PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**a.a. 2010-2011**
Lezione 9 — 4 Novembre	
Docente: Luca Schenato	*Stesori: Gottardo, Lanzini, Zanin*

9.1 Interpolatore di Kalman

Nella scorsa lezione si era rimasti all'aggiunta dell'ipotesi di gaussianità dei processi seguenti:

$$\begin{aligned} Y^h &= \{y_0, ..., y_h\} \\ p\left(x_k|Y^k\right) &\propto p\left(y_k|x_k\right) \cdot p\left(x_k|Y^{k-1}\right) \\ &\propto p\left(y_k|x_k\right) \cdot \int_{x_{k-1}} \underbrace{p\left(x_k|x_{k-1}\right) p\left(x_{k-1}|Y^{k-1}\right)}_{p\left(x_k, x_{k-1}|Y^{k-1}\right) = \exp\{-\frac{1}{2}(*)\}} dx_{k-1} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Dove, applicando l'ipotesi di gaussianità, si ha:

$$p\left(x_k|Y^h\right) = \mathcal{N}_{x_k}\left(\tilde{x}_{k|h}, P_{k|h}\right) \tag{9.2}$$

$$p\left(x_k|x_{k-1}\right) = \mathcal{N}_{x_k}\left(Ax_{k-1}, Q\right) \tag{9.3}$$

$$p\left(y_k|x_k\right) = \mathcal{N}_{y_k}\left(Cx_k, R\right) \tag{9.4}$$

$$p\left(x_k, x_{k-1}|Y^{k-1}\right) = \mathcal{N}_{\begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \end{bmatrix}}\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right) \tag{9.5}$$

Come introdotto nella precedente lezione si attua il matching tra le seguenti:

$$\begin{aligned} (*) &= \left(x_k - Ax_{k-1}\right)^T Q^{-1}\left(x_k - Ax_{k-1}\right) + \left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}\right)^T P_{k-1|k-1}^{-1}\left(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}\right) \\ &= x_k^T Q^{-1} x_k - 2x_{k-1}^T A^T Q^{-1} x_k + x_{k-1}^T A^T Q^{-1} A x_{k-1} + x_{k-1}^T P_{k-1|k-1}^{-1} x_{k-1} \\ &\quad - 2x_{k-1}^T P_{k-1|k-1}^{-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + \hat{x}_{k-1|k-1}^T P_{k-1|k-1}^{-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ &= x_k^T Q^{-1} x_k - 2x_{k-1}^T A^T Q^{-1} x_k + x_{k-1}^T \left(A^T Q^{-1} A + P_{k-1|k-1}^{-1}\right) x_{k-1} - 2x_{k-1}^T P_{k-1|k-1}^{-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \\ &\quad + \hat{x}_{k-1|k-1}^T P_{k-1|k-1}^{-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \end{aligned} \tag{9.6}$$

$$
\begin{aligned}
(*) &= \begin{bmatrix} x_k - \mu_1 \\ x_{k-1} - \mu_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k - \mu_1 \\ x_{k-1} - \mu_2 \end{bmatrix} \\
&= (x_k - \mu_1)^T \Gamma_{11} (x_k - \mu_1) + 2(x_k - \mu_1)^T \Gamma_{12}(x_{k-1} - \mu_2) + (x_{k-1} - \mu_2)^T \Gamma_{22}(x_{k-1} - \mu_2) \\
&= x_k^T \Gamma_{11} x_k - 2x_k^T \Gamma_{11}\mu_1 + \mu_1^T \Gamma_{11}\mu_1 + 2x_k^T \Gamma_{12} x_{k-1} - 2\mu_1^T \Gamma_{12} x_{k-1} - 2x_k^T \Gamma_{12}\mu_2 + 2\mu_1^T \Gamma_{12}\mu_2 \\
&\quad + x_{k-1}^T \Gamma_{22} x_{k-1} - 2x_{k-1}^T \Gamma_{22}\mu_2 + \mu_2^T \Gamma_{22}\mu_2
\end{aligned}
$$

dove si è posto

$$
\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1}
$$

Di conseguenza si arriva alle seguenti uguaglianze:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11} =& Q^{-1} \\
\Gamma_{22} =& A^T Q^{-1} A + P_{k-1,k-1}^{-1} \\
\Gamma_{12} =& -Q^{-1} A
\end{aligned} \tag{9.7}
$$

$$
\begin{cases}
-2\Gamma_{11}\mu_1 - 2\Gamma_{12}\mu_2 = 0 \rightarrow \mu_1 = -\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}\mu_2 \\
-2\Gamma_{21}\mu_1 - 2\Gamma_{22}\mu_2 = -2P_{k-1|k-1}^{-1}\hat{x}_{k-1|k-1}
\end{cases}
$$

risolvendo il sistema si ottiene:

$$
\begin{aligned}
(-\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12} + \Gamma_{22})\mu_2 &= P_{k-1|k-1}^{-1}\hat{x}_{k-1|k-1} \\
\mu_2 &= (A^T Q^{-1} A + P_{k-1|k-1}^{-1} - A^T Q^{-1} Q Q^{-1} A^T)^{-1} P_{k-1|k-1}^{-1}\hat{x}_{k-1|k-1} \\
\mu_2 &= \hat{x}_{k-1|k-1}
\end{aligned} \tag{9.8}
$$

e

$$
\mu_1 = QQ^{-1}A\hat{x}_{k-1|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1} \tag{9.9}
$$

Applicando le equazioni di inversione di matrici a blocchi e il lemma di inversione di matrice possiamo ricavare:

$$
\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1}A \\ -A^T Q^{-1} & P_{k-1|k-1}^{-1} + A^T Q^{-1} A \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} AP_{k-1|k-1}A^T + Q & AP_{k-1|k-1} \\ P_{k-1|k-1}A^T & P_{k-1|k-1} \end{bmatrix} \tag{9.10}
$$

Quindi, riassumendo, si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \hat{x}_{k-1|k-1} \\
\mu_1 &= A\hat{x}_{k-1|k-1} \\
\Sigma_{22} &= P_{k-1|k-1} \\
\Sigma_{11} &= AP_{k-1|k-1}A^T + Q \\
\Sigma_{12} &= AP_{k-1|k-1}
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Attraverso la proprietà di marginalizzazione si ottiene che:

$$\begin{aligned}
p\left(x_k|Y^{k-1}\right) &= \mathcal{N}_{x_k}\left(\overbrace{A\hat{x}_{k-1|k-1}}^{\hat{x}_{k|k-1}}, \overbrace{AP_{k-1|k-1}A^T + Q}^{P_{k|k-1}}\right) \\
p\left(x_k|Y^k\right) &\propto \underbrace{p\left(y_k|x_k\right) p\left(x_k|Y^{k-1}\right)}_{(*)}
\end{aligned} \tag{9.12}$$

I termini indicati con $(*)$ sono quadratici e uguali a

$$\begin{aligned}
(*) &= \left(y_k - Cx_k\right)^T R^{-1}\left(y_k - Cx_k\right) + \left(x_k - \hat{x}_{k|k-1}\right)^T P_{k|k-1}^{-1}\left(x_k - \hat{x}_{k|k-1}\right) \\
&= y_k^T R^{-1} y_k - 2x_k^T C^T R^{-1} y_k + x_k^T C^T R^{-1} C x_k + x_k^T P_{k|k-1}^{-1} x_k - 2x_k^T P_{k|k-1}^{-1}\hat{x}_{k|k-1} \\
&\quad + \hat{x}_{k|k-1}^T P_{k|k-1}^{-1}\hat{x}_{k|k-1} \\
(*) &= \left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right)^T P_{k|k}^{-1}\left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right) + cost \\
&= x_k^T P_{k|k}^{-1} x_k - 2x_k^T P_{k|k}^{-1}\hat{x}_{k|k-1} + cost
\end{aligned} \tag{9.13}$$

Eseguendo il matching tra le due si ottiene:

$$\begin{aligned}
P_{k|k}^{-1} &= P_{k|k-1}^{-1} + C^T R^{-1} C \\
2P_{k|k}^{-1}\hat{x}_{k|k} &= 2C^T R^{-1} y_k + 2P_{k|k-1}^{-1}\hat{x}_{k|k-1} \\
\hat{x}_{k|k} &= P_{k|k}^{-1}(P_{k|k-1}^{-1}\hat{x}_{k|k-1} + C^T R^{-1} y_k)
\end{aligned} \tag{9.14}$$

che, come già anticipato, grazie all'ipotesi di gaussianità dei processi, coincidono con le formule del filtro di Kalman in forma d'informazione.