PSC: Progettazione di sistemi di controllo	a.a. 2012-2013

Esercitazione 1 — 7 Novembre 2012

Docente: Luca Schenato — *Stesori: Luca Schenato*

I seguenti esercizi sono in parte esercitazioni MATLAB e in parte analitiche. Gli esercizi (1) e (2) sono in MATLAB e devo essere svolti preparando uno o piu' file MATLAB tipo *Esercitazione1Ex1a.m*, *Esercitazione1Ex1b.m* che dovranno essere spediti tramite email a schenato@dei.unipd.it. Le parti analitiche riguardanti le risposte alle domande (3) e (4) qui sotto, possono essere scritte possibilmente in Latex, Word o anche semplicemente a mano e poi trasformate in PDF con un scanner. Non e' necessario riportare le figure delle simulazioni nel testo, purche' queste siano presenti nel momento in cui faro' girare i file MATLAB che mi avete spedito.

1.1 Algoritmi di Consenso

Esercizio 1: Matrici costanti In questo esercizio si vogliono progettare degli algoritmi di consenus tramite matrici costanti, cioè

$$x(t+1) = Px(t)$$

utilizzando come condizione iniziale $x_i(0) = i$. Si considerino i grafi di Fig. **??** e si assuma che tutti i nodi possano utilizzare gli auto-anelli.

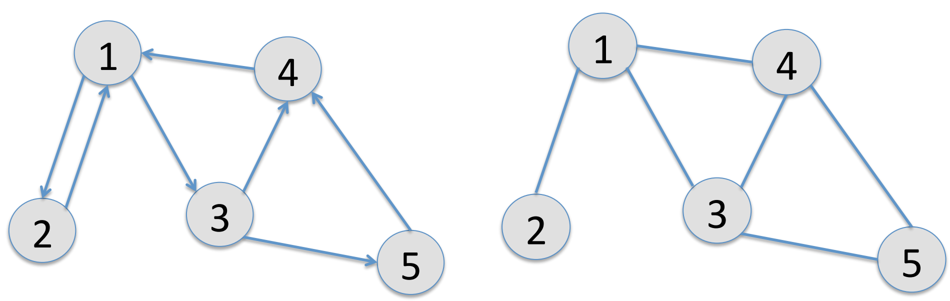

Figure 1.1. Grafo diretto con 5 nodi (sinistra) e grafo non diretto (destra).

a. Si costruisca una matrice P consistente con il grafo *diretto* che garantisca il consensus.

b. Si costruisca una matrice P consistente con il grafo *diretto* che garantisca il consensus in media.

c. Si costruisca una matrice P consistente con il grafo *diretto* che garantisca il consensus in un numero finito di passi.

d. Si costruiscano due matrici P consistenti con il grafo *non-diretto* che garantiscano il consensus in media ottenute tramite la tecnica del Laplaciano e dei pesi di Metropolis-Hastings.

e. Si costruisca una matrice P consistente con il grafo *diretto* ed un algoritmo che, tramite due consensus in parallelo, garantisca il consensus in media.

f. Per ognuna delle matrici si ottenga il grafico relativo all' evoluzione della variabile che converge a consensus per ogni nodo (Nei punti (a,b,c,d) si tratta di $x(t)$ in funzione di k, mentre in (e) si tratta della stima della media di ogni nodo).

g. Per ognuna delle matrici si ottenga il grafico relativo all' evoluzione del logaritmo dell' errore di consensus definito come $e(t) = \log(||x(t) - \bar{x}(t)\mathbf{1}||)$ in funzione di t, dove $\mathbf{1} = [1\ 1\ \cdots\ 1]^T$ e $\bar{x}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t) = \frac{1}{N}\mathbf{1}^T x(t)$.

Esercizio 2: Matrici tempo-varianti In questo esercizio si vogliono analizzare la progettazione di algoritmi di consenus tramiti matrici tempo-varianti, cioè

$$x(t+1) = P(t)x(t)$$

utilizzando come condizione iniziale $x_i(0) = i$. Si consideri il grafo *non-diretto* di Fig. **??** e si assuma che tutti i nodi possano utilizzare gli autoanelli. Si usi come peso delle matrici $q = \frac{1}{2}$.

a. Si costruiscano le matrici necessarie al consensus con comunicazione broadcast e lo si implementi tramite sequenze round-robin, cioè i nodi si accendono e comunicano in sequenza.

b. Si costruiscano le matrici necessarie al consensus con comunicazione gossip simmetrico e lo si implementi tramite sequenze round-robin, cioè gli archi, numerati secondo qualche ordine, si accendono in sequenza e i nodi relativi si aggiornano secondo il gossip simmetrico.

c. Si costruisca un algoritmo basato sulla comunicazione broadcast che tramite due "consensus" in parallelo permetta di calcolare la media delle condizioni iniziali. (Si pensi a come generalizzare il punto **(e)** dell'esercizio precedente).

d. Si ripetano i punti **(a)**,**(b)**,**(c)** utilizzando un'accensione randomizzata, cioè, per esempio nel caso del broadcast, ad ogni istante si accende a caso con probabilità uniforme uno degli N nodi e attua l'aggiornamento broadcast. Nel caso del gossip simmetrico, ad ogni istante si accende a caso con probabilità uniforme un arco del grafo.

e. Per ognuna dei punti precedenti si ottenga il grafico relativo all' evoluzione della variabile che converge a consensus per ogni nodo (Nei punti **(a)**-**(b)** si tratta di $x(t)$ in funzione di k, mentre in **(c)** si tratta della stima della media di ogni nodo). (Suggerimento: un modo per farlo in MATLAB è di utilizzare la funzione $randperm$ e prendere solo il primo elemento per scegliere a caso un nodo o un arco. Ovviamente nel caso degli archi questi ultimi devono essere ordinati da 1 al numero totale di archi $|\mathcal{E}|$.

f. Per ognuna delle matrici si ottenga il grafico relativo all' evoluzione del logaritmo errore di consensus definito come $e(t) = \log(||x(t) - \bar{x}(t)\mathbf{1}||)$ in funzione di t, dove $\mathbf{1} = [1\ 1\ \dots 1]^T$ e $\bar{x}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t) = \frac{1}{N}\mathbf{1}^T x(t)$.

Esercizio 3: Matrici circolanti Si consideri una matrice circolante stocastica di dimensione N e con pesi $\alpha_0 = 1 - q$ e $\alpha_2 = q$ dove $q \in (0, 1)$. Tale matrice corrisponde ad un grafo in cui un nodo i riceve informazione dal nodo a 2 passi alla sua destra. Si calcoli il valore q^* ottimo che minimizza il raggio spettrale essenziale della matrice corrispondente P, indicato con $ers^*(P)$ nel caso in cui N è dispari e nel caso in cui N è pari. (Suggerimento: si disegni il grafo associato a tale matrice con pochi nodi per N dispari e N pari.

(FACOLTATIVO) Esercizio 4: Broadcast randomizzato Si considerino N agenti ed il seguente protocollo *broadcast randomizzato* in un grafo completo. Ad ogni passo un agente i scelto con probabilità uniforme trasmette il suo stato a tutti gli altri $N - 1$ nodi che aggiornano il loro stato con peso $q \in [0, 1]$. Si calcoli la velocità di convergenza relativa all'aspettazione dell' errore quadratico medio e l'errore a regime in termini di aspettazione dell'errore quadratico medio del valore di consenso rispetto alla media delle condizioni iniziali in funzione del parametro q. Si calcoli il q^*_R che massimizza la velocità di convergenza e q^*_{av} che minimizza l'errore a regime. Tali valori coincidono? Per $q = 1/2$ a cosa convergono la velocità di convergenza R e l'errore quadratico medio a regime dato dalla matrice $\overline{B}$ per $N \to \infty$?