PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**a.a. 2010-2011**
Lezione 7 — 29 Ottobre	
Docente: Luca Schenato	*Stesori: L. Schenato*

7.1 Definizioni e proposizioni generali

Si consideri lo spazio delle matrici semidefinite positive $\mathbb{S} = \left\{S \in \mathbb{R}^{n\times n} | S = S^T, S \geq 0\right\}$. Su tale spazio esiste un ordinamento parziale, cioè un esistono matrici in $S_1, S_2 \in \mathbb{S}$ tali per cui $S_1 \geq S_2$ [1]. L'ordinamento è detto parziale poichè $S_1, S_2 \in \mathbb{S}$ non implica che $S_1 \geq S_2$ o $S_2 \geq S_1$. Si considerino per esempio le metrici $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definizione: Una funzione (o operatore o mappa) $\Phi(P) : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ è *monotona crescente* se:

$$P_1 \geq P_2 \Rightarrow \Phi(P_1) \geq \Phi(P_2)$$

□

La condizione per l'applicazione del teorema è che in S sia definito un ordinamento.

Definizione: Un operatore $\mathcal{F}(P) : S \to S$ è *lineare* se:

$$\mathcal{G}(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \mathcal{G}(P_1) + \alpha_2 \mathcal{G}(P_2)$$

dove α_1, α_2 sono scalari.

□

Definizione: Un operatore $\mathcal{L}(P) : S \to S$ si dice *affine* se $\mathcal{F}(P) = \mathcal{L}(P) - \mathcal{L}(0)$ è lineare.

□

Esempio: $\mathcal{L}(P) = APA^T + Q$ risulta affine in quanto è un operatore lineare a cui è aggiunta una costante. Infatti in questo caso $\mathcal{F}(P) = APA^T$.

Proposizione: Se una successione $\{P_k\}_{k=0}^{+\infty}$ è *monotonica crescente* o *decrescente* si ha che $\lim_{k\to\infty} P_k = P_\infty < \infty$ oppure P_k non è limitata, cioè $\nexists M > 0$ tale che $P_k \leq M$, $\forall k$.

□

[1] Si ricordi che $S_1 \geq S_2$ significa che $S_1 - S_2 \geq 0$.

Proposizione: Sia $\Phi(\cdot)$ monotona crescente, e si consideri la successione definita come $P_{k+1} = \Phi(P_k)$,o equivalentemente $P_k = \Phi^k(P_0) = \underbrace{\Phi \circ \ldots \circ \Phi}_{k}(P_0)$.

Se $P_0 \leq \Phi(P_0) = P_1$ allora $P_{k+1} \geq P_k \ \forall k$, cioè la successione è monotona crescente.

Se, invece, vale la condizione $P_0 \geq \Phi(P_0)$ allora $P_{k+1} \leq P_k$ cioè la successione è monotona decrescente.

□

Proposizione: Se $\{P_k\}$ è una successione monotona crescente (decrescente) e limitata superiormente (inferiormente), cioè $\exists M$ tale che $P_k \leq M \ \forall k$ $(\exists M | P_k \geq M)$, allora

$$P_k \to P_\infty < \infty$$

□

7.2 Filtro di Kalman e filtro statico a regime

Sia dato il sistema lineare dinamico

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

dove w_k e v_k sono processi i.i.d., tra loro incorrelati, gaussiani a media nulla e varianza rispettivamente Q ed R. Inoltre lo stato iniziale sia

$$x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0) \tag{7.1}$$

Definiamo inoltre, per semplicità di notazione, le seguenti matrici:

$$P_{k+1} := P_{k+1|k} \qquad \widetilde{P}_{k+1} := \widetilde{P}_{k+1|k}$$

L'equazione a cui soddisfa la varianza dell'errore di stima del *filtro di Kalman* è

$$P_{k+1} = AP_kA^T + Q - AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T = \Phi(P_k) \tag{7.2}$$

mentre quella relativa a un *filtro statico* con guadagno costante K risulta

$$\widetilde{P}_{k+1} = A(I - KC)\widetilde{P}_k(I - KC)^TA^T + Q + AKRK^TA^T = \mathcal{L}(K, \widetilde{P}_k) \tag{7.3}$$

7.2.1 Passi di analisi successivi da compiere

Nelle prossime lezioni andremo a dare dimostrazione delle seguenti condizioni:

1. $\mathcal{L}(K, P)$ e $\Phi(P)$ sono monotone crescenti $\forall K$;

2. $\Phi(P) \leq \mathcal{L}(K, P)\ \forall P, \forall K$, cioè non posso fare meglio del filtro di Kalman con un filtro stazionario;
3. $\Phi(P) = \mathcal{L}(K_P, P)$ se $K_P = PC^T \left(CPC^T + R\right)^{-1}$, cioè $\Phi(P) = \min_K \mathcal{L}(K, P)$ e $K_P = \text{argmin}_K \mathcal{L}(K, P)$;
4. se (A, C) rivelabile $\Rightarrow$ esiste K tale che $A(I - KC)$ è strettamente stabile
5. se (A, C) rivelabile $\Rightarrow P_k = \Phi^k(P_0)$, P_k limitato superiormente, cioè $P_k \to P_\infty < \infty$;
6. se $\left(A, Q^{1/2}\right)$ è stabilizzabile $\Rightarrow$ le componenti dello stato relative al sottospazio non raggiungibile convergono a zero;
7. se (A, C) è rivelabile e $\left(A, Q^{1/2}\right)$ è stabilizzabile $\Rightarrow$ la soluzione di $P_\infty = \Phi(P_\infty)$ è unica, $K_\infty = P_\infty C^T \left(CP_\infty C^T + R\right)^{-1}$ è stabilizzante, e $P_k \to P_\infty$ per tutti i $P_0 \geq 0$

Si hanno allora le seguenti proposizioni.

Proposizione 7.1. *L'operatore $\mathcal{L}(K, P)$ è monotono crescente.*

***Dimostrazione*:** Prese due matrici P_1 e P_2 tali che $P_1 \geq P_2$, allora risulta che

$$\mathcal{L}(K, P_1) - \mathcal{L}(K, P_2) = A(I - KC)(P_1 - P_2)(I - KC)^T A^T \geq 0$$

poichè per ipotesi $P_1 - P_2 \geq 0$. □

Proposizione 7.2. *Date le matrici K e P semidefinite positive, vale la seguente disuguaglianza*

$$\mathcal{L}(K, P) \geq \Phi(P)$$

dove l'uguaglianza vale solo per $K = K_P = PC^T(CPC^T + R)^{-1}$. In maniera equivalente possiamo scrivere

$$\Phi(P) = \min_K \mathcal{L}(K, P), \quad K_P = \text{argmin}_K \mathcal{L}(K, P)$$

***Dimostrazione*:** Si verifica facilmente tramite la tecnica del completamento dei quadrati che vale la sequente uguaglianza:

$$\mathcal{L}(K, P) = \Phi(P) + A(K - K_P)(CPC^T + R)(K - K_P)^T A^T$$

Poichè il secondo termine è sempre semidefinito positivo e che si annulla solo per $K = K_P$, segue la tesi. □

Proposizione 7.3. *Data la matrice $P \geq 0$, l'operatore $\Phi(P)$ è monotono crescente.*

***Dimostrazione*:** Prese due matrici semidefinite positive P_1 e P_2 tali che $P_1 \geq P_2$, si ha che

$$\Phi(P_1) = \mathcal{L}(K_{P_1}, P_1) \geq \mathcal{L}(K_{P_1}, P_2) \geq \mathcal{L}(K_{P_2}, P_2) = \Phi(P_2)$$

dove la prima disuguaglianza deriva dalla monotonicita' di $\mathcal{L}$, mentre la seconda dal fatto che $\Phi(P) = \min_K \mathcal{L}(K, P)$. □

Proposizione 7.4. *Sia $P_0 = \widetilde{P}_0 = 0$. Allora le successioni $\{P_k\}_{k\geq 0}$ e $\{\widetilde{P}_k\}_{k\geq 0}$ sono monotone crescenti, quindi ammettono limite. Inoltre si ha che $P_k \leq \widetilde{P}_k, \forall k \geq 0$, $\forall K$ e $\forall \widetilde{P}_0 = P_0 \geq 0$.*

***Dimostrazione*:** Dalle ipotesi risulta

$$P_1 = \Phi(P_0) = \Phi(0) = Q \geq 0 = P_0$$

Essendo $P_{k+1} = \Phi(P_k)$ e procedendo per induzione, dalla monotonicità dell'operatore Φ segue subito che

$$P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_k.$$

In modo analogo si dimostra il risultato per la successione $\{\widetilde{P}_k\}_{k\geq 0}$ considerato che

$$\widetilde{P}_1 = \mathcal{L}(K, \widetilde{P}_0) = Q + AKRK^TA^T \geq 0 = \widetilde{P}_0.$$

Per ipotesi $P_0 \leq \widetilde{P}_0$, per cui per la Proposizione 7.2 si ha che

$$P_1 = \Phi(P_0) \leq \mathcal{L}(K, \widetilde{P}_0) = \widetilde{P}_1.$$

Per induzione segue la tesi. □

Proposizione 7.5. *Se la coppia (A, C) è rivelabile, allora esiste K tale che $A_c = A(I - KC)$ è strettamente stabile.*

***Dimostrazione*:** Se A non ha autovalori nulli, la dimostrazione è semplice. Infatti in questo caso la matrice A è invertibile e dato che (A, C) è rivelabile, allora esiste $\bar{K}$ tale che $A - \bar{K}C$ è strettamente stabile. Se scegliamo $K = A^{-1}\bar{K}$ abbiamo che $A_c = A(I - KC) = A - AKC = A - \bar{K}C$ e quindi A_c è strettamente stabile.

Se A possiede autovalori nulli allora senza perdita di generalita', tramite un opportuno cambio di base, è possibile riscrivere il sistema in forma canonica di Jordan $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ e $C = [C_1 \;\; C_2]$, dove A_{11} include solamente i blocchi di Jordan con autovalori non nulli di A, mentre A_{22} solo quelli con autovalori nulli. Di conseguenza A_{11} è invertibile. Inoltre è ovvio dalla struttura delle matrici A e C che anche la coppia (A_{11}, C_1) deve essere rivelabile, quindi esiste un $\bar{K}$ tale che $A_{11} - \bar{K}C_1$ è strettamente stabile. Se ora scegliamo $K = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\bar{K} \\ 0 \end{bmatrix}$ otteniamo $A_c = A - AKC = \begin{bmatrix} A_{11} - \bar{K}C_1 & -\bar{K}C_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$. Quindi poichè la matrice A_c è triangolare superiore, tutti gli autovalori sono in modulo strettamente minori di uno, cioè $|\lambda_i(A_c)| < 1$ in quanto $A_{11} - \bar{K}C_1$ è strettamente stabile per costruzione, e A_{22} ha autovalori nulli. □

Proposizione 7.6. *Si consideri l'operatore lineare $\mathcal{F}(P) = A_c P A_c^T$ dove $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tale operatore è strettamente stabile se e solo se A_c è strettamente stabile.*

***Dimostrazione*:** La dimostrazione è molto semplice se A_c ha esiste una base completa $(v_1,\ldots,v_n)$ di autovettori di A_c corrispondenti agli autovalori $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$[2]. Poichè $\mathcal{F}(P)$ è un'operatore lineare, la sua stabilita' è data dai suoi autovalori. Vogliamo ora trovare in maniera esplicita autovalori e autovettori di $\mathcal{F}(P)$. Ovviamente gli autovettori di $\mathcal{F}(P)$ sono matrici $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Consideriamo la matrice $V_{ij} = v_i v_j^*$, dove v_i sono autovettori di A_c e il simbolo $*$ indica il trasposto coniugato. Si ha quindi

$$\mathcal{F}(V_{ij}) = A_c v_i v_j^* A_c^T = A_c v_i v_j^* A_c^* = (A_c v_i)(A_c v_j)^* = \lambda_i v_i (\lambda_j v_j)^* = \lambda_i \lambda_j^* v_i v_j^* = \mu_{ij} V_{ij}$$

dove $\mu_{ij} = \lambda_i \lambda_j^*$. Quindi la matrice V_{ij} cosi' costruita è un autovettore di $\mathcal{F}(P)$ corrispondente all'autovalore μ_{ij}. Poichè $(v_1,\ldots,v_n)$ formano una base completa di $\mathbb{R}^n$, allora abbiamo appena mostrato che esistono n^2 autovettori distinti di $\mathcal{F}(P)$, e quindi $(V_{11}, V_{12}, \ldots, V_{nn})$ formano una base completa dello spazio $\mathbb{R}^{n\times n}$. Inoltre $|\mu_{ij}| = |\lambda_i||\lambda_j| < 1$ poichè per ipotesi A_c è strettamente satbile e quindi ogni $|\lambda_i| < 1$.

La dimostrazione del "solo sè' si ottiene ragionando per assurdo. Infatti se $\mathcal{F}(P)$ non fosse strettamente stabile, cioè se avesse almeno un autovalore $\mu \geq 1$, allora esisterebbe un autovettore v di A_c il cui relativo autovalore λ sarebbe tale che $|\lambda|^2 = \mu \geq 1$ e quindi $|\lambda| \geq 1$, cioè anche A_c sarebbe non strettamente stabile.

Nel caso in cui gli autovetori A_c non formino una base completa di $\mathbb{R}^n$, la dimostrazione risulta un po' piu' laboriosa, ma l'enunciato della proposizione rimane valido. □

Proposizione 7.7. *Se la coppia (A, C) è rivelabile, allora la successione $\{P_k\}_{k\geq 0}$ è limitata superiormente per ogni $P_0 \geq 0$.*

***Dimostrazione*:** Dalla Proposizione 7.4 segue che basta verificare che esistono due matrici K ed M di dimensioni opportune tali che

$$\widetilde{P}_k \leq M < \infty, \ \forall k \geq 0, \forall \widetilde{P}_0 = P_0 \geq 0.$$

poichè $P_k \leq \widetilde{P}_k$. Poichè (A, C) è rivelabile esiste K tale che $A_c := A(I - KC)$ è strettamente stabile. Per la Proposizione 7.6 si ha che anche l'operatore $\mathcal{F}(P) = A_c P A_c^T$ è strettamente stabile. Una proprieta' degli operatori lineari è che

$$\mathcal{F}^k(P) = A_c^k P (A_c^T)^k = \sum_{i=1}^{\ell} V_i k^{m_i} \mu_i^k$$

dove V_i sono matrici[3] che dipendono dalla condizione iniziale P, μ_i sono gli autovalori di $\mathcal{F}(P)$, e m_i è un intero che dipende dalle dimensioni dei blocchi di Jordan corrispondente

[2] per esempio nel caso di autovalori tutti distinti.

[3] Si noti che ci sono $\ell \leq n^2$ termini nella sommatoria che corrispondono al quadrato del numero di blocchi di Jordan della matrice A_c. Per esempio nel caso di autovalori distinti per A_c si avrebbe necessariamente $\ell = n^2$.

all'autovalore μ_i[4]. Poichè $\mathcal{F}(P)$ è strettamente stabile allora $|\mu_i| < 1$. Prendendo una qualsiasi norma[5] definita su $\mathbb{R}^{n\times n}$, possiamo quindi affermare che esistono due scalari positivi $a_P > 0$ (generalmente funzione di P) e $0 \leq \bar{\mu} < 1$ tali che

$$||A_c^k P (A_c^T)^k|| \leq a_P \bar{\mu}^k$$

Si consideri ora l'operatore $\mathcal{L}(K,P)$ e si noti che puo' essere scritto come:

$$\mathcal{L}(K,P) = A_c P A_c^T + S$$

dove $S = Q + AKRK^TA^T \geq 0$. Possiamo quindi scrivere ogni elemento della successione $\widetilde{P}_k$ come

$$\widetilde{P}_k = \mathcal{L}^k(K, \widetilde{P}_0) = A_c^k \widetilde{P}_0 (A_c^T)^k + \sum_{h=0}^{k-1} A_c^h S (A_c^T)^h$$

Poichè questa serie è la somma di termini che decrescono geometricamente a zero abbiamo che in norma:

$$||\widetilde{P}_k|| \leq a_{\widetilde{P}_0} \bar{\mu}^k + a_S \sum_{h=1}^{k-1} \bar{\mu}^h \leq a_{\widetilde{P}_0} + a_S \frac{1}{1-\bar{\mu}}$$

Quindi la serie è limitata superiormente, e quindi converge cioè $\widetilde{P}_k \longrightarrow \widetilde{P}_\infty$ per ogni condizione iniziale $\widetilde{P}_0 \geq 0$. Poichè $||P_k|| \leq ||\widetilde{P}_k||$ allora anche la successione P_k è limitata superiormente per ogni condizione iniziale $P_0 \geq 0$, concludendo la dimostrazione. $\square$

Si noti come dalla dimostrazione si ricavi che $\widetilde{P}_k$ converge per ogni condizione iniziale $\widetilde{P}_0$ in quanto risulta essere il risultato di una serie convergente. Cio' pero' non implica che anche P_k converga, ma semplicemente che è limitata superiormente.

Proposizione 7.8. *Se la coppia $(A, Q^{1/2})$ è stabilizzabile, allora le componenti dello stato appartenenti al sottospazio non raggiungibile convergono a zero. Di conseguenza anche le stesse componenti dello stimatore convergono a zero e così come la corrispondente varianza d'errore.*

***Dimostrazione*:** Tramite un opportuno cambio di base, le matrici A, Q ed C possono essere scritte in forma canonica di raggiungibilità[6] come

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

[4]Per convincersi è sufficiente pensare di riscrivere A_c in forma di Jordan e notare che ogni elemento della matrice $\mathcal{F}^k(P)$ è una combinazione lineare di prodotti degli elementi di A_c^k e P.

[5]Per esempio, la norma di Frobenius $||A||_F = \sum_{i,j} A_{ij}^2$, oppure una qualsiasi norma indotta, come la norma-2 $||A||_2 = \max_x \frac{||Ax||_2}{||x||_2}$

[6]In realtà la forma canonica di raggiungibilità implica semplicemente che i blocchi Q_{21} e Q_{22} siano nulli, ma poichè Q è simmetrica, allora anche Q_{12} deve essere nulla.

dove (A_{11}, Q_{11}) è raggiungibile e A_{22} è strettamente stabile. Il vettore di stato è diviso in due componenti $x = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix}$ nel quale sono evidenziate la parte raggiungibile (apice (1)) e non raggiugibile dello stato (apice (2)). È facile osservare che la dinamica della parte non raggiugibile è data da

$$x_{k+1}^{(2)} = A_{22} x_k^{(2)}$$

cioè non è affetta da rumore di processo, in quanto $Q_{22} = 0$, ed è strettamente stabile. Ciò significa che $\lim_{k\to\infty} x_k^{(2)} = 0$. Quindi un qualsiasi stimatore dello stato del tipo $\widetilde{x}_k = g_k(y_k, \ldots, y_0) := \begin{bmatrix} \widetilde{x}_k^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}$ dove $\widetilde{x}_k^{(1)} = g_k^{(1)}(y_k, \ldots, y_0)$ sarà tale per cui la varianza di errore $\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}_k^{(22)} = 0$, in quanto lo stato $x_k^{(2)}$ converge a zero. Necessariamente si avrà anche che $\lim_{k\to\infty} \widetilde{P}_{k+1|k}^{(12)} = \left(\widetilde{P}_{k+1|k}^{(21)}\right)^T = 0$. Poichè $P_{k+1|k} \leq \widetilde{P}_{k+1|k}$ per qualsiasi stimatore, ciò implica che

$$\lim_{k\to\infty} P_{k+1|k} = \lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} P_{k+1|k}^{(11)} & P_{k+1|k}^{(12)} \\ P_{k+1|k}^{(21)} & P_{k+1|k}^{(22)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove il simbolo $\star$ un generico elemento che potrebbe anche divergere. Ciò conclude il teorema. □

La seguente proposizione fornisce le condizioni necessarie e sufficienti che la stabilizzabilità del guadagno di Kalman a regime e della convergenza a una soluzione unica per ogni condizione iniziale.

Proposizione 7.9. *Se la coppia (A, C) è rivelabile e (A, Q) è stabilizzabile, allora esiste un' unica matrice semidefinita positiva $P_\infty = \Phi(P_\infty)$. Tale matrice è stabilizzante, cioè $A(I - K_\infty C)$ è strettamente stabile, dove $K_\infty = P_\infty C^T (C P_\infty C^T + R)^{-1}$ è il guadagno di Kalman a regime. Inoltre $\lim_{k\to\infty} P_k = \lim_{k\to\infty} \widetilde{P}_k = P_\infty$ per ogni condizione iniziale $P_0 = \widetilde{P}_0 \geq 0$.*

***Dimostrazione*:** Dalla proposizione precedente sappiamo che ogni successione P_k è limitata superiormente se (A, C) è rivelabile. Se consideriamo come condizione iniziale $P_0 = 0$, allora tale successione è monotona crescente. Essendo limitata superiormente, allora abbiamo che $\lim_{k\to\infty} P_k = P_\infty^{(0)}$, dove l'apice (0) è stato inserito per evidenziare che è il valore limite ottenuto partendo dalla condizione iniziale $P_0 = 0$. Per la continuità dell'operatore Φ, deve sicuramente valere $P_\infty^{(0)} = \Phi(P_\infty^{(0)})$.

Dimostriamo ora che il guadagno $K_\infty^{(0)} = P_\infty^{(0)} C^T (C P_\infty^{(0)} C^T + R)^{-1}$ è stabilizzante. Sappiamo innanzitutto che

$$P_\infty^{(0)} = \Phi(P_\infty^{(0)}) = \mathcal{L}(K_\infty^{(0)}, P_\infty^{(0)}) = A(I - K_\infty^{(0)} C) P_\infty^{(0)} (I - K_\infty^{(0)} C)^T A^T + Q + A K_\infty^{(0)} R (K_\infty^{(0)})^T A^T$$

Supponiamo che $A(I - K_\infty^{(0)} C)$ non sia strettamente stabile, quindi esiste un autovettore sinistro $v \neq 0$ tale che $v^* A(I - K_\infty^{(0)} C) = \lambda v^*$ con $|\lambda| \geq 1$. Pre e post-moltiplicando l'espressione appena trovata per v^* e v, rispettivamente, si ha che

$$\begin{aligned} v^* P_\infty^{(0)} v &= v^* A(I - K_\infty^{(0)} C) P_\infty^{(0)} (I - K_\infty^{(0)} C)^T A^T v + v^* Q v + v^* A K_\infty^{(0)} R (K_\infty^{(0)})^T A^T v \\ &= |\lambda|^2 v^* P_\infty^{(0)} v + v^* Q v + v^* A K_\infty^{(0)} R (K_\infty^{(0)})^T A^T v \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} 0 &= (|\lambda|^2 - 1) v^* P_\infty^{(0)} v + v^* Q v + v^* A K_\infty^{(0)} R (K_\infty^{(0)})^T A^T v \\ &= (|\lambda|^2 - 1) ||(P_\infty^{(0)})^{1/2} v||^2 + ||Q^{1/2} v||^2 + ||R^{1/2} (K_\infty^{(0)})^T A^T v||^2 \end{aligned}$$

il che implica che ogni termine deve essere nullo essendo tutti non-negativi. In pariticolare si ha che $v^* Q^{1/2} = 0$ e $v^* A K_\infty^{(0)} R^{1/2} = 0$. Poichè il rango ed il nucleo di $Q^{1/2}$ e Q sono gli stessi si ha che

$$v^* Q^{1/2} = 0 \iff v^* Q = 0$$

Inoltre se R è invertibile, allora lo è anche $R^{1/2}$, da cui si ricava che

$$v^* A K_\infty^{(0)} R^{1/2} = 0 \iff v^* A K_\infty^{(0)} = 0$$

Utilizzando quest'ultima equazione si ha che

$$\lambda v^* = v^* A(I - K_\infty^{(0)} C) = v^* A - v^* A K_\infty^{(0)} C = v^* A$$

quindi v^* è autovettore sinistro anche per la matrice A, ma questo contraddice il test PBH in quanto $v^* Q = 0$ e la coppia (A, Q) è per ipotesi stabilizzabile. Quest'ultima osservazione implica che $A(I - K_\infty^{(0)} C)$ è strettamente stabile. In realtà $A(I - K_\infty^{(0)} C)$ è strettamente stabile anche quando R è non invertibile, ma la dimostrazione risulta molto più complessa ed è per questo omessa.

Poichè la matrice $A_c = A(I - K_\infty^{(0)} C)$ è strettamente stabile, allora $\widetilde{P}_k = \mathcal{L}^k(K_\infty^{(0)}, \widetilde{P}_0)$ converge per ogni condizione iniziale $\widetilde{P}_0$ (anche non semidefinita) alla soluzione $\widetilde{P}_\infty = \sum_{k=0}^\infty A_c^k Q (A_c^T)^k$. Poichè deve anche valere $\widetilde{P}_\infty = \mathcal{L}(K_\infty^{(0)}, \widetilde{P}_\infty)$ per continuità dell'operatore $\mathcal{L}$, allora questa è l'unica soluzione dell'operatore $\widetilde{P}_\infty = \mathcal{L}(K_\infty^{(0)}, \widetilde{P}_\infty)$. Poichè vale anche $P_\infty^{(0)} = \mathcal{L}(K_\infty^{(0)}, P_\infty^{(0)})$ si ha che $\widetilde{P}_\infty = P_\infty^{(0)}$.

Si considerino ora le seguenti successioni

$$S_k = \Phi^k(0), \; P_k = \Phi^k(P_0), \; T_k = \mathcal{L}^k(K_\infty^{(0)}, P_0 + P_\infty^{(0)}), \; P_0 \geq 0$$

Chiaramente $S_k \leq P_k$ in quanto Φ è monotono e le condizioni iniziali sono $0 \leq P_0$. Si ha inoltre che $P_k \leq T_k$ in quanto $\Phi(P) \leq \mathcal{L}(K, P)$ per qualsiasi K e le condizioni iniziali delle successioni soddisfano $P_0 \leq P_0 + P_\infty^{(0)}$. Si ha quindi, per il cosiddetto teorema dei due carabinieri, che

$$\lim_{k \to \infty} S_k = \lim_{k \to \infty} T_k = \widetilde{P}_\infty = P_\infty^{(0)} \Longrightarrow \lim_{k \to \infty} P_k = P_\infty^{(0)}, \forall P_0 \geq 0$$

Questo implica che anche la soluzione $P_\infty = \Phi(P_\infty)$ è unica se ristretta nello spazio delle matrici semidefinite positive $P_\infty \geq 0$, e che le successioni P_k convergono a $P_\infty = P_\infty^{(0)}$ per ogni condizione iniziale $P_0 \geq 0$. Questo conclude il teorema.

$\square$