaggi:
  - Modello che descrive solo i fenomeni più rilevanti
  - Buone capacità predittive
  - Universale in quanto non richiede conoscenza sulla natura dei dati
- Svantaggi:
  - Necessità di raccogliere i dati
  - Poco efficace se il modello originale è fortemente non-lineare
  - Variabili in gioco non hanno significato fisico (differentemente da gray/white-box)
  - Molto variabile se dati disponibili sono pochi e/o rumorosi

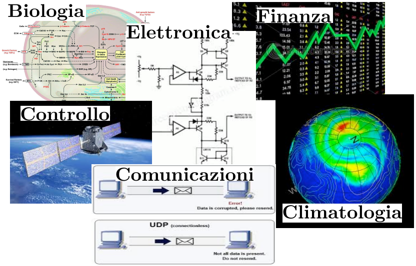
Obiettivi del corso





- Modelizzazione di sistemi dinamici tramite modelli matematici (Identificazione white-box)
- Analisi qualitativa e quantitativa di sistemi dinamici regolati da equazioni differenziali
- Identificazione gray-box dei parametri incogniti di un sistema dinamico a partire da dati fisici (misure) e stima dei segnali di ingresso tramite deconvoluzione.

Modellizzazione



$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x,u,t)\\
y &= h(x,u,t)
\end{aligned}
$$

- Esempi di sistemi dinamici da Ingegneria Informatica, Ingegneria delle Telecomunicazioni, Bioingegneria, Ingegneria Elettronica, Ingegneria dell'Automazione
- Definizioni di classi di modelli matematici per sistemi dinamici

Analisi (1/4): Sistemi Lineari Autonomi a tempo continuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) \\ y &= h(x,u,t) \end{aligned}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$
$$x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

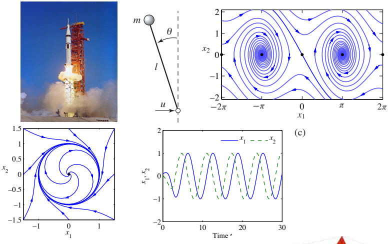
- Esponenziale di matrici
- Forma di Jordan
- Analisi modale
- Autovettori
- Autovettori generalizzati

$$A = TFT^{-1} \quad F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & \lambda_3 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_n & 1 \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$det(sI - A) = (s - \lambda_1)^{\nu_1}(s - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (s - \lambda_n)^{\nu_n}$$

Analisi (2/4): Teoria della Stabilità

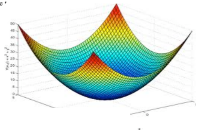
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,t) \\ y &= h(x,u,t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = f(x(t)), \; x \in \mathbb{R}^n$$



(a)
(b)
(c)

- Punti di equilibrio
- Funzioni di Lyapunov
- Linearizzazione
- Diagramma delle fasi

$$V(x) = x^T P x$$



$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \dot{x} = f(x) \approx Ax$$

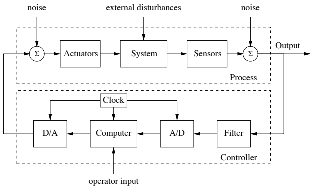
Analisi (3/4): Sistemi non autonomi e a tempo discreto

TEMPO CONTINUO

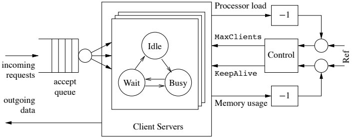
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

TEMPO DISCRETO

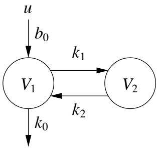
$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$



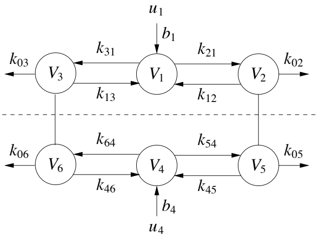
- Sistema a regime
- Funzioni di trasferimento
- Trasformata Zeta
- Analogie e differenze tra modelli a tempo continuo e discreto



Analisi (4/4): Modelli Biologici Compartimentali

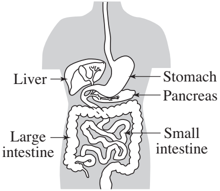


(a) Two compartment model

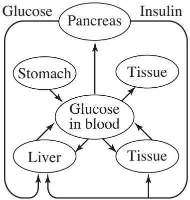


(b) Thyroid hormone model

- Modelli per sistemi biologici
- Proprietà fondamentali

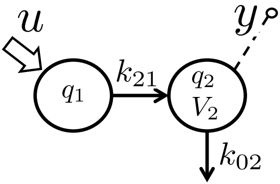


(a) Relevant body organs



(b) Schematic diagram

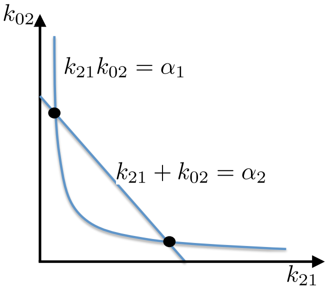
Identificazione (1/5): Identificabilità



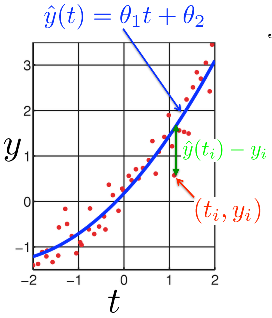
$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= -k_{21}q_1 + u, \quad q_1(0) = 0\\ \dot{q}_2 &= k_{12}q_2 - k_{02}q_2, \quad q_2(0) = 0\\ y(t) &= \frac{q_2}{V_2}\end{aligned}$$

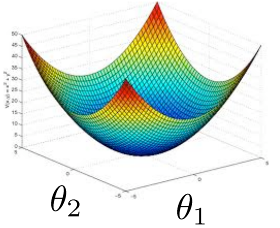
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_{21}}{V_2}}{(s+k_{12})(s+k_{02})} = \frac{\beta_1}{s^2+\alpha_2 s+\alpha_1}$$

- Dai dati e' possibile ricavare $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$
- Impossibile ricavare i parametri V_2, k_{21}, k_{20} in maniera univoca
- Causa 1: numero parametri > numero equazioni
- Causa 2: modelli non-lineari nei parametri

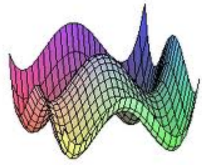


Identificazione (2/5): Stima ai minimi quadrati

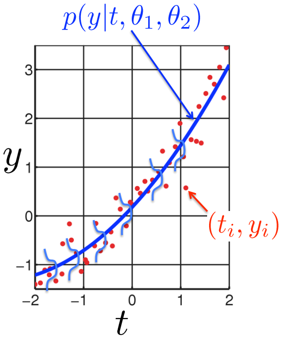




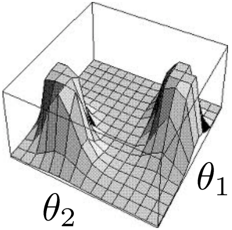
- Simile a trovare soluzione di equazioni lineari $Ax = b$
- Estensione a caso con residui pesati
- Problema non-convesso se il sistema è non-lineare nei parametri



Identificazione (3/5): Stima a massima verosimiglianza

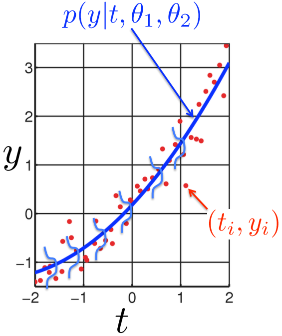


$$J(\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|t_i,\theta_1,\theta_2)$$

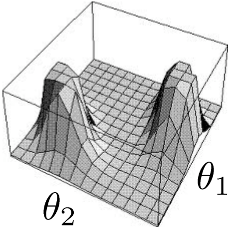


- Modello probabilistico dei dati
- Si massimizza la verosimiglianza dei dati in base al valore dei parametri
- Problema tipicamente non-convesso

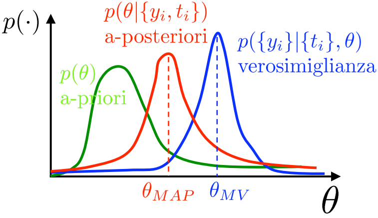
Identificazione (3/5): Stima a massima verosimiglianza



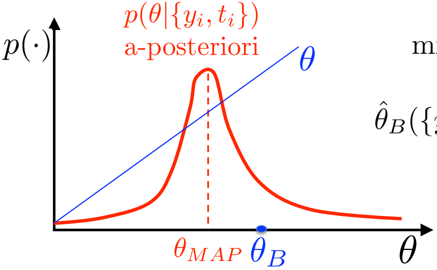
$J(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|t_i, \theta_1, \theta_2)$



- Modello probabilistico dei dati
- Si massimizza la verosimiglianza dei dati in base al valore dei parametri
- Problema tipicamente non-convesso



Identificazione (4/5): Stima Bayesiana



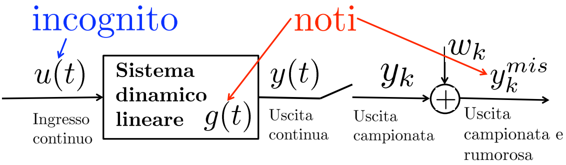
$$\min_\theta J(\theta) = E[\|\hat{\theta} - \theta\|^2]$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_B(\{y_i,t_i\}) &= E[\theta|\{y_i,t_i\}] \\ &= \int \theta p(\theta|\{y_i,t_i\} d\theta\end{aligned}$$

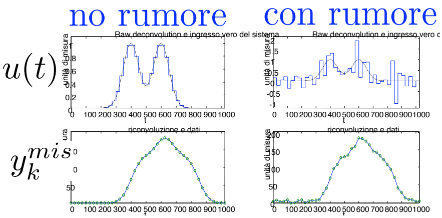
$$\boxed{\theta_{MAP} \neq \theta_{MV} \neq \theta_B \neq \theta_{MQ}}$$

- Usa informazione a priori
- Minimizza errore quadratico medio
- Ottimo si ottiene tramite calcolo di un integrale
- Tutti gli stimatori (MQ,MV,MAP,Bayes) sono in genere differenti
- Se i rumori(densità) sono gaussiani e additivi $\Longrightarrow \theta_{MQ} = \theta_{MV}$
- Se non c'è informazione a-priori ($p(\theta) = cost$) $\Longrightarrow \theta_{MV} = \theta_{MAP}$
- Se densità a-posteriori è simmetrica $\Longrightarrow \theta_{MAP} = \theta_B$

Identificazione (5/5): Deconvoluzione



- Si vuole ricostruire ingresso $u(t)$
- Problema tipico in medicina e biologia
- Problema di inversione
- Malcondizionato: molto sensibile ai rumori di misura e non-unicità della soluzione
- Richiede regolarizzazione: penalizzare “osciillazioni" ingresso a discapito di errori sulla predizione di y_k^{mis}.



Programma del corso (1/2)

- Modellizzazione (Prof. Schenato):
  - Definizioni di classi di modelli matematici per sistemi dinamici: lineari/non-lineari, tempo continuo/discreto, autonomi/con ingresso, tempo varianti/invarianti, deterministici/stocastici, scatola bianca/grigia/nera
  - Esempi di sistemi dinamici di natura differente: meccanici, biologici, elettronici, telecomunicazioni
- Analisi (Prof. Bisiacco):
  - Modelli a tempo continuo in spazio di stato: analisi modale, forma di Jordan
  - Stabilità: per sistemi lineari (analisi modale) e sistemi non-lineari (Teoria di Lyapunov)
  - Modelli lineari a tempo discreto
  - Modelli biologici compartimentali

Programma del corso (2/2)

- Identificazione (Prof. Schenato):
  - Identificabilità per sistemi lineari (funzione di trasferimento) e non-lineari (espansione di Taylor)
  - Stima ai minimi quadrati (MQ): standard, pesati, non-lineari con ricerca di Gauss-Newton
  - Stima a massima verosimiglianza (MV): matrice di Fisher, limite di Cramér-Rao
  - Stima Bayesiana (B): informazione a-priori, stimatore a minima varianza
  - Interpretazione statistica degli stimatori MQ, MV, B
  - Deconvoluzione per la stima di segnali di ingresso da uscite campionate e rumorose
- Esercitazioni:
  - Laboratori Matlab
  - Preparazioni al compito

Note a margine

Ringraziamenti

Questi lucidi sono liberamente ispirati ai lucidi del corso di "Identificazione dei modelli e analisi dei dati" del Prof. Giuseppe De Nicolao (Università di Pavia).
Alcune delle figure sono state riprese dal testo K. Astrom, R. Murray "Feedback Systems".

Informazioni sui docenti

Prof. Mauro Bisiacco:
http://automatica.dei.unipd.it/people/bisiacco.html
Prof. Claudio Cobelli:
http://www.dei.unipd.it/∼cobelli/
Prof. Luca Schenato:
http://automatica.dei.unipd.it/people/schenato.html
Prof.ssa Gianna Toffolo:
http://www.dei.unipd.it/∼toffolo