

6.1 Filtro di Kalman e filtro a guadagno costante

6.1.1 Equazioni filtro di Kalman

Riassumendo le lezioni precedenti, le equazioni ricorsive necessarie per implementare il filtro di Kalman sono:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_k) \quad (6.1)$$

$$P_{k+1} = AP_kA^T + Q - AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T \quad (6.2)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1}C^T(CP_{k+1}C^T + R)^{-1} \quad (6.3)$$

$$P_0 = \bar{P}_0, \quad \hat{x}_0 = \bar{x}_0 \quad (6.4)$$

dove con un piccolo abuso di notazione abbiamo utilizzato $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k+1}$, cioè la *stima filtrata*, e $P_{k+1} = P_{k+1|k}$, cioè la *varianza dell'errore di predizione*¹.

Poichè per costruzione $\hat{x}_{k|k} = E[x_k|y_k \dots y_0]$, lo stimatore così ottenuto è *ottimo* in termini indicati nella Lezione 1.

Per eseguire i calcoli è necessaria la memorizzazione della stima precedente $\hat{x}_{k|k}$ e della covarianza di errore di predizione P_k ad ogni passo. Inoltre è necessario invertire ad ogni passo una matrice di ordine m , cioè della dimensione delle misure.

Il filtro risulta tempo variante a causa dell'aggiornamento della matrice K_{k+1} ad ogni passo.

6.1.2 Equazioni filtro statico

Uno stimatore simile a quello precedentemente definito è lo stimatore *statico*, definito dalla seguente equazione:

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - CA\tilde{x}_{k|k}) \quad (6.5)$$

$$\tilde{x}_{0|0} = \bar{x}_0 \quad (6.6)$$

¹Si potrebbero scrivere delle equazioni simili per la stima di predizione $\hat{x}_{k+1|k}$ e per la varianza d'errore filtrata $P_{k+1|k+1}$, ma da un punto di vista pratico le precedenti sono più semplici da analizzare, e comunque è possibile passare da una all'altra tramite le equazioni descritte nella lezione precedente.

nel quale si utilizza un guadagno di aggiornamento costante $K_k = K$, che risulta quindi numericamente più efficiente in quanto non necessita del calcolo di $P_{k+1|k}$ estremamente oneroso a causa dell'inversione della matrice al suo interno (vedi Eq. (6.2)).

A differenza del filtro di Kalman, il calcolo della varianza dell'errore di stima non è necessaria per l'implementazione di questo filtro. Tuttavia, esso è importante per poter valutare la sua prestazione.

La varianza dell'errore di predizione di commesso dallo stimatore statico é data da:

$$\tilde{P}_{k+1|k} = E \left[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k}) (x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})^T \right] \quad (6.7)$$

che sviluppando i singoli termini porta ad ottenere:

$$\tilde{P}_{k+1|k} = A(I - KC) \tilde{P}_{k|k-1} (I - KC)^T A^T + Q + AKRK^T A^T \quad (6.8)$$

6.2 Analisi equazioni dei filtri

Andremo ora ad analizzare il comportamento della varianza dell'errore di predizione del filtro di Kalman e del filtro con guadagno statico. Con abuso di notazione definiamo $P_{k+1|k} = P_{k+1}$, e $\tilde{P}_{k+1|k} = \tilde{P}_{k+1}$. Richiamando le equazioni derivate in precedenza, la varianza di errore evolve secondo le seguenti equazioni

$$P_{k+1} = AP_k A^T + Q - AP_k C^T (CP_k C^T + R)^{-1} CP_k A^T = \Phi(P_k) \quad (6.9)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = A(I - KC) \tilde{P}_k (I - KC)^T A^T + Q + AKRK^T A^T = \mathcal{L}(K, \tilde{P}_k) \quad (6.10)$$

$$P_0 = \tilde{P}_0 \geq 0 \quad (6.11)$$

L'analisi del comportamento dei termini P_{k+1} e \tilde{P}_{k+1} ci dá la stima dell'errore commesso nei due casi. Essendo lo stimatore statico non ottimo risulta sempre verificata la disuguaglianza:

$$\tilde{P}_k \geq P_k \quad \forall k \quad (6.12)$$

a pari condizione iniziale.

Vogliamo analizzare:

1. $P_k \rightarrow P_\infty \Rightarrow K_k \rightarrow K_\infty = P_\infty C (C^T P_\infty C + R)^{-1}$ valore stazionario
2. condizioni (necessarie e sufficienti) di convergenza rispetto alle condizioni iniziali P_0
3. unicit  della soluzione $P_\infty = \Phi(P_\infty)$
4. analisi di convergenza a valore limite, cio : $\tilde{P}_k \rightarrow \tilde{P}_\infty$

5. se $K = K_\infty$, allora $\tilde{P}_k \rightarrow \tilde{P}_\infty = P_\infty$?

La condizione numero 5, se verificata, porta ad affermare che dopo un tempo sufficientemente lungo si ha prestazioni analoghe per i due stimatori presi in esame (Kalman e statico).

6.2.1 Caso scalare

Prima di analizzare il caso multivariabile è utile studiare in dettaglio il caso scalare in quanto è possibile risolvere le equazioni in maniera grafica. Consideriamo quindi:

$$A = a \quad Q = q \quad R = r \in \mathbb{R} \quad (6.13)$$

considerando $C = 1$, eventualmente riscaldando il problema, e comunque senza perdita di generalità, possiamo calcolare i valori:

$$\tilde{p}_{k+1} = a^2 (1 - k)^2 \tilde{p}_k + r a^2 k^2 + q = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_k) \quad (6.14)$$

e

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 p_k^2}{p_k + r} \\ &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 p_k^2 - a^2 r^2 + a^2 r^2}{a^2 p_k^2 - a^2 r^2 + a^2 r^2} \\ &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 (p_k - r)(p_k + r) + a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= a^2 p_k + q - a^2 (p_k - r) - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= q + a^2 r - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= \Phi(p_k) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Riassumendo i risultati ottenuti:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k+1} &= a^2 (1 - k)^2 \tilde{p}_k + r a^2 k^2 + q = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_k) \\ p_{k+1} &= q + a^2 r - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} = \Phi(p_k) \end{aligned} \quad (6.16)$$

si ha, quindi, delle mappe per il calcolo del valore successivo. Graficamente si ottengono gli andamenti riportati in Figura 6.1.

La tangenza della curva generata da p_{k+1} vale $\frac{d\Phi}{dP} = \frac{a^2 r^2}{(p_k + r)^2}$, che calcolata in $p_k = 0$ risulta pari a a^2 .

La \tilde{p}_{k+1} è una funzione lineare di valore $q + r a^2 k^2$ in $\tilde{p}_k = 0$ di pendenza $\frac{d\mathcal{L}}{dP} = a^2 (1 - k)^2$.

Tracciando la retta bisettrice del piano $p_k - p_{k+1}$ si ottiene l'aggiornamento di p_{k+1} o \tilde{p}_{k+1} a livello grafico.

Il risultato che si ottiene analizzando Φ è che da qualunque punto si parta su $\Phi(p_k)$ si converge a p_∞ , cioè il punto in cui $p_k = p_{k+1}$, o in altro modo $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ detto *punto fisso di Φ* , verificando che $p_k \rightarrow p_\infty \forall p_0 \geq 0$.

In modo analogo si ottiene la convergenza di $\mathcal{L}(k, \tilde{p}_k)$ ad un punto $\tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$ da qualunque punto $\tilde{p}_0 \geq 0$ si parta, ovvero:

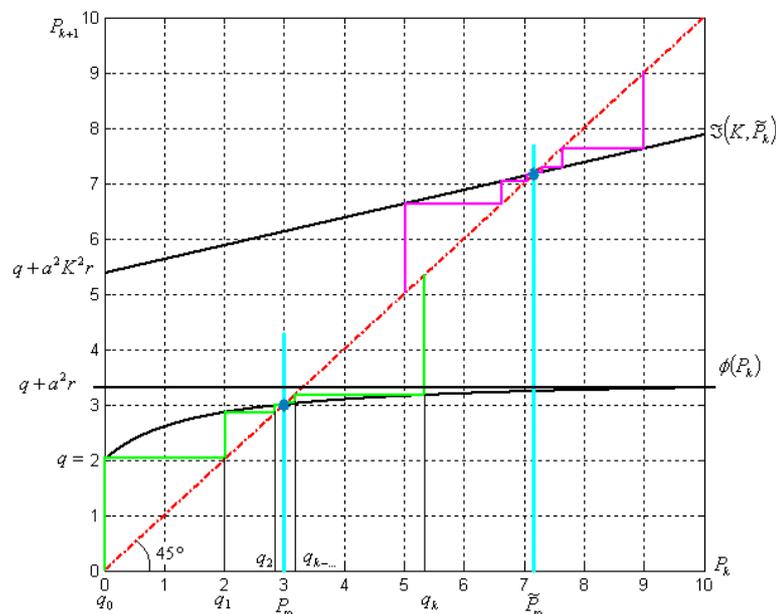


Figura 6.1. Mappa grafica per calcolo dell'aggiornamento di P_{k+1}

$$\tilde{p}_k \rightarrow \tilde{p}_\infty \quad \forall \tilde{p}_0 \geq 0 \quad (6.17)$$

Otteniamo che:

1. L'operatore $\Phi(\cdot)$ è positivo, monotono crescente $\frac{d\Phi}{dp} = \frac{a^2 r^2}{(p+r)^2} \geq 0$, e concavo $\frac{d^2\Phi}{dp^2} = -\frac{2a^2 r^2}{(p+r)^3} \leq 0$, ristretto al dominio $p \geq 0$.
2. Le successioni $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ sono sempre limitate superiormente, cioè $p_k < M_{p_0}$ dove $M > 0$ dipende dalla condizione iniziale p_0 .
3. Le successioni $\{\tilde{p}_k\}_{k=0}^\infty$ convergono a \tilde{p}_∞ se e solo se $a^2(1-k)^2 < 1$.
4. Se $p_k \rightarrow p_\infty < \infty$ e $\tilde{p}_k \rightarrow \tilde{p}_\infty < \infty$ allora $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ e $\tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$
5. La convergenza delle successioni è indipendente da r (per $r = 0$ si ha una retta orizzontale, cioè $\Phi(p) = q$).
6. Le successioni $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ e $\{\tilde{p}_k\}_{k=0}^\infty$ sono sempre monotone (crescenti o decrescenti in base alla condizione iniziale p_0).
7. se $q > 0$ allora $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ ristretta al dominio $p \geq 0$, ha un'unica soluzione.

8. se $q > 0$ allora $p_k \rightarrow p_\infty$, dove $p_\infty = \Phi(p_\infty)$. Se $k_\infty = \frac{p_\infty}{p_\infty + r}$, allora la successione definita come $\tilde{p}_{k+1} = \mathcal{L}(k_\infty, \tilde{p}_k)$ converge a p_∞ , cioè $\tilde{p}_k \rightarrow p_\infty$, cioè la retta ottenuta per $k = k_\infty$ interseca la bisettrice esattamente nello stesso punto di Φ , cioè in p_∞ .
9. per $q > 0$, la velocità di convergenza delle successioni è data da $a^2(1 - k_\infty)^2$, cioè la tangente di Φ nel punto fisso p_∞ .
10. se $q > 0$ allora la soluzione $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ ristretta al dominio $p \geq 0$ è strettamente positiva, cioè $p_\infty > 0$.
11. Nel caso particolare in cui $q = 0$, si ha che:
 - (a) per $a^2 > 1$ si ottengono 2 soluzioni: $p_\infty^1 = 0$ (soluzione instabile) e $p_\infty^2 > 0$ soluzione stabile. La convergenza alla soluzione stabile è geometrica (esponenziale).
 - (b) per $a^2 < 1$ si ottiene 1 soluzione $p_\infty^1 = 0$ stabile. La convergenza alla soluzione stabile è geometrica $\sim a^{2k}$.
 - (c) per $a^2 = 1$ si ottiene 1 soluzione $p_\infty^1 = 0$ stabile. La convergenza alla soluzione stabile è del tipo $\sim 1/k$.

Quindi la soluzione dell'equazione di Riccati $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ implicitamente risolve anche il problema di trovare il guadagno costante ottimo per lo stimatore statico, se $q > 0$. Infatti, sotto opportune condizioni, il guadagno del filtro di Kalman a regime coincide con il guadagno costante che minimizza \tilde{p}_∞ , cioè

$$k_\infty = \operatorname{argmin}_k \tilde{p}_\infty \\ \text{tale che } \tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$$

Inoltre si ottiene, $\tilde{p}_\infty = p_\infty$, cioè il filtro con guadagno statico riesce a generare la stessa prestazione del filtro di Kalman a regime.

6.2.2 Caso MIMO

Considerando sistemi MIMO (*Multi Input Multi Output*) si possono riassumere le condizioni del caso scalare nel seguente modo:

1. le osservazioni 1, 4 e 5 rimangono valide anche nel caso multivariabile;
2. l'osservazione 2 rimane valida se la coppia (A, C) è *rilevabile*;
3. l'osservazione 3 è vera se $A(I - KC)$ è strettamente stabile. Tale K esiste se e solo se la coppia (A, C) è *rilevabile*;
4. l'osservazione 6 non è valida nel caso MIMO, infatti in genere $\Phi(I) \not\leq I$ e $\Phi(I) \not\geq I$, dove I è la matrice identità, e questo rende un po' più laboriosa la dimostrazione di convergenza per ogni condizione iniziale $P_0 \geq 0$. Nel caso particolare in cui $P_0 = 0$, allora le successioni sono monotone crescenti;

5. le osservazioni 7, 8 e 9 rimangono valide sostituendo la condizione $(A, Q^{1/2})$ *stabilizzabile* al posto di $q > 0$. La velocità di convergenza è data dagli autovalori di $A(I - K_\infty C)$;
6. l'osservazione 10 rimane valida con $Q > 0$ al posto di $q > 0$;
7. l'osservazione 11 risulta più complessa in quanto bisogna sostituire $q = 0$ con $(A, Q^{1/2})$ *non stabilizzabile* ed andare ad analizzare i punti fissi di $P_\infty = \Phi(P_\infty)$. In questo caso possono esistere più soluzioni (punti fissi), ma **esiste un' unica soluzione stabilizzante**.