

Applicazione EKF a modello non-lineare, introduzione ai Filtri Particellari e Stime Monte Carlo

Esempio 1: Tracking di oggetti in un edificio con EKF

Si riporta in figura un esempio di videosorveglianza su un incrocio di due corridoi lungo i quali si muove l'oggetto da inseguire. Nei muri perimetrali sono situati quattro nodi ancora che rilevano la posizione relativa del nodo in esame.

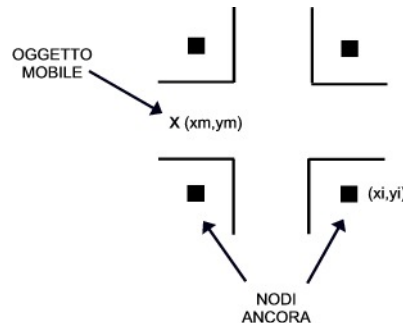


Figura 25.1. Esempio di tracking in videosorveglianza

Consideriamo il sistema governato dalla seguente legge (random walk)

$$\xi_{k+1} = \xi_k + w_k \quad (25.1)$$

cioè il nodo si muove in maniera casuale.

Per poter inquadrare completamente il problema è necessario introdurre un potenziale che dia la possibilità di tenere conto della presenza dei muri. Supponiamo quindi che vi siano delle cariche positive sia sul nostro oggetto che sui muri che lo circondano: questo porterà ad una respinta oggetto/muro non appena i due si avvicineranno. L'intero sistema risulta dunque descritto dalla seguente:

$$\xi_{k+1} = \xi_k + w_k + \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \quad (25.2)$$

dove

$$U = e^{-a\|\xi_k - \xi^o\|^2} \quad (25.3)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_k}\right) = -2ae^{-a\|\xi_k - \xi^o\|^2} (\xi_k - \xi^o) \quad (25.4)$$

E dunque

$$\xi_{k+1} = \xi_k - 2ae^{-a\|\xi_k - \xi^o\|^2} \left(\underbrace{\xi_k}_{\text{da stim.}} - \underbrace{\xi^o}_{\text{noto}} \right) + \underbrace{w_k}_{\text{rumore}} \quad (25.5)$$

Dopodichè si avranno a disposizione le misure provenienti dai nodi ancora (modello di misura noto):

$$y_k^i = -\gamma \log \|\xi_k - \xi_i^o\|^2 + \beta + v_k^i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, M \quad (25.6)$$

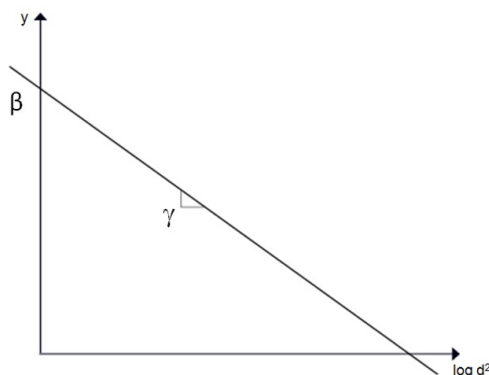


Figura 25.2. funzione d'uscita del modello in scala logaritmica

che, come riportato in figura, in scala logaritmica rappresenta una retta, in cui i parametri γ e β sono noti.

Avremo dunque il vettore

$$y_k = \begin{bmatrix} y_k^1 \\ \vdots \\ y_k^N \end{bmatrix} \quad (25.7)$$

che fornisce tutte le misure ricevute dai nodi fissi riguardo la posizione relativa dell'oggetto che si sta inseguendo. Nel caso in cui tutte le misure a un certo istante siano nulle, si procede in catena aperta. Dal momento che si sta lavorando con un sistema non lineare, si procede alla linearizzazione di questo e alla conseguente applicazione del Filtro di Kalman Esteso (EKF). Si avrà quindi:

$$\begin{cases} \xi_{k+1} = A\xi_k + Gw_k \\ y_k = C\xi_k + Hv_k \end{cases} \quad (25.8)$$

dove

$$A = \frac{\partial f}{\partial \xi} = I - 2ae^{-a\|\hat{\xi}_{k|k} - \xi^o\|^2} I + 4a^2 e^{-a\|\hat{\xi}_{k|k} - \xi^o\|^2} \left(\hat{\xi}_{k|k} - \xi^o \right) \left(\hat{\xi}_{k|k} - \xi^o \right)^T \quad (25.9)$$

il tutto calcolato nel punto della stima corrente. Stesso procedimento per il calcolo della y . Se si considera un modello statico, cioè con $\xi_{k+1} = \xi_k = \theta$, si suppone che l'oggetto sia fermo. In questo caso le stesse misure continuano a esser utilizzate ad ogni passo in quanto il punto di linearizzazione rispetto al punto $\hat{\xi}_{k|k}$ cambia nel tempo, finchè sperabilmente l'algoritmo converge ad un punto fisso.

Esempio 2: Tracking con una videocamera con UKF

Si considera ora l'esempio precedente e si cerca di risolverlo con il Filtro di Kalman Unscented (UKF).

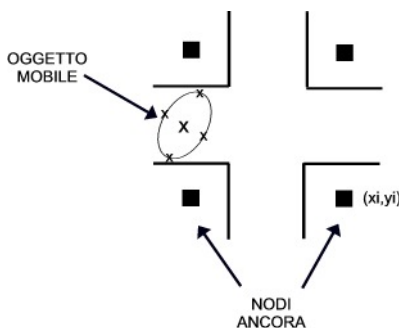


Figura 25.3. Esempio di tracking in videosorveglianza con UKF

Sia

$$\xi \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^M \quad (25.10)$$

allora il filtro UKF dice di generare $2(2 + 2 + M) + 1 = 9 + 2M$ punti.

Dalla teoria relativa all'UKF risulta che la ddp del vettore

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ w_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (25.11)$$

sia approssimata ad una gaussiana con relativa matrice di varianza

$$\begin{bmatrix} P_x & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (25.12)$$

dove $Q = qI$ e $R = rI$ con q ed r scalari positivi. Data la stima della posizione attuale $\hat{\xi}_{k|k}$ e la relativa incertezza rappresentata dall'ellisse $P_{k|k}$, la propagazione del modello avviene assegnando ad ognuno dei $9+2M$ punti relativi al UKF derivanti dalle misure ottenute all'istante k . In questo modo si può avere una stima del movimento dell'oggetto che si vuole inseguire.

Riassumendo

- Non sempre l'approssimazione tramite gaussiane ed in generale con densità unimodali è efficace. Si riporta, infatti, di seguito un esempio di caso in cui la densità iniziale è unimodale ma poi a causa del modello di dinamica non lineare la densità diventa bimodale. Si consideri infatti come in Figura una palla che viaggia verso un muro. Se la palla passa sopra il muro prosegue lungo la sua traiettoria originale, mentre se passa sotto, rimbalza ed inverte il moto. Se la densità iniziale è una gaussiana come indicato in figura, la densità della predizione si divide in due modi: una parte relativa alla densità che passa sopra il muro, ed una parte relativa alla densità che rimbalza. È ovvio che in questo caso una approssimazione tramite gaussiane, sia EKF che UKF, potrebbe portare a risultati non adeguati.

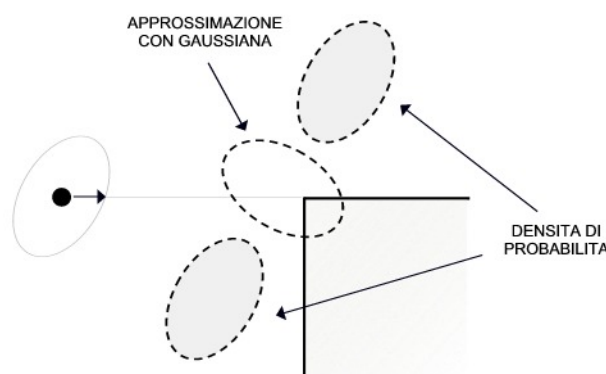


Figura 25.4. Errata approssimazione con gaussiana

- KF viene utilizzato nel caso di sistemi lineari sia con rumori gaussiani che non gaussiani ma unimodali. Nel caso di rumori non gaussiani, il FK fornisce comunque il miglior filtro lineare a minima varianza, ma non lo stimatore ottimo.
- EKF e UKF vengono utilizzati con sistemi non lineari e rumori non gaussiani ‘unimodali’
- Filtri particellari vengono utilizzati nei sistemi dinamici con densità multi-modali

I filtri particellari sono particolarmente adatti per modelli non lineari e spesso discontinui. La generalità di questo filtro si paga però, ad esempio, in termini di oneri computazionali e difficoltà di calibrazione.

Introduzione ai filtri particellari

I filtri particellari sono utilizzati per trattare sistemi dinamici in cui si presentano d.d.p. “multi-modali”.

Il contesto di applicazione è dunque del tutto generico (sono inclusi anche i modelli altamente non lineari o discontinui) e proprio per questo si riscontra nell’algoritmo implementativo un onere computazionale piuttosto elevato.

L’idea di base è l’estremizzazione del concetto di Filtro di Kalman Unscented (U.K.F).

Precisamente, l’obiettivo è quello di approssimare una generica distribuzione di probabilità $p_x(\cdot)$ con tante funzioni $\delta(\cdot)$ (“particelle”) centrate nei punti di campionamento ottenuti dalla d.d.p. ‘originale’ e tanto più frequenti tanto più ci si avvicina ai campioni con d.d.p. maggiore (si veda la prossima figura).

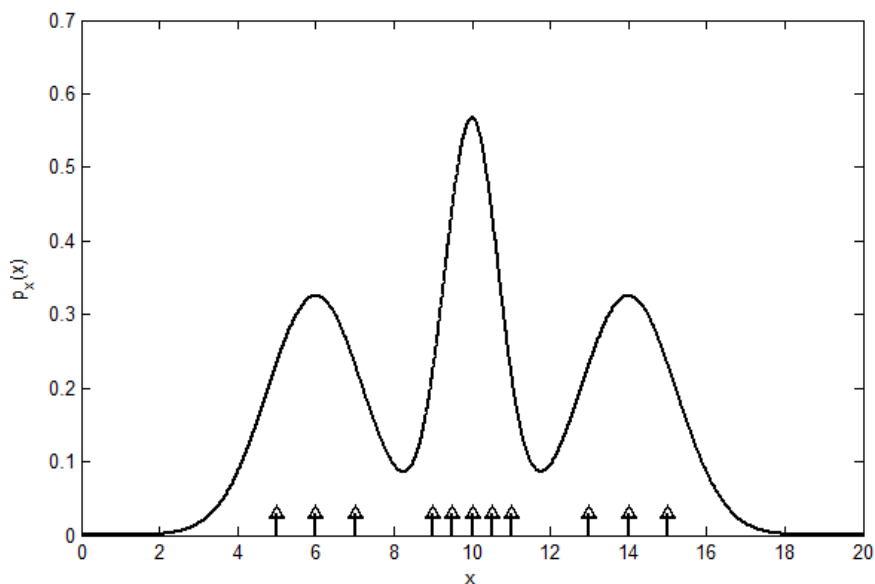


Figura 25.5. d.d.p. originaria con relativi campioni

Quello che si ottiene è la seguente approssimazione:

$$p_x(\cdot) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) = \tilde{p}_x(\cdot) \quad (25.13)$$

dove $x_i \sim p_x(\cdot)$ i.i.d sono gli N campioni acquisiti dalla distribuzione vera e le funzioni delta hanno tutte lo stesso peso.

La distribuzione $p_x(\cdot)$ e la sua approssimazione $\tilde{p}_x(\cdot)$ sono simili nel senso che

$$\mathbb{E}_{p_x}[f(x)] \approx \mathbb{E}_{\tilde{p}_x}[f(x)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (25.14)$$

con $f(x)$ funzione misurabile qualsiasi.

In sostanza si approssima il valore atteso di $f(x)$ secondo $p_x(\cdot)$ con la media campionaria.

Si vuole ora delineare lo schema generale per l'implementazione dei filtri particellari.

Si consideri allo scopo il **modello dinamico**

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, w_k) \\ y_k = h(x_k, v_k) \end{cases} \quad (25.15)$$

dove la mappa di aggiornamento di stato e d'uscita sono generalmente non lineari e i rumori di misura e modello sono descritti da distribuzioni qualsiasi.

Ciò che si desidera calcolare è la d.d.p. della v.a x_{k+1} , date le misure $[y_0, \dots, y_k]$ e la d.d.p. $p_{k_x}(\cdot)$, per ogni istante k .

Le fasi fondamentali sono in ordine:

- **campionamento** della densità $p_{x_k}(\cdot)$ e assegnazione dello stesso peso $1/N$ a tutti gli N campioni prelevati x_k^i , $i = 1, \dots, N$ (posizioni delle particelle);

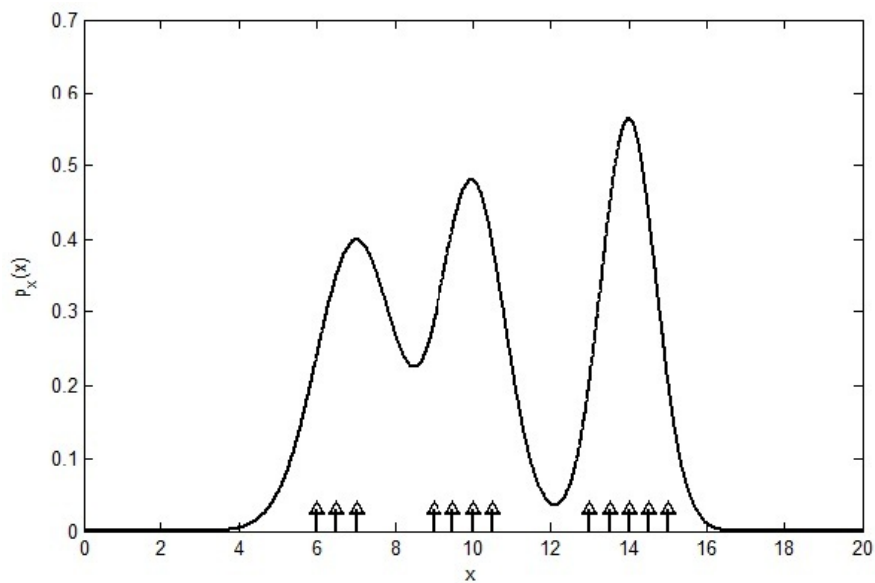


Figura 25.6. fase di campionamento

- **predizione** → calcolo dei punti

$$x_{k+1|k}^i = f(x_{k|k}^i, v_k^i), \quad i = 1, \dots, N \quad (25.16)$$

tutti ancora con ugual peso $1/N$;

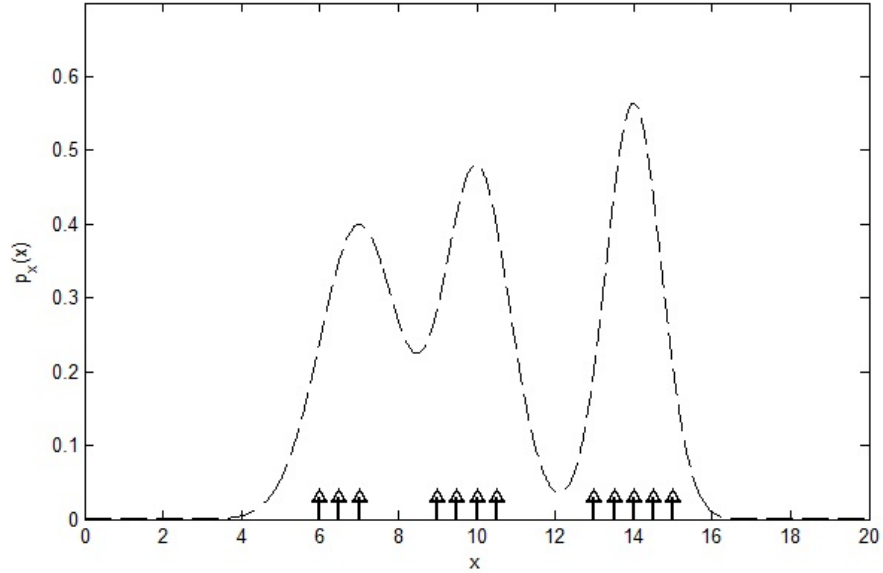


Figura 25.7. fase di predizione

- **aggiornamento** → calcolo dei nuovi pesi

$$\pi_{k+1|k+1}^i := p(y_{k+1} | x_{k+1} = x_{k+1|k}^i), \quad i = 1, \dots, N \quad (25.17)$$

da assegnare alle predizioni $x_{k+1|k}^i$, sfruttando l'informazione portata dalle nuove misure in arrivo y_{k+1} .

Più è grande questo nuovo peso e meglio si descrive la d.d.p. vera nel punto $x_{k+1|k}^i$.

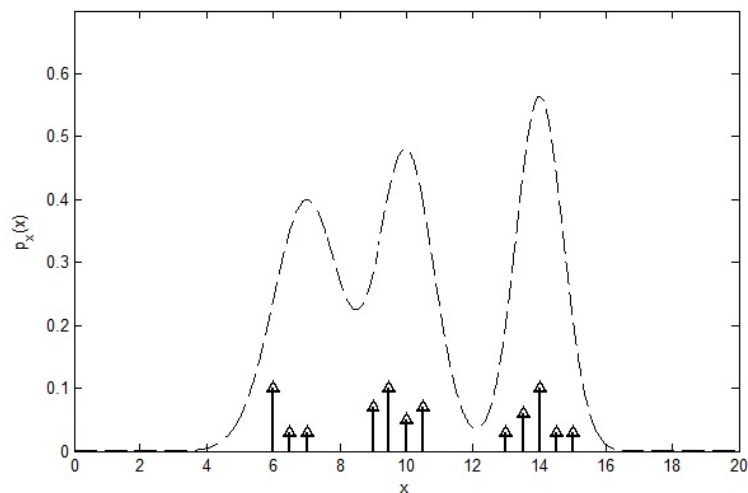


Figura 25.8. fase di aggiornamento

Le approssimazioni svolte sulla probabilità di distribuzione reale sono in successione:

$$p_{x_k}(x)$$

↓ **campionamento**

$$\tilde{p}_{k|k}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_{k|k}^i); \quad (25.18)$$

↓ **predizione**

$$\tilde{p}_{k+1|k}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_{k+1|k}^i); \quad (25.19)$$

↓ **aggiornamento**

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k+1|k+1}(x) &= \frac{\sum_{i=1}^N \pi_{k+1|k+1}^i \delta(x - x_{k+1|k+1}^i)}{\sum_{i=1}^N \pi_{k+1|k+1}^i} = \\ &= \sum_{i=1}^N w_{k+1}^i \delta(x - x_{k+1|k+1}^i). \end{aligned} \quad (25.20)$$

Tutto il procedimento visto (da ripetersi ad ogni istante) presenta un problema di rigenerazione. Infatti, volendo ad ogni passo un numero N sempre costante di particelle tutte con pesi uniformi, all'aumentare del tempo alcune nuove particelle prenderanno inevitabilmente il posto di altre già presenti che andranno a "morire".

Una soluzione possibile è il re-sampling in cui si suddivide una funzione delta con peso elevato in tante funzioni delta con pesi unitari e con stessa posizione.

Ad esempio: $3\delta(x - x_i) = \sum_{i=1}^3 \delta(x - x_i)$.

In questo modo tutte le funzioni delta equi-pesate, nate da quelle a peso originariamente elevato, andranno a collocarsi in posizioni differenti una volta compiuto il passo di predizione, facendo morire alcune particelle già presenti e a basso peso iniziale.

Nell'aggiornamento si ricalcolano i pesi utilizzando le nuove misure, ottenendo infine nuove particelle con posizione e pesi diversi che saranno ri-campionate per l'iterazione successiva.

Si veda la figura seguente per maggior chiarezza.

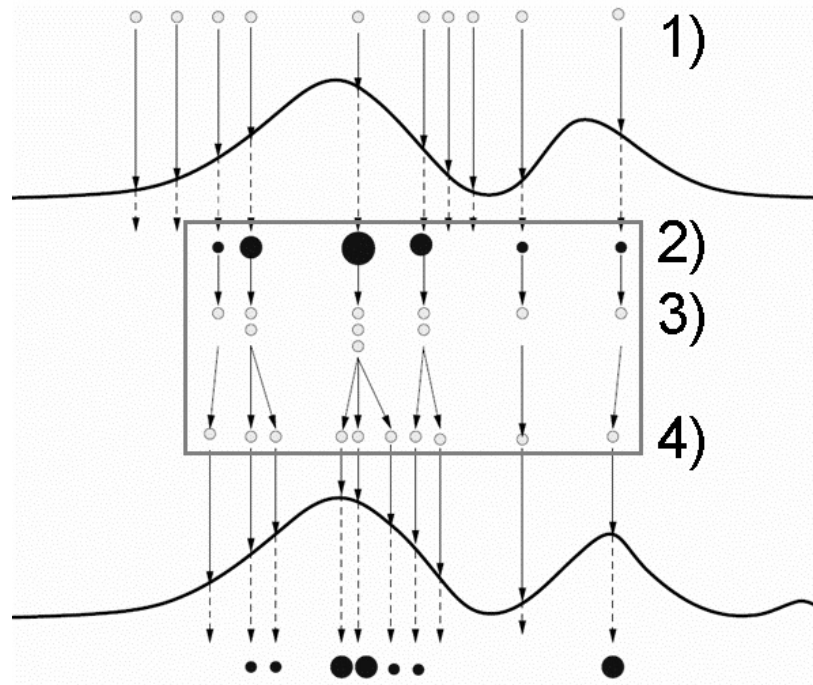


Figura 25.9. nel riquadro è raffigurato il re-sampling delle particelle

I principali vantaggi che si riscontrano nell'utilizzo dei filtri particellari sono:

- applicabilità ad un qualunque modello dinamico;
- utilizzo a scopo di filtraggio, predizione e inseguimento-ricostruzione di traiettorie;
- uniformità nel numero di particelle.

Quanto agli svantaggi si riscontrano:

- elevata complessità dell'algoritmo, crescente col numero di particelle N ;
- rumore aggiuntivo introdotto dal ri-campionamento delle stesse particelle (problemi di correlazione).

Stime Monte Carlo

Le stime Monte Carlo sono metodi randomizzati per il calcolo di integrali particolarmente ostici.

Data una certa densità di probabilità $p_x(\cdot)$ e una funzione $f(\cdot)$, un possibile obiettivo potrebbe essere il calcolo di

$$\mathbb{E}_{p_x}[f(x)] = \int f(x)p_x(x)dx = \mu_f \quad (25.21)$$

Dalla d.d.p. iniziale si generano N campioni $x_i \sim p_x(\cdot)$ i.i.d per la stima di $f(\cdot)$.

Si procede poi con il calcolo della media campionaria

$$\hat{\mu}_f^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \int f(x) \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i)}_{\hat{p}_x(\cdot)} dx \quad (25.22)$$

che approssima con un certo grado di bontè l'aspettazione vera di $f(\cdot)$.

Si faccia presente che, per la **legge dei grandi numeri**, vale:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mu}_f^N = \mu_f \quad q.c.$$

Dal calcolo della varianza di $f(\cdot)$

$$var_{p_x}[f(x)] = \mathbb{E}_{p_x}[(f(x) - \mu_f)^2] = \int (f(x) - \mu_f)^2 p_x(x) dx \quad (25.23)$$

e dalla **diseguaglianza di Chebychev**

$$P[|\hat{\mu}_f^N - \mu_f| > \epsilon] \leq \frac{1}{N} \overbrace{\frac{var_{p_x}[f(x)]}{\epsilon^2}}^{\leq c} \leq \frac{1}{N} \frac{c}{\epsilon^2} \quad (25.24)$$

si evince che l'incertezza dell'approssimazione della media di $f(\cdot)$ diminuisce al crescere di N e si ricava inoltre la stima di quanti campioni N utilizzare, una volta fissato il valore di tolleranza ϵ .

In sintesi quello presentato è un approccio probabilistico per il calcolo di una quantità deterministica, di cui si possono ben valutare le prestazioni.

Un problema di particolare rilevanza è in questo caso la generazione dei campioni provenienti da una d.d.p. qualsiasi $p_x(\cdot)$.

La soluzione consiste solitamente nel generare i campioni da una densità nota ($x_i \sim q(x)$, con $q(x)$ gaussiana o uniforme) che approssima quella vera e nel cambiare poi i pesi ai campioni, arrivando alla seguente espressione per l'aspettazione, sempre approssimata, di $f(\cdot)$:

$$\hat{\mu}_f^N = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p(x_i)}{q(x_i)} f(x_i)}{\sum_{i=1}^N \frac{p(x_i)}{q(x_i)}} \quad (25.25)$$

Questo modo di procedere porta però ad un aumento della varianza di $f(\cdot)$ e quindi ad un peggioramento delle prestazioni.